ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 2, 1961 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Саркисян

Кручение анизотропных призматических стержней сечением в виде удлиненного авиационного профиля

Впервые задача о кручении изотропного и ортотропного стержня сечением в виде авиационного профиля, как частного, так и общего типа, была приближенно решена, исходя из вариационного уравнения Лагранжа и из вариационной формулы Кастилиано, академиком Л. С. Лейбензоном [1].

Позднее, та же задача для изотропного стержня сечением в виде авиационного профиля частного типа, т. е. сечением, ограниченным полукубической параболой, методом малого параметра была решена Дунканом [2] и тем же методом, но довольно строго математически обосновано — Д. Ю. Пановым [3, 4].

Та же задача в более общей постановке методом функций комплексного переменного приближенно решена Икуи [5].

Приближенное решение задачи о кручении анизотропного стержня, имеющего только одну плоскость симметрии, нормальную к оси (т. е. неортотропного), сечением, ограниченным полукубическими параболами, было найдено В. Д. Ванториным [6]*.

Решение задачи кручения неортотропного стержня методом малого параметра получено А. Р. Янпольским [22] и нами в работе [8].

В настоящей работе рассматривается задача о кручении неортотропных стержней сечениями в виде удлиненного авиационного профиля общего типа. По методу малого параметра получены выражения функций напряжений, жесткости и касательных напряжений, определены максимальные напряжения.

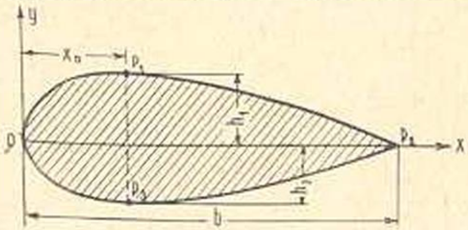
Исследованы вопросы о точности приближенных формул жесткости кручения. Полученные результаты иллюстрируются числовыми примерами.

* В. Д. Ванторин решил дифференциальное уравнение А. Ш. Локшина [7] в задаче кручения анизотропной (неортотропной) призмы методом Ритца, ограничиваясь первым приближением. Если в результатах, полученных В. Д. Ванториным [6], перейти от модулей упругости c_{ij} к коэффициентам деформации a_{ij} $(i, j = 4, 5)$, то заметим, что выржения жесткости и касательных напряжений не зависят от коэффициента деформации a_{45}, иначе говоря, получим решение задачи о кручении ортотропного стержня. На наш взгляд правильным было бы ограничиться не первым приближением решения уравнения кручения неортотропного стержня, а хотя бы вторым или третьим, чтобы выявилось влияние неортотропности материала.

Как частный случай, получены результаты для кручения анизотропных стержней сечением в виде удлиненного параболического серпа, параболического сегмента и полукубической параболы.

§ 1. Постановка и решение задачи

Пусть поперечное сечение стержня ограничено двумя кривыми OP_1P_2 и OP_3P_2 (фиг. 1), заданными следующими уравнениями



Фиг. 1.

$$y = a\left(\frac{x}{b}\right)^m \cdot \left[1 - \left(\frac{x}{b}\right)^p\right]^q, \tag{1.1}$$

$$y = -a_1\left(\frac{x}{b}\right)^m \cdot \left[1 - \left(\frac{x}{b}\right)^p\right]^q, \tag{1.2}$$

где a, a_1 — постоянные коэффициенты, m, p, q — положительные числа, b — ширина профиля.

Область, ограниченную кривыми (1.1) и (1.2), следуя академику Л. С. Лейбензону, назовем авиационным профилем.

Определим коэффициенты a и a_1. Легко видеть, что ордината y получает свое максимальное значение при значении абсциссы

$$x_0 = b \cdot \left(\frac{m}{m + pq}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.3}$$

Тогда, при помощи уравнений (1.1), (1.2) и выражения (1.3), находим

$$\begin{aligned} a &= \Delta(m, p, q) \cdot h_1, \\ a_1 &= \Delta(m, p, q) \cdot h_2, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где

$$\Delta(m, p, q) = \Delta = \frac{(m + pq)^{\frac{m+pq}{p}}}{m^{\frac{m}{p}}\,(pq)^q}, \tag{1.5}$$

а h_1 и h_2 — наибольшие высоты профиля (соответственно верхняя и нижняя).

Так как поперечное сечение представляет собой узкую, длинную область, то отношение

$$\lambda = \frac{h_1 + h_2}{2b} \qquad 0 < \lambda < \frac{1}{2} \tag{1.6}$$

естественно принять в качестве малого параметра. Тогда очертание авиационного профиля (1.1)—(1.2) можно описать уравнениями

$$\begin{aligned} y &= \lambda c_1 \varphi(x), \\ y &= \lambda c_2 \varphi(x), \end{aligned} \tag{1.7}$$

которые эквивалентны уравнению

$$F(x, y) = [y - \lambda c_1 \varphi(x)] \cdot [y - \lambda c_2 \varphi(x)] = 0. \tag{1.7'}$$

Здесь введены обозначения:

$$\varphi(x)=x^m(b^p-x^p)^q, \qquad c_1=\frac{2h_1\Delta}{(h_1+h_2)\,b^{m+pq-1}},$$

$$c_2=-\frac{2h_2\Delta}{(h_1+h_2)\,b^{m+pq-1}},$$

$F(x, y)=0$ — уравнение кривой, ограничивающей поперечное сечение стержня.

Как известно [9], задача о кручении анизотропного стержня, имеющего в каждой точке плоскость упругой симметрии, нормальную к его оси (т. е. неортотропного), сводится к решению уравнения

$$a_{11}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-2a_{12}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}+a_{22}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=-2\theta \tag{1.8}$$

с граничным условием $\Psi(x, y)=0$ вдоль кривой $F(x, y)=0$.

Здесь $\Psi(x, y)$ — функция напряжений, a_{ik} — упругие постоянные, удовлетворяющие условиям

$$a_{11}>0,\quad a_{22}>0,\quad a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0, \tag{1.9}$$

θ — относительный угол закручивания.

Положим

$$y=\lambda\eta \quad \Psi(x, y)=\Phi(x, \eta; \lambda). \tag{1.10}$$

Имея в виду (1.10), уравнение (1.8) и граничное условие можно написать так

$$\lambda^2a_{11}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-2\lambda a_{12}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial\eta}+a_{22}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}=-2\theta\lambda^2, \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned}&\Phi[x, c_1\varphi(x); \lambda]=0,\\ &\Phi[x, c_2\varphi(x); \lambda]=0.\end{aligned} \tag{1.12}$$

Представим решение (1.11) в виде ряда по степеням λ*

$$\Phi(x, \eta; \lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(x, \eta)\cdot\lambda^k. \tag{1.13}$$

Тогда, при помощи (1.11)–(1.13), для определения неизвестных функций $P_k(x, \eta)$ $(k=0, 1, 2, 3, \ldots)$ получатся следующие рекуррентные дифференциальные уравнения с соответствующими граничными условиями [8]

* Асимптотическая сходимость этого ряда довольно строго математически доказана в работе [8].

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_0}{\partial\eta^2} &= 0,\\ -2a_{12}\cdot\frac{\partial^2 P_0}{\partial x\partial\eta}+a_{22}\cdot\frac{\partial^2 P_1}{\partial\eta^2} &= 0,\\ a_{11}\cdot\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}-2a_{12}\cdot\frac{\partial^2 P_1}{\partial x\partial\eta}+a_{22}\cdot\frac{\partial^2 P_2}{\partial\eta^2} &= -2\theta,\\ a_{11}\cdot\frac{\partial^2 P_k}{\partial x^2}-2a_{12}\cdot\frac{\partial^2 P_{k+1}}{\partial x\partial\eta}+a_{22}\cdot\frac{\partial^2 P_{k+2}}{\partial\eta^2} &= 0\\ (k=1,\ 2,\ 3,\ldots), \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

$$\left.\begin{aligned} P_k\,[x,\ c_1\varphi(x)] &= 0,\\ P_k\,[x,\ c_2\varphi(x)] &= 0. \end{aligned}\quad (k=0,1,2,\ldots)\right\} \tag{1.15}$$

Из рекуррентных уравнений (1.14) при помощи (1.15) последовательно определяются функции $P_k(x,\ \eta)$ $(k=0,1,2,3,\ldots)$

$$P_0(x,\ \eta)\equiv 0,$$

$$P_1(x,\ \eta)\equiv 0,$$

$$P_2(x,\ \eta)=-\frac{\theta}{a_{22}}\cdot\{\eta^2-x^m(b^p-x^p)^q\cdot[c\eta-dx^m(b^p-x^p)^q]\},$$

$$P_3(x,\ \eta)=\frac{\theta a_{12}}{a_{22}^2}\cdot cx^{m-1}(b^p-x^p)^{q-1}\cdot(r-x^ps)\cdot\{\eta^2-x^m(b^p-x^p)^q\times$$

$$\times[c\eta-d\,x^m(b^p-x^p)^q]\},$$

$$P_4(x,\eta)=\frac{2a_{12}^2\theta}{a_{22}^3}\cdot\Big\{cx^{m-2}(b^p-x^p)^{q-2}\cdot[(r-x^ps)(l-x^pu)-$$

$$-x^p(b^p-x^p)sp]\cdot\left[\frac{\eta^3}{3}-\frac{\eta^2}{2}cx^m(b^p-x^p)^q+\frac{\eta}{6}gx^{2m}(b^p-x^p)^{2q}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}cdx^{3m}(b^p-x^p)^{3q}\right]-c^2x^{2(m-1)}(b^p-x^p)^{2(q-1)}\cdot(r-x^ps)^2\times$$

$$\times\left[\frac{\eta^2}{2}-\frac{\eta}{2}cx^m(b^p-x^p)^q+\frac{d}{2}x^{2m}(b^p-x^p)^{2q}\right]\Big\}+$$

$$+\frac{a_{11}\theta}{a_{22}^2}\cdot\Big\{cx^{m-2}(b^p-x^p)^{q-2}\cdot[(r-x^ps)(l-x^pu)-$$

$$-x^p(b^p-x^p)sp]\cdot\left[-\frac{\eta^3}{6}+\frac{\eta}{6}gx^{2m}(b^p-x^p)^{2q}-\frac{cd}{6}x^{3m}(b^p-x^p)^{3q}\right]+$$

$$+2dx^{2(m-1)}\cdot(b^p-x^p)^{2(q-1)}\cdot[(r-x^ps)(f-x^pv)-psx^p(b^p-x^p)]\times$$

$$\times\left[\frac{\eta^2}{2}-\frac{\eta}{2}cx^m(b^p-x^p)^q+\frac{d}{2}x^{2m}(b^p-x^p)^{2q}\right]\Big\}.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{1.16}$$

где

$$c = c_1 + c_2, \quad d = c_1 \cdot c_2, \quad s = m + pq, \quad r = mb^p, \quad l = (m-1)b^p,$$

$$u = m + pq - 1 - p, \quad g = c_1^2 + c_1c_2 + c_2^2, \quad v = 2m - 1 + 2pq - p,$$

$$f = (2m-1)\cdot b^p.$$

Таким образом, последовательно определяя функции $P_k(x, \eta)$, можно записать выражение для $\Phi(x, \eta; \lambda)$, следовательно, и для функции напряжений

$$\Psi(x, y) = -\frac{\theta}{a_{12}}y^2 + \lambda\theta c y x^{m-2}(b^p - x^p)^{q-2}\cdot\left\{\frac{x^2(b^p - x^p)^2}{a_{22}} + \right.$$

$$+ y\cdot\frac{a_{12}}{a_{22}^2}\cdot x(b^p - x^p)(r - x^p s) + y^2\cdot\frac{4a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}{6a_{22}^3}\cdot[(r - x^p s)(l - x^p u) -$$

$$\left. - x^p(b^p - x^p)sp]\right\} + \lambda^2\theta x^{2(m-1)}(b^p - x^p)^{2(q-1)}\times$$

$$\times\left\{-\frac{d}{a_{22}}\cdot x^2(b^p - x^p)^2 - y\cdot\frac{a_{12}}{a_{22}^2}c^2 x(b^p - x^p)(r - x^p s) - \right.$$

$$- y^2\left(\frac{a_{12}^2 c^2}{a_{22}^3}\cdot[(r - x^p s)(l - x^p u) - x^p(b^p - x^p)sp] + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{a_{12}^2}{a_{22}^3}\cdot(r - x^p s)^2\cdot c^2 - \frac{a_{11}d}{a_{22}^2}\cdot[(r - x^p s)(f - vx^p) - x^p(b^p - x^p)sp]\right)\right\} +$$

$$+ \lambda^3\theta x^{3m-2}(b^p - x^p)^{3q-2}c\left\{\frac{a_{12}d}{a_{22}^2}(r - x^p s)(b^p - x^p)x + \right.$$

$$+ y\left(\frac{a_{12}^2}{3a_{22}^3}\cdot[(r - x^p s)(l - x^p u) - x^p(b^p - x^p)sp]\cdot g + \frac{a_{12}^2 c^2}{a_{22}^3}(r - x^p s)^2 + \right.$$

$$+ \frac{a_{11}g}{6a_{22}^2}\cdot[(r - x^p s)(l - x^p u) - x^p(b^p - x^p)sp] -$$

$$\left.\left. - \frac{a_{11}d}{a_{22}^2}\cdot[(r - x^p s)(f - x^p v) - psx^p(b^p - x^p)]\right)\right\} +$$

$$+ \lambda^4\theta x^{2(2m-1)}(b^p - x^p)^{2(2q-1)}d\cdot\left\{\frac{2a_{12}^2 c^2}{3a_{22}^3}\cdot[(r - x^p s)(l - x^p u) - \right.$$

$$- x^p(b^p - x^p)sp] - \frac{a_{12}^2 c^2}{a_{22}^3}\cdot(r - x^p s)^2 +$$

$$+ \frac{a_{11}d}{a_{22}^2}\cdot[(r - x^p s)(f - x^p v) - x^p(b^p - x^p)sp -$$

$$\left. - \frac{a_{11}c^2}{6a_{22}^2}[(r - x^p s)(l - x^p u) - x^p(b^p - x^p)sp]\right\} + \cdots \qquad (1.17)$$

§ 2. Жесткость кручения неортотропного стержня

Определим жесткость анизотропного призматического стержня удлиненного авиационного профиля

$$C_t = \frac{2}{\theta} \int_0^b \int_{\lambda c_2 \varphi}^{\lambda c_1 \varphi} \Psi(x, y)\, dx dy.$$

Подставив значение функции напряжений из (1.17), проинтегрировав по y и выполнив ряд нетрудных, но утомительных преобразований, получим

$$C_t = \frac{\lambda^3 (c_1 - c_2)^3}{3a_{22}} \cdot J_1 - \frac{\lambda^4 c (c_1 - c_2)^3 a_{12}}{3a_{22}^2} \cdot J_2 + \frac{\lambda^5 (c_1 - c_2)}{12 a_{22}^3} \times$$

$$\times \left[c^2 [a_{11} a_{22} (c_1 - c_2)^2 + 12 a_{12}^2 c_1 c_2] \cdot J_3 + 4 (c_1 - c_2)^2 \times\right.$$

$$\left.\times [c^2 a_{12}^2 \cdot J_4 - d \cdot a_{11} a_{22} \cdot J_5]\right] + 0(\lambda^7), \tag{2.1}$$

где

$$J_1 = \int_0^b x^{3m} (b^p - x^p)^{3q} dx,$$

$$J_2 = \int_0^b x^{4m-1} (b^p - x^p)^{4q-1} (r - x^p s)\, dx,$$

$$J_3 = \int_0^b x^{5m-2} (b^p - x^p)^{5q-2} [(r - x^p s)(l - x^p u) - x^p (b^p - x^p) sp]\, dx,$$

$$J_4 = \int_0^b x^{5m-2} (b^p - x^p)^{5q-2} (r - x^p s)^2 dx,$$

$$J_5 = \int_0^b x^{5m-2} (b^p - x^p)^{5q-2} [(r - x^p s)(f - x^p v) - psx^p (b^p - x^p)]\, dx.$$

Вычислим эти интегралы. Для этого введем новую переменную z

$$x = bz^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда

$$J_1 = \int_0^b x^{3m} (b^p - x^p)^{3q} dx = \frac{b^{3(m+pq)+1}}{p} \cdot \int_0^1 z^{\frac{3m+1}{p} - 1} (1 - z)^{3q} dz =$$

$$= \frac{b^{3(m+pq)+1}}{p} \cdot B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q + 1\right). \tag{2.2}$$

Здесь введено общеизвестное обозначение эйлерова интеграла первого рода (бета-функция)*

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

Для вычисления остальных интегралов воспользуемся формулой приведения

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1} B(\alpha-1, \beta) \quad (\alpha > 1).$$

Тогда

$$J_2 = \frac{b^{4(m+pq)}}{p}\left\{mB\left(\frac{4m}{p}, 4q\right) - (m+pq)B\left(\frac{4m+p}{p}, 4q\right)\right\} =$$

$$= \frac{b^{4(m+pq)}}{p}\left\{m - (m+pq)\frac{m}{m+pq}\right\} B\left(\frac{4m}{p}, 4q\right) = 0, \tag{2.3}$$

$$J_3 = \frac{b^{5(m+pq)-1}}{p}\left\{m(m-1)B\left(\frac{5m-1}{p}, 5q-1\right) - \right.$$

$$- [2m(m+pq-1) + pq(p-1)]B\left(\frac{5m-1+p}{p}, 5q-1\right) +$$

$$\left. + (m+pq)(m+pq-1)B\left(\frac{5m-1+2p}{p}, 5q-1\right)\right\} =$$

$$= \frac{b^{5(m+pq)-1}}{p}\delta_1(m, p, q)B\left(\frac{5m-1}{p}, 5q-1\right), \tag{2.4}$$

$$J_4 = \frac{b^{5(m+pq)-1}}{p}\left\{m^2 B\left(\frac{5m-1}{p}, 5q-1\right) - 2m(m+pq)\times\right.$$

$$\left.\times B\left(\frac{5m-1+p}{p}, 5q-1\right) + (m+pq)^2 B\left(\frac{5m-1+2p}{p}, 5q-1\right)\right\} =$$

$$= \frac{b^{5(m+pq)-1}\delta_2(m, p, q)}{p} B\left(\frac{5m-1}{p}, 5q-1\right), \tag{2.5}$$

$$J_5 = \frac{b^{5(m+pq)-1}}{p}\left\{m(2m-1)B\left(\frac{5m-1}{p}, 5q-1\right) - \right.$$

$$- [2m(2m+2pq-1) - pq(1-p)]B\left(\frac{5m-1}{p}+1, 5q-1\right) +$$

* В дальнейшем, при решении конкретных примеров, для вычисления $B(\alpha, \beta)$ использовалась общеизвестная формула $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$. Здесь $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx$ — гамма-функция, численные значения которой брались из [10].

$$+(m+pq)(2m+2pq-1)\,B\left(\frac{5m-1+2p}{p},\ 5q-1\right)\Big\}=$$

$$=\frac{b^{5(m+pq)-1}}{p}\,\delta_3(m,p,q)\,B\left(\frac{5m-1}{p},\ 5q-1\right), \tag{2.6}$$

где

$$\delta_1(m,p,q)=m(m-1)-\frac{(5m-1)\,[2m(m+pq-1)+pq(p-1)]}{5(m+pq)-1-p}+$$

$$+\frac{(5m-1)(5m-1+p)\,(m+pq)(m+pq-1)}{[5(m+pq)-1-p]\,[5(m+pq)-1]},$$

$$\delta_2(m,p,q)=m^2-\frac{2m(m+pq)(5m-1)}{5(m+pq)-p-1}+$$

$$+\frac{(m+pq)^2(5m-1)(5m-1+p)}{[5(m+pq)-1-p]\,[5(m+pq)-1]},$$

$$\delta_3(m,p,q)=m(2m-1)-\frac{[2m(2m+2pq-1)-pq(1-p)]\,(5m-1)}{5(m+pq)-p-1}+$$

$$+\frac{(m+pq)(2m+2pq-1)(5m-1)(5m-1+p)}{[5(m+pq)-1-p]\,[5(m+pq)-1]}.$$

Подставляя значения интегралов $J_1, \ldots, J_5$ из (2.2)–(2.6) в выражение (2.1), учитывая выражение (1.5) и значения c_1 и c_2, для жесткости кручения неортотропного призматического стержня удлиненного авиационного профиля окончательно получим следующее выражение

$$C_t=\frac{8\lambda^3b^3\Delta^3}{3a_{22}p}\,B\left(\frac{3m+1}{p},\ 3q+1\right)+\frac{8\lambda^5b^4\Delta^5}{3a_{22}^4\,p\,(h_1+h_2)^4}\times$$

$$\times\{(h_1-h_2)^2\,[a_{11}a_{22}(h_1+h_2)^2-12a_{12}^2h_1h_2]\,\delta_1(m,p,q)+$$

$$+4(h_1+h_2)^2\,[(h_1-h_2)^2\,a_{12}^2\delta_2(m,p,q)+h_1h_2a_{11}a_{22}\delta_3(m,p,q)]\}\times$$

$$\times B\left(\frac{5m-1}{p},\ 5q-1\right)+0(\lambda^7). \tag{2.7}$$

В частном случае, для жесткости кручения неортотропного призматического стержня удлиненного симметричного авиационного профиля (т. е. $h_1=h_2=h$) из (2.7) будем иметь

$$C_t=\frac{8\lambda^3b^4\Delta^3}{3a_{22}p}\,B\left(\frac{3m+1}{p},\ 3q+1\right)+\frac{8\lambda^5b^4\Delta^5a_{11}}{3a_{22}^2p}\,\delta_3(m,p,q)\times$$

$$\times B\left(\frac{5m-1}{p},\ 5q-1\right)+0(\lambda^7). \tag{2.8}$$

Более точное [с точностью $0(\lambda^9)$] выражение для жесткости при кручении анизотропного упругого стержня симметричного поперечного сечения получено в работе [8].

Если стержень ортотропный (т. е. $a_{12}=0$), то для жесткости кручения из (2.7) получим

$$C_t=\frac{8\lambda^3 b^4\Delta^3}{3a_{22}p}B\left(\frac{3m+1}{p},\ 3q+1\right)+\frac{8\lambda^5 b^4\Delta^5 a_{11}}{3a_{22}^2 p(h_1+h_2)^2}\times$$

$$\times\left[(h_1-h_2)^2\delta_1(m,p,q)+4h_1h_2\delta_3(m,p,q)\right]\times$$

$$\times B\left(\frac{5m-1}{p},\ 5q-1\right)+0(\lambda^7). \tag{2.9}$$

Л. С. Лейбензон, исследуя задачу о кручении ортотропного стержня с сечением в виде авиационного профиля, исходя из вариационной формулы Кастилиано, получил [1]

$$C_t^*=G_{13}\frac{b(a+a_1)^3B\left(\dfrac{3m+1}{p},\ 3q+1\right)}{3p\left[1+\varepsilon\dfrac{a^2+aa_1+a_1^2}{b^2}\dfrac{G_{13}}{G_{23}}\right]}, \tag{2.10}$$

где

$$\varepsilon=\frac{\dfrac{m^2}{p}B\left(\dfrac{5m-1}{p},\ 5q-1\right)-\dfrac{2m(m+pq)}{p}B\left(\dfrac{5m-1+p}{p},\ 5q-1\right)}{\dfrac{1}{p}B\left(\dfrac{3m+1}{p},\ 3q+1\right)}+$$

$$+\frac{\dfrac{(m+pq)^2}{p}B\left(\dfrac{5m-1+2p}{p},\ 5q-1\right)}{\dfrac{1}{p}B\left(\dfrac{3m+1}{p},\ 3q+1\right)}, \tag{2.11}$$

а G_{13} и G_{23} — общепринятые обозначения модуля сдвига в плоскостях, параллельных координатным плоскостям xoz и yoz.

Введем обозначение

$$\lambda_*=H_*\sqrt{G_*}\ . \tag{2.12}$$

Здесь $H_*=\sqrt{\varepsilon\dfrac{a^2+aa_1+a_1^2}{b^2}}$ назовем приведенной геометрической толщиной профиля, а $G_*=\dfrac{G_{13}}{G_{23}}$ — приведенной физической толщиной профиля.

Тогда выражение (2.10) можно представить так

$$C_t^*=G_{13}\frac{b(a+a_1)^3B\left(\dfrac{3m+1}{p},\ 3q+1\right)}{3p}\frac{1}{1+\lambda_*^2}. \tag{2.13}$$

Если это выражение разложить в ряд по степеням $\lambda_*^{*)}$ (где $\lambda_* < 1$), то получим

$$C_t^* = G_{13} \frac{b(a+a_1)^3 B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}{3p} [1 - \lambda_*^2 + \lambda_*^4 - \lambda_*^6 + \cdots] \quad (2.14)$$

или

$$C_t^* = C_t^{(\text{прибл.})} + \zeta^*, \quad (2.14')$$

где введены обозначения

$$C_t^{(\text{прибл.})} = G_{13} \frac{b(a+a_1)^3 B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}{3p} \times$$

$$\times \left[1 - \varepsilon \frac{a^2 + aa_1 + a_1^2}{b^2} \frac{G_{13}}{G_{23}}\right], \quad (2.15)$$

$$\zeta^* = G_{13} \frac{b(a+a_1)^3 B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}{3p} \frac{\lambda_*^4}{1+\lambda_*^2}. \quad (2.16)$$

Докажем, что если в выражениях (2.14) или (2.14′) пренебречь четвертой и высшей степенью малого параметра λ_*, т. е. принять приближение с точностью $1 + \lambda_*^4 \approx 1$, то выражение (2.10) или, что то же, выражение (2.14) совпадает с формулой (2.9). Строго говоря, выражение (2.14′) эквивалентно формуле (2.9) с точностью малой величины $0(\lambda_*^4)$. Это станет очевидным, если нам удастся доказать, что выражение (2.15) совпадает с (2.9).

Для этой цели, учитывая соотношения (1.4) и (1.6), выражение (2.9) преобразуем так

$$C_t = \frac{b(a+a_1)^3}{3a_{22}} \frac{B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}{p} \times$$

$$\times \left\{1 + \frac{a_{11}}{a_{22}} \frac{(a-a_1)^2 \delta_1 + 4aa_1\delta_3}{b^2} \frac{B\left(\frac{5m-1}{p}, 5q-1\right)}{4B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}\right\}. \quad (2.17)$$

Теперь, пользуясь формулой приведения бета-функции, выражение (2.11) представим в виде

$$\varepsilon = \delta_2 \frac{B\left(\frac{5m-1}{p}, 5q-1\right)}{B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}. \quad (2.18)$$

---

*) Это легко сделать для удлиненных профилей за счет приведенной геометрической толщины H_* и приведенной физической толщины G_*.

Затем, имея в виду тождества

$$\delta_1(m, p, q) + 4\delta_2(m, p, q) = 0,$$
$$3\delta_1(m, p, q) - 4\delta_3(m, p, q) = 0,$$

можно написать

$$(a-a_1)^2\delta_1 + 4aa_1\delta_3 = -4\delta_2(a^2 + aa_1 + a_1^2). \tag{2.19}$$

Таким образом, учитывая (2.18) и (2.19), из выражения (2.17) окончательно получим

$$C_t = \frac{(a+a_1)^3 b}{3a_{22}} \frac{B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}{3p}\left[1 - \varepsilon\frac{a^2 + aa_1 + a_1^2}{b^2}\frac{a_{11}}{a_{22}}\right]$$

или

$$C_t = G_{13}\frac{(a+a_1)^3 b B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}{3p}\left[1 - \varepsilon\frac{a^2 + aa_1 + a_1^2}{b^2}\frac{G_{13}}{G_{23}}\right], \tag{2.20}$$

которое точно совпадает с формулой (2.15) для выражения жесткости кручения $C_t^{(\text{прибл.})}$, что и требовалось доказать.

Перейдем к оценке погрешности при сохранении двух членов формулы (2.14), т. е. оценим погрешность определения жесткости кручения выражением (2.15). Для этого определим относительную погрешность

$$\varepsilon^* = \frac{\zeta^*}{C_t^{(\text{прибл.})}} = \frac{\lambda_*^4}{1-\lambda_*^4}. \tag{2.21}$$

Для того, чтобы при помощи (2.15) жесткость кручения ортотропного стержня сечением в виде авиационного профиля вычислять с точностью до одного процента, значения λ_* должны удовлетворять неравенству

$$\frac{\lambda_*^4}{1-\lambda_*^4} < 0{,}01$$

откуда

$$\lambda_* < 0{,}3154. \tag{2.22}$$

Этот результат показывает, что при определении жесткости длинных и узких ортотропных авиационных профилей для практических целей вместо формулы (2.14) с большим успехом можно применять приближенную формулу (2.9). Обратное утверждение тоже верно. Более точные оценки для жесткости кручения неортотропного стержня получены в последнем параграфе.

§ 3. Определение касательных напряжений

Имея функцию напряжений $\Psi(x, y)$, для касательных напряжений получим следующие выражения

$$
\begin{aligned}
\tau_{xz} = \frac{\partial\Psi}{\partial y} = \frac{\theta}{a_{22}}[-2y + \lambda c x^{m}(b^{p}-x^{p})^{q}] + \frac{\lambda\theta c x^{m-2}(b^{p}-x^{p})^{q-2}y}{2a_{22}^{3}} \times \\
\times [4a_{22}a_{12}x(b^{p}-x^{p})(r-x^{p}s) + y(4a_{12}^{2}-a_{11}a_{22}) \times \\
\times [(r-x^{p}s)(l-x^{p}u) - x^{p}(b^{p}-x^{p})sp]] + \\
+ \frac{\lambda^{2}\theta x^{2(m-1)}(b^{p}-x^{p})^{2(q-1)}}{a_{22}^{3}} \Big\{ -a_{12}a_{22}c^{2}(b^{p}-x^{p})(r-x^{p}s)x - \\
-2y\Big(a_{12}^{2}c^{2}[(r-x^{p}s)(l-x^{p}u) - x^{p}(b^{p}-x^{p})sp] + a_{22}^{2}(r-x^{p}s)^{2}c^{2} - \\
- a_{11}a_{12}d[(r-x^{p}s)(f-vx^{p}) - x^{p}(b^{p}-x^{p})sp]\Big)\Big\} + \\
+ \frac{\lambda^{3}\theta x^{3m-2}(b^{p}-x^{p})^{3q-2}c}{6a_{22}^{3}} [g(2a_{12}^{2}+a_{11}a_{22})[(r-x^{p}s)(l-x^{p}u) - \\
- x^{p}(b^{p}-x^{p})sp] + 6a_{12}^{2}c^{2}(r-x^{p}s)^{2} - 6a_{11}a_{22}d[(r-x^{p}s)(f-x^{p}v) - \\
- psx^{p}(b^{p}-x^{p})]] + 0(\lambda^{4}),
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_{yz} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} = -\frac{\lambda\theta c y x^{m-3}(b^{p}-x^{p})^{q-3}}{6a_{22}^{3}} \Big\{ 6a_{22}^{2}x^{2}(b^{p}-x^{p})^{2}(r-x^{p}s) + \\
+ 6a_{12}a_{22}xy(b^{p}-x^{p})[(r-x^{p}s)(l_{1}-x^{p}l_{2}) + b^{p}r + x^{2p}s(1+2p) - \\
- x^{p}(1+p)(b^{p}s+r)] + y^{2}(4a_{12}^{2}-a_{11}a_{22})[(l_{1}-l_{2}x^{p}) \times \\
\times \Big((r-x^{p}s)(l-x^{p}u) - x^{p}(b^{p}-x^{p})sp\Big) - px^{p}(b^{p}-x^{p})(f_{1}-x^{p}v_{1})]\Big\} + \\
+ \frac{\lambda^{2}\theta x^{2m-3}(b^{p}-x^{p})^{2q-3}}{a_{22}^{3}} \Big\{ a_{22}^{2}d(b^{p}-x^{p})^{2}x^{2}[l - x^{p}(u+2p+2) + 2b^{p}] + \\
+ a_{22}a_{12}c^{2}y[(l-x^{p}u)(r-x^{p}s) + b^{p}r + sx^{2p}(1+2p) - \\
- x^{p}(1+p)(b^{p}s+r)]x(b^{p}-x^{p}) + y^{2}\Big(a_{12}^{2}c^{2}[[(r-sx^{p})(l-x^{p}u) - \\
- x^{p}(b^{p}-x^{p})sp](l-ux^{p}) - px^{p}(b^{p}-x^{p})(f_{1}-x^{p}v_{1}) + (r-x^{p}s)^{2} \times \\
\times (l-x^{p}u) - 2psx^{p}(r-x^{p}s)(b^{p}-x^{p})] + a_{11}a_{22}d[[(r-x^{p}s)(f-x^{p}v) - \\
- x^{p}(b^{p}-x^{p})ps](l-ux^{p}) - px^{p}(f_{2}-x^{p}v_{2})(b^{p}-x^{p})]\Big)\Big\} - \\
- \frac{\lambda^{3}\theta c x^{3m-3}(b^{p}-x^{p})^{3q-3}}{6a_{22}^{3}} \Big\{ 6a_{12}a_{22}xd[(r_{1}-x^{p}u_{1})(r-x^{p}s) + \\
+ b^{p}r + sx^{2p}(1+2p) - x^{p}(1+p)(b^{p}s+r)](b^{p}-x^{p}) + 2a_{12}^{2}gy \times \\
\times \Big| (r_{1}-x^{p}u_{1})\Big((r-x^{p}s)(l-x^{p}u) - x^{p}(b^{p}-x^{p})sp\Big) - \\
- px^{p}(f_{1}-x^{p}v_{1})(b^{p}-x^{p}) \Big| + 6a_{12}^{2}c^{2}y[(r-x^{p}s)^{2}(r_{1}-x^{p}u_{1}) -
\end{aligned}
$$

$$-2psx^p(r-x^ps)(b^p-x^p)]-a_{11}a_{22}gy\Big[(r_1-x^pu_1)\Big(((l-x^pu)(r-x^ps)-$$

$$-x^p(b^p-x^p)sp\Big)-px^p(f_1-x^pv_1)(b^p-x^p)\Big]-6a_{11}a_{22}y\Big|(r_1-x^pu_1)\times$$

$$\times\Big((r-x^ps)(f-x^pv)-psx^p(b^p-x^p)\Big)-px^p(f_2-x^pv_2)\times$$

$$\times(b^p-x^p)\Big|\Big\}+0(\lambda^3). \tag{3.2}$$

Здесь

$$l_1=(m-2)b^p,\quad l_2=m+pq-2-2p,$$

$$f_1=b^p(2m^2+2pq-2m-pq-mp),\quad f_2=b^pm(4m+4pq-1-p),$$

$$v_1=m+pq-1,\quad v_2=2(m+pq)(2m+2pq-1),$$

$$r_1=(3m-2)b^p,\quad u_1=3m-2+3pq-2p.$$

Наибольшее напряжение сдвига получается в одной из точек P_1 или P_3, в которых касательная параллельна оси профиля ox (фиг. 1). Следовательно, из (3.1) будем иметь

$$|\tau_{xz}|^{\max}=\left|\tau_{xz}\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=\lambda c_1\varphi(x_0)=h_1}}\right|=\Big|\frac{h_1+h_2}{a_{22}}+\frac{\Delta_2(m,p,q)}{a_{22}^3}\times$$

$$\times\Big\{\lambda\frac{(h_1-h_2)(4a_{12}^2-a_{11}a_{22})h_1^2}{b(h_1+h_2)}-\lambda^2\frac{8h_1[a_{12}^2(h_1-h_2)^2+a_{11}a_{22}h_1h_2]}{(h_1+h_2)^2}+$$

$$+\lambda^3\frac{4b(h_1-h_2)}{3(h_1+h_2)^3}[(2a_{12}^2+a_{11}a_{22})(h_1^2-h_1h_2+h_2^2)+6a_{11}a_{22}h_1h_2]\Big\}\Big|\theta, \tag{3.3}$$

где

$$\Delta_2(m,p,q)=\frac{m^{\frac{p-2}{p}}(m+pq)^{\frac{2+p}{p}}}{q}.$$

Как известно, относительный угол кручения определяется формулой

$$\theta=\frac{M_t}{C_t}, \tag{3.4}$$

где M_t-скручивающий момент.

Подставив значение θ из (3.4) в (3.3) и учитывая выражение (2.7), после несложных преобразований, для наибольшего напряжения окончательно получим

$$|\tau_{xz}|^{\max}=k_1\frac{M_t}{b(h_1+h_2)^2}\,\frac{1-\lambda^2E_1\Delta_2}{1-\lambda^2E_2k_2} \tag{3.5}$$

или

$$|\tau_{xz}|^{\max}=k_1\frac{M_t}{b(h_1+h_2)^2}\Big[1-\frac{\lambda^2(E_1\Delta_2-E_2k_2)}{1-\lambda^2E_2k_2}\Big]. \tag{3.5'}$$

Здесь

$$E_1=\frac{2}{3}\,\frac{a_{11}a_{22}(2h_1^3+5h_1^2h_2+4h_1h_2^2+h_2^3)-2a_{12}^2(h_1^3+4h_1^2h_2-4h_1h_2^2-h_2^3)}{a_{22}^2(h_1+h_2)^3},$$

$$E_2=\frac{(h_1-h_2)^2\,[12a_{12}^2h_1h_2-a_{11}a_{22}(h_1+h_2)^2]\,\delta_1}{a_{22}^2(h_1+h_2)^4}-$$

$$-\frac{4\,(h_1-h_2)^2\,[(h_1-h_2)^2\,a_{12}^2\,\delta_2+h_1h_2a_{11}a_{22}\delta_3]}{a_{22}^2\,(h_1+h_2)^4},$$

$$k_1=\frac{3pm^{\frac{3m}{p}}\,(pq)^{3q}}{(m+pq)^{\frac{3(m+pq)}{p}}\,B\left(\frac{3m+1}{p},\,3q+1\right)},$$

$$k_2=\frac{\Delta^2B\left(\frac{5m-1}{p},\,5q-1\right)}{B\left(\frac{3m+1}{p},\,3q+1\right)}.$$

Из формулы (3.5′) видно, что первое слагаемое наибольшего напряжения не зависит от упругих постоянных и имеет такой же вид, как и в соответствующем изотропном стержне [1] и в стержне, обладающем анизотропией первого случая Сен-Венана [11], а второе слагаемое показывает влияние неортотропности материала стержня.

В частном случае из (3.5) или (3.5′) находим, что для неортотропного призматического стержня удлиненного симметричного авиационного профиля максимальное касательное напряжение имеет вид

$$|\tau_{xz}|^{\max}=k_1\frac{M_t}{bH^2}\,\frac{1-\lambda^2\frac{a_{11}}{a_{22}}\Delta_2}{1+\lambda^2\frac{a_{11}}{a_{22}}\delta_3k_2} \tag{3.6}$$

или

$$|\tau_{xz}|^{\max}=k_1\frac{M_t}{bH^2}\left[1-\frac{\lambda^2\frac{a_{11}}{a_{22}}(\Delta_2+\delta_3k_2)}{1+\lambda^2\frac{a_{11}}{a_{22}}\delta_3k_2}\right], \tag{3.6′}$$

где $H=2h$ — высота профиля.

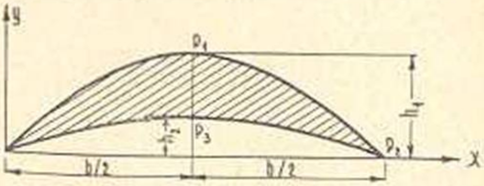
§ 4. Конкретные примеры

а) Кручение стержня с сечением в виде параболического серпа (фиг. 2). Для такого стержня имеем

$$\left.\begin{aligned}&m=p=q=1,\\ &a=4h_1,\ a_1=-4h_2,\ \Delta=4,\\ &\lambda=\frac{h_1-h_2}{2b},\qquad 0<\lambda<\frac{1}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

Внеся (4.1) в (1.7), для параболического серпа получим

$$
\left.
\begin{aligned}
y &= \lambda \frac{8h_1}{(h_1-h_2)\,b}\, x\,(b-x),\\
y &= \lambda \frac{8h_2}{(h_1-h_2)\,b}\, x\,(b-x).
\end{aligned}
\right\}
\tag{4.2}
$$



Фиг. 2.

Из соотношений (1.17) и (4.1) легко получить выражение функции напряжений для анизотропного стержня с поперечным сечением в виде параболического серпа

$$
\begin{aligned}
\Psi(x,y) = &-\frac{\theta y^2}{a_{22}} + \lambda \frac{\theta c y}{3a_{22}^3}\,[3a_{22}^2(b-x)\,x - 3a_{12}a_{22}y\,(b-2x) -\\
&- y^2(4a_{12}^2 - a_{11}a_{22})] + \lambda^2 \frac{\theta}{a_{22}^3}\,\{-a_{22}x\,(b-x)\,[da_{22}(b-x)\,x +\\
&+ ya_{12}c^2(b-2x)] + y^2(a_{11}a_{22}d - a_{12}^2c^2)\,(b^2-6bx+6x^2)\} +\\
&+ \lambda^3 \frac{\theta x\,(b-x)\,c}{3a_{22}^3}\Big\{3a_{12}a_{22}d\,(b-x)\,(b-2x)\,x -\\
&- y\Big[a_{12}^2\Big(3c^2b^2 + 2x\,(6c^2-g)\,(x-b)\Big) + a_{11}a_{22}\Big(3b^2d + (18d-g)\times\\
&\times x\,(x-b)\Big)\Big]\Big\} - \lambda^4 \frac{\theta\,(b-x)^2x^2d}{3a_{22}^3}\,\{a_{12}^2c^2(3b^2-8bx+8x^2) -\\
&- a_{11}a_{22}\,[3db^2 + x\,(c^2-18d)\,(b-x)]\} + \cdots,
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

где

$$
c = \frac{8\,(h_1+h_2)}{(h_1-h_2)\,b}, \qquad d = \frac{64h_1h_2}{(h_1-h_2)^2b^2}.
$$

Ниже приводятся значения некоторых величин, необходимых при определении жесткости кручения и максимального напряжения стержня.

$$
\left.
\begin{aligned}
&\delta_1 = -\frac{4}{9}, \quad \delta_2 = \frac{1}{9}, \quad \delta_3 = -\frac{1}{3}, \quad \Delta_2 = 8,\\
&k_1 = \frac{105}{16}, \quad k_2 = 16.
\end{aligned}
\right\}
\tag{4.4}
$$

Теперь, пользуясь формулой (2.7) и значениями (4.4), найдем величину жесткости кручения неортотропного призматического стержня сечением в виде параболического серпа

$$
\begin{aligned}
C_t = \frac{16}{105}\,\frac{(h_1-h_2)^3b}{a_{22}}\Big\{1 - \frac{16}{9}\,\frac{1}{a_{22}^2b^2(h_1-h_2)^2}\,[(h_1-h_2)^2(h_1^2-h_1h_2+h_2)\times\\
\times a_{11}a_{22} - (h_1+h_2)^2(14h_1h_2-h_1^2-h_2^2)\,a_{12}^2]\Big\}.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Для ортотропного стержня будем иметь

$$C_t = G_{13}\frac{16}{105}(h_1 - h_2)^3 b\left[1 - \frac{16}{9}\,\frac{h_1^2 - h_1h_2 - h_2^2}{b^2}\,\frac{G_{13}}{G_{23}}\right]. \tag{4.6}$$

Из выражения (3.5′) для максимального касательного напряжения неортотропного стержня сечением в виде параболического серпа получим

$$|\tau_{xz}|^{\max} = \frac{105}{16}\,\frac{M_t}{b(h_1 - h_2)^2}\left\{1 - \frac{\dfrac{4A_1}{9a_{22}^2(h_1 - h_2)^2 b^2}}{1 - \dfrac{16A_2}{9a_{22}^2(h_1 - h_2)^2 b^2}}\right\}, \tag{4.7}$$

где

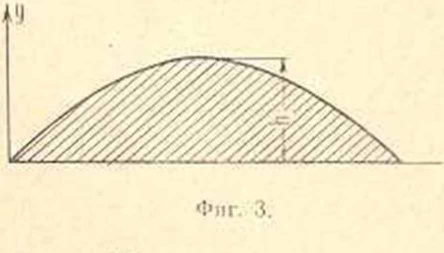
$$A_1 = a_{11}a_{12}(h_1 + h_2)(2h_1^3 - 31h_1^2h_2 + 28h_1h_2^2 + h_2^3) +$$
$$+ a_{12}^2(2h_2^4 - 10h_1^4 - 88h_1^2h_2^2 - 18h_1^3h_2 - 78h_1h_2^3),$$
$$A_2 = a_{11}a_{22}(h_1 - h_2)^2(5h_1h_2 + h_1^2 + h_2^2) +$$
$$+ a_{12}^2(h_1 + h_2)^2(10h_1h_2 + h_1^2 + h_2^2).$$

Для ортотропного стержня будем иметь

$$|\tau_{xz}|^{\max} =$$
$$= \frac{105}{16}\,\frac{M_t}{b(h_1 - h_2)^2}\left[1 - \frac{\dfrac{4(h_1 + h_2)(2h_1^3 - 31h_1^2h_2 + 28h_1h_2^2 + h_2^3)}{9(h_1 - h_2)^2 b^2}\,\dfrac{G_{13}}{G_{23}}}{1 - \dfrac{16(h_1 - h_2)^2(5h_1h_2 + h_1^2 + h_2^2)}{9(h_1 - h_2)^2 b^2}\,\dfrac{G_{13}}{G_{23}}}\right]. \tag{4.8}$$

б) Кручение стержня сечением в виде параболического сегмента (фиг. 3). Настоящая задача является частным случаем предыдущей. Приняв $h_1 = h$, $h_2 = 0$, будем иметь

$$\lambda = \frac{h}{2b}, \quad c = \frac{8}{b}, \quad d = 0. \tag{4.9}$$



Фиг. 3.

Учитывая (4.9), из (4.3), (4.5) и (4.7) находим

$$\Psi(x, y) = -\frac{\theta y^2}{a_{22}} +$$
$$+ \lambda\frac{8\theta y}{3a_{22}^3 b}[3a_{22}^2(b - x)x + 3a_{12}a_{22}y(b - 2x) - y^2(4a_{12}^2 - a_{11}a_{22})] -$$
$$- \lambda^2\frac{64a_{12}\theta y}{a_{22}^3 b^2}[a_{22}x(b - x)(b - 2x) + ya_{12}(b^2 - 6bx + 6x^2)] -$$
$$- \lambda^3\frac{512x\theta(b - x)y}{3a_{22}^3 b^3}\{a_{12}^2[3b^2 + 10x(x - b)] - a_{11}a_{22}x(x - b)\}, \tag{4.10}$$

$$C_t = \frac{16h^3 b}{105a_{22}}\left\{1 - \frac{16}{9}\,\frac{h^2}{b^2}\,\frac{a_{11}a_{22} + a_{12}^2}{a_{22}^2}\right\}, \tag{4.11}$$

$$|\tau_{xz}|^{max} = \frac{105}{16}\frac{M_t}{bh^2}\left[1 - \frac{\frac{8h^2}{9a_{22}^2 b^2}(a_{11}a_{22} - 5a_{12}^2)}{1 - \frac{16h^2}{9a_{22}^2 b^2}(a_{11}a_{22} + a_{12}^2)}\right]. \tag{4.12}$$

Для ортотропного стержня из (4.10) –(4.12) находим

$$\Psi(x, y) = -\frac{\vartheta y^2}{a_{22}} + \lambda\frac{8\vartheta y}{3a_{22}^2 b}\left[3a_{22}(b-x)x + y^2 a_{11}\right] +$$

$$+ \lambda^3\frac{512\vartheta(b-x)^2 x^2 y a_{11}}{3a_{22}^2 b^3},$$

$$C_t = \frac{16h^3 bG_{13}}{105}\left[1 - \frac{16}{9}\frac{h^2}{b^2}\frac{G_{13}}{G_{23}}\right],$$

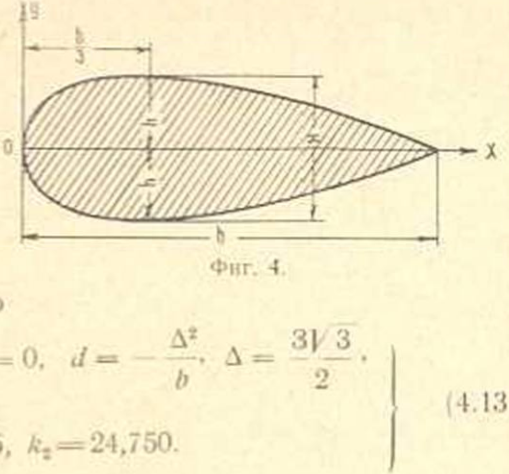
$$|\tau_{xz}|^{max} = \frac{105}{16}\frac{M_t}{bh^2}\left[1 - \frac{\frac{8}{9}\frac{h^2}{b^2}\frac{G_{13}}{G_{23}}}{1 - \frac{16}{9}\frac{h^2}{b^2}\frac{G_{13}}{G_{23}}}\right].$$

в) Кручение стержня сечением в виде полукубической параболы (фиг. 4). Пусть сечение авиационного профиля ограничено дугами полукубических парабол

$$\left(m = \frac{1}{2},\ p = q = 1\right)$$

$$y = \pm\lambda\frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{x}{b}}(b - x),$$

где $\lambda = \frac{h}{b}$.



Фиг. 4.

Вычисление показывает, что

$$\left.\begin{array}{l} c_1 = -c_2 = \dfrac{\Delta}{\sqrt{b}},\quad c = 0,\quad d = -\dfrac{\Delta^2}{b},\quad \Delta = \dfrac{3\sqrt{3}}{2},\\ \delta_3 = -\dfrac{3}{13},\quad k_1 = 6{,}175,\quad k_2 = 24{,}750. \end{array}\right\} \tag{4.13}$$

Имея в виду (4.13), из (2.8) для жесткости кручения находим*

$$C_t = 0{,}162\frac{H^3 b}{a_{22}}\left[1 - 1{,}428\frac{H^2}{b^2}\frac{a_{11}}{a_{22}}\right].$$

Максимальные напряжения возникают на контуре в самом широком месте сечения $\left(x = \frac{b}{3},\ y = \pm h\right)$

* Более точная формула жесткости кручения неортотропного стержня получена в работе [8], но там нет выражения максимального напряжения, которое здесь приводится.

$$|\tau_{xz}|^{\max} = 6{,}175 \left[1 - \frac{0{,}235 \dfrac{H^2}{b^2} \dfrac{a_{11}}{a_{22}}}{1 - 1{,}428 \dfrac{H^2}{b^2} \dfrac{a_{11}}{a_{22}}} \right] \frac{M_t}{bH^2}.$$

§ 5. О точности приближенных форvул жесткости кручения

Пользуясь найденным выражением (2.7), докажем, что для неортотропных стержней, поперечное сечение которых ограничено кривой (1.7′),

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{T}{J} = \frac{(h_1 + h_2)^3}{h_1^3 + h_2^3}, \tag{5.1}$$

где J — момент инерции относительно оси x, $T = C_t a_{22}$ — назовем приведенной геометрической жесткостью при кручении анизотропных стержней.

Имеем

$$J = \int_0^b \int_{\lambda c_2 \varphi}^{\lambda c_1 \varphi} y^2 dx dy = \frac{\lambda^3 (c_1^3 - c_2^3)}{3} \int_0^b x^{3m} (b^p - x^p)^{3q} dx$$

или учитывая (1.5), (2.2) и значения c_1 и c_2,

$$J = \frac{8\lambda^3 b^4 \Delta^3}{3p} \frac{h_1^3 + h_2^3}{(h_1 + h_2)^3} B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right). \tag{5.2}$$

Следовательно, при помощи (2.7) и (5.2) находим

$$T = \frac{(h_1 + h_2)^3}{h_1^3 + h_2^3} J + 0(\lambda^5), \tag{5.3}$$

откуда и вытекает соотношение (5.1).

Соотношение (5.1) или (5.3), для тонких анизотропных профилей, эквивалентно следующему утверждению

$$T \approx \frac{8\lambda^3 b^4 \Delta^3}{3p} B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right), \tag{5.4}$$

которое совпадает с формулой Гриффита [12]—Прескотта [13] для тонких изотропных профилей. Между прочим, формулу (5.4) можно получить иным путем, т. е. приближенно интегрируя уравнение мембранной аналогии для случая удлиненного поперечного сечения закручиваемой анизотропной призмы [14.7]. Точно такой же приближенный результат для жесткости кручения тонких изотропных и ортотропных стержней получен в работах [1, 15—18].

Из приближенной формулы (5.4) видно, что жесткость кручения для тонких анизотропных стержней совпадает с формулой для жесткости тонких изотропных и ортотропных стержней.

В частном случае, когда поперечное сечение представляет симметричную область, т. е. $h_1 = h_2$, из (5.3) получим выражение

$$T = 4J + 0(\lambda^5), \tag{5.5}$$

которое совпадает с результатом для изотропного симметричного стержня, полученным Д. Ю. Пановым [3].

Формулы жесткости кручения (2.7) или (5.4) получены для тонких стержней. Естественно возникает вопрос: для каких стержней эти приближенные формулы можно считать точными? Иначе говоря, какому условию должен удовлетворять параметр $\lambda = \frac{h_1 + h_2}{2b}$, чтобы выражение жесткости кручения неортотропного стержня (2.7) или (5.4) было бы точным?

С этой целью рассмотрим вопрос о точности приближенной формулы (2.7), когда в ней сохраняем один, два или более членов. Строго говоря, оценим погрешность, допускаемую нами при сохранении первых членов этой формулы.

Для этой цели напишем выражение приведенной геометрической жесткости кручения для неортотропного призматического стержня сечением в виде авиационного профиля

$$T = C_t a_{22} = \frac{2a_{22}}{\theta} \int_0^b \int_{\lambda c_2 \varphi}^{\lambda c_1 \varphi} \Psi(x, y)\, dxdy.$$

Внеся значение функции напряжений и учитывая выражения (1.10), (1.13), (1.16), из этой формулы находим

$$T = \frac{8\lambda^3 b^4 \Delta^3}{3p} B \left(\frac{3m+1}{p} \cdot 3q + 1 \right) + \zeta_n. \tag{5.6}$$

Здесь введены обозначения

$$\zeta_n = \frac{2a_{22}}{\theta} \iint\limits_{D_\lambda} \rho_n(x, y; \lambda)\, dxdy, \tag{5.7}$$

$$\rho_n(x, y; \lambda) = \Psi(x, y) - P_0\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) - \lambda P_1\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) -$$

$$- \lambda^2 P_2\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) - \lambda^3 P_3\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) - \cdots - \lambda^n P_n\left(x, \frac{y}{\lambda}\right), \tag{5.8}$$

а область D_λ отличается от области авиационного профиля D только тем, что все ординаты ограничивающих ее кривых уменьшены в отношении $1:\lambda$.

Составим выражение

$$R_n(x, y; \lambda) = a_{11} \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial x^2} - 2a_{12} \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial y^2}. \tag{5.9}$$

Подставив значение ρ_n из (5.8) в (5.9) и имея в виду уравнения (1.14), после некоторых элементарных преобразований получим [8]

$$|R_n(x, y; \lambda)| < \lambda^{n-1}\{(p_{n-1}+\lambda p_n)a_{11}+2\lambda a_{12}q_n\}, \tag{5.10}$$

где

$$p_{n-1}=\max_D\left|D^2_{xx}P_{n-1}\left(x, \frac{y}{\lambda}\right)\right|,$$

$$p_n=\max_D\left|D^2_{xx}P_n\left(x, \frac{y}{\lambda}\right)\right|,$$

$$q_n=\max_D\left|D^2_{xy}P(x, \eta)\right|.$$

Введем новую функцию следующим образом

$$\rho_n'(x, y; \lambda)=\frac{\theta}{\lambda^{n-1}\{(p_{n-1}+\lambda p_n)a_{11}+2\lambda a_{12}q_n\}}\rho_n(x, y; \lambda). \tag{5.11}$$

Составим

$$R_n'=a_{11}\frac{\partial^2\rho_n'}{\partial x^2}-2a_{12}\frac{\partial^2\rho_n'}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2\rho_n'}{\partial y^2}.$$

Очевидно, подобно (5.10), будем иметь

$$|R_n'(x, y; \lambda)|=\left|-\frac{\theta}{\lambda^{n-1}\{(p_{n-1}+\lambda p_n)a_{11}+2\lambda a_{12}q_n\}}\lambda^{n-1}\times\right.$$

$$\left.\times\left\{a_{11}\frac{\partial^2P_{n-1}}{\partial x^2}-2a_{12}\frac{\partial^2P_n}{\partial x\partial\eta}+\lambda a_{11}\frac{\partial^2P_n}{\partial x^2}\right\}\right|=\frac{\theta}{(p_{n-1}+\lambda p_n)a_{11}+2\lambda a_{12}q_n}\times$$

$$\times\left|a_{11}\frac{\partial^2P_{n-1}}{\partial x^2}-2a_{12}\frac{\partial^2P_n}{\partial x\partial\eta}+\lambda a_{11}\frac{\partial^2P_n}{\partial x^2}\right|\leqslant\frac{\theta}{(p_{n-1}+\lambda p_n)a_{11}+2\lambda a_{12}q_n}\times$$

$$\times\left\{\left|a_{11}\frac{\partial^2P_{n-1}}{\partial x^2}\right|+2\left|a_{12}\frac{\partial^2P_n}{\partial x\partial\eta}\right|+\lambda\left|a_{11}\frac{\partial^2P_n}{\partial x^2}\right|\right\}<$$

$$<\frac{\theta}{(p_{n-1}+\lambda p_n)a_{11}+2\lambda a_{12}q_n}\{a_{11}p_{n-1}+2\lambda a_{12}q_n+\lambda a_{11}p_n\}=\theta<2\theta. \tag{5.12}$$

Таким образом, условия леммы, которые сформулированы и доказаны в работе [8], удовлетворены. Следовательно,

$$|\rho_n'(x, y; \lambda)|<\Psi_1(x, y)$$

или, учитывая (5.11), будем иметь

$$|\rho_n|<\frac{\lambda^{n-1}[(p_{n-1}+\lambda p_n)a_{11}+2\lambda a_{12}q_n]}{\theta}\Psi_1(x, y). \tag{5.13}$$

Здесь $\Psi_1(x, y)$ — функция напряжений при кручении эллипса D^*

$$y^2-4\lambda^2x(b-x)=0,$$

который, легко видеть, охватывает область D, ограниченную кривой (1.7).

Функция напряжений для эллипса D^* имеет вид [8]

$$\Psi_1(x, y) = \frac{\theta b^2 \lambda^2}{a_{22} + 4\lambda^2 a_{11}} \left\{1 - \frac{y^2}{b^2\lambda^2} - \frac{(2x-b)^2}{b^2}\right\}. \tag{5.14}$$

Оценим выражения (5.7) при помощи (5.13) и (5.14).

$$|\zeta_n| = \frac{2a_{22}}{\theta} \left| \iint\limits_{D_\lambda} \rho_n(x, y; \lambda)\, dxdy \right| \leqslant \frac{2a_{22}}{\theta} \iint\limits_{D_\lambda} |\rho_n(x, y; \lambda)|\, dxdy <$$

$$< \frac{2a_{22}}{\theta} \iint\limits_{D^*} |\rho_n(x, y; \lambda)|\, dxdy < \frac{a_{22}\lambda^{n-1}\,[(p_{n-1} + \lambda p_n)\, a_{11} + 2\lambda a_{12} q_n]}{\theta}\, T^*, \tag{5.15}$$

где

$$T^* = \frac{2}{\theta} \iint\limits_{D^*} \Psi_1(x, y)\, dxdy = \frac{\pi\lambda^3 b^4}{2(a_{22} + 4\lambda^2 a_{11})}. \tag{5.16}$$

Таким образом, учитывая (5.16), будем иметь

$$|\zeta_n| < \frac{\lambda^{n+2}\pi b^4}{2} \frac{a_{22}\,[(p_{n-1} + \lambda p_n)\, a_{11} + 2\lambda a_{12} q_n]}{\theta\,(a_{22} + 4\lambda^2 a_{11})} \quad (n = 2, 4, \ldots). \tag{5.17}$$

Несколько увеличивая правую часть неравенства (5.17), находим

$$|\zeta_n| < \frac{\lambda^{n+2}\pi b^4}{2} \frac{[(p_{n-1} + \lambda p_n)\, a_{11} + 2\lambda a_{12} q_n]}{\theta}. \tag{5.18}$$

Чтобы оценить точность формулы приведенной геометрической жесткости кручения, вычислим относительную погрешность

$$|\varepsilon_n| = \left| \frac{T - T^{(n-1)}_{\text{прибл.}}}{T^{(n-1)}_{\text{прибл.}}} \right| = \frac{|\zeta_n|}{T^{(n-1)}_{\text{прибл.}}} < \frac{\lambda^{n+2}\pi b^4}{2T^{(n-1)}_{\text{прибл.}}} \frac{[(p_{n-1} + \lambda p_n)\, a_{11} + 2\lambda a_{12} q_n]}{\theta}. \tag{5.19}$$

Если мы хотим воспользоваться формулой (5.4), то относительная погрешность будет

$$\varepsilon_2 < \frac{\lambda^4 \pi b^4}{2T^{(1)}_{\text{прибл.}}} \frac{[(p_1 + \lambda p_2)\, a_{11} + 2\lambda a_{12} q_2]}{\theta},$$

или, подставив значения $T^{(1)}_{\text{прибл.}}$ из (5.4), получим

$$\varepsilon_2 < \frac{3\pi p\lambda}{16\Delta^3 B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)} \frac{[(p_1 + \lambda p_2)\, a_{11} + 2\lambda a_{12} q_2]}{\theta}. \tag{5.20}$$

Если при помощи (5.6) величину приведенной геометрической жесткости кручения анизотропного стержня желаем получить с точностью до 1%, то согласно (5.20) $\left(\text{учитывая, что } p_1 = \max\left\{\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}\right\} = 0\right)$ значения λ должны удовлетворять неравенству

$$\frac{3\pi p\lambda^2}{16\Delta^3 B\left(\frac{3m+1}{p},\ 3q+1\right)}\frac{a_{11}p_2+2a_{12}q_2}{\theta}<0{,}01,$$

откуда находим

$$\lambda<0{,}4\Delta\sqrt{\frac{\Delta\theta B\left(\frac{3m+1}{p},\ 3q+1\right)}{3\pi p\,(a_{11}p_2+2a_{12}q_2)}}. \tag{5.21}$$

Для наглядности рассмотрим численный пример. Пусть имеем $m=\frac{1}{2}$, $p=q=1$, т. е. сечение стержня ограничено дугами полукубической параболы (фиг. 4).

Вычисления показывают, что

$$p_2=\frac{27\theta}{a_{22}},\qquad q_2=0. \tag{5.22}$$

Тогда из (5.21) при помощи (5.22) находим

$$\frac{H}{b}<0{,}034\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \tag{5.23}$$

или

$$\frac{H}{b}<\frac{0{,}034}{\sqrt{G_*}}. \tag{5.23'}$$

Таким образом получаем следующий результат. Для жесткости кручения рассматриваемого авиационного профиля можно пользоваться практически точным выражением

$$C_t=0{,}162\frac{H^3b}{a_{22}}, \tag{5.24}$$

если только имеет место (5.23).

Ниже, в таблицах 1 и 2, приведены некоторые значения $\frac{H}{b}$, подсчитанные по неравенству (5.23) при разных значениях коэффициентов деформации.

Таблица 1

$\frac{G_{23}}{G_{13}}=$	1	0.5	0.4	0.25	0.10	0.05
$\frac{H}{b}<$	0.034	0.024	0.021	0.017	0.011	0.007

Таблица 2

$\frac{G_{23}}{G_{13}}=$	1	9	16	25	40	50
$\frac{H}{b}<$	0.034	0.102	0.136	0.170	0.215	0.240

Из таблицы 1 видно, что если приведенная физическая толщина $G_* = \frac{G_{13}}{G_{23}}$ возрастает, то приближенная формула (5.24) применима для очень тонких удлиненных профилей, а из таблицы 2 видно, что если G_* убывает, то формулу (5.24) можно считать точной для достаточно тонких профилей.

Если принять

$$T = \frac{8\lambda^3 b^4 \Delta^3}{3} \frac{B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}{p} + \frac{8\lambda^5 b^4 \Delta^5}{3a_{22}^2 p (h_1+h_2)^4} \times$$

$$\times \{(h_1-h_2)^2 [a_{11}a_{22}(h_1+h_2)^2 - 12a_{12}^2 h_1 h_2] \delta_1(m, p, q) + 4(h_1+h_2)^2 \times$$

$$\times [(h_1-h_2)^2 a_{12}^2 \delta_2(m, p, q) + h_1 h_2 a_{11} a_{22} \delta_3(m, p, q)]\} B\left(\frac{5m-1}{p}, 5q-1\right), \tag{5.25}$$

то относительная погрешность, согласно (5.19), будет

$$\varepsilon_4 < \frac{3\pi p \lambda^3}{16\theta \Delta^3 B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)} \frac{(p_3+\lambda p_4) a_{11} + 2\lambda a_{12} q_4}{1 + \frac{\lambda^2 \Delta^2 A_3}{a_{22}^2 (h_1+h_2)^4} \frac{B\left(\frac{5m-1}{p}, 5q-1\right)}{B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}},$$

где

$$A_3 = (h_1-h_2)^2 [a_{11}a_{22}(h_1+h_2)^2 - 12a_{12}^2 h_1 h_2] \delta_1 +$$

$$+ 4(h_1+h_2)^2 [(h_1-h_2)^2 a_{12}^2 \delta_2 + h_1 h_2 a_{11} a_{22} \delta_3],$$

откуда, потребовав, чтобы $\varepsilon_4 < 0{,}01$, получим, что значения λ удовлетворяют неравенству

$$\lambda^4 + A\lambda^3 + B\lambda^2 + C < 0, \tag{5.26}$$

где

$$A = \frac{p_3 a_{11}}{p_4 a_{11} + 2a_{12} q_4},$$

$$B = -\frac{0{,}16\Delta^5\theta B\left(\frac{5m-1}{p}, 5q-1\right)}{3\pi p a_{22}^2 (h_1+h_2)^4} \times$$

$$\times \left\{\frac{(h_1-h_2)^2 [a_{11}a_{22}(h_1+h_2)^2 - 12a_{12}^2 h_1 h_2] \delta_1}{p_4 a_{11} + 2a_{12} q_4} + \right.$$

$$\left. + \frac{4(h_1+h_2)^2 [(h_1-h_2)^2 a_{12}^2 \delta_2 + h_1 h_2 a_{11} a_{22} \delta_3]}{p_4 a_{11} + 2a_{12} q_4}\right\},$$

$$C = -\frac{0{,}16\Delta^3\theta}{3\pi p (p_4 a_{11} + 2a_{12} q_4)} B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right). \tag{5.27}$$

Для иллюстрации полученного результата опять рассмотрим численный пример для того же авиационного профиля $\left(m=\frac{1}{2},\ p=q=1\right)$. Вычисления показывают, что

$$p_3=q_3=0,$$

$$p_4=637{,}875\frac{a_{11}b}{a_{22}^2},\quad q_4=40{,}5\frac{a_{11}b}{a_{22}^2}.$$

Тогда из (5.27) находим

$$A=0,\quad B=\frac{738\cdot 10^{-7}\cdot\frac{a_{22}}{a_{11}}}{1+0{,}129\cdot\frac{a_{12}}{a_{11}}},\quad C=-\frac{12922\cdot 10^{-9}\frac{a_{22}^2}{a_{11}^2}}{1+0{,}129\frac{a_{12}}{a_{11}}}.$$

Учитывая это, из (5.26) находим

$$\frac{H}{b}<2\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}+0{,}129a_{12}}}\cdot\sqrt{-0{,}00004+0{,}00359\cdot\sqrt{1+0{,}129\cdot\frac{a_{12}}{a_{11}}}}$$

или, перейдя к общепринятым обозначениям, получим

$$\frac{H}{b}<0{,}0126\cdot\frac{\sqrt{89{,}75\cdot\beta-1}}{\beta\sqrt{G_*}},\tag{5.28}$$

где

$$\beta=\sqrt{1+0{,}129\cdot\mu_{zx,\,zy}},\qquad G_*=\frac{G_{13}}{G_{23}},$$

а $\mu_{zx,zy}$ — коэффициент Ченцова [19—21], который характеризует сдвиг в плоскости, параллельной zoy, вызванный напряжением τ_{xz}.

Для рассматриваемого стержня из (5.28) будем иметь

$$\frac{H}{b}<\frac{0{,}118}{\sqrt{G_*}},\tag{5.29}$$

так как $\beta=1$.

Таким образом, если имеет место (5.28) для неортотропного стержня или (5.29) для ортотропного стержня, то

$$C_t=0{,}162\cdot\frac{H^3b}{a_{22}}\left[1-1{,}428\cdot\frac{H^2}{b^2}\frac{a_{11}}{a_{22}}\right]\tag{5.30}$$

можно считать точной формулой для жесткости кручения авиационного профиля (ограниченного полукубической параболой).

В таблицах 3 и 4 приведены некоторые значения $\frac{H}{b}$, подсчитанные по неравенству (5.29), при разных значениях коэффициента деформации, а в таблицах 5 и 6 приведены значения $\frac{H}{b}$, вычисленные по (5.28).

$a_{12}=0$ *Таблица 3*

$\frac{G_{23}}{G_{13}}=$	1	9	16	25	40	50
$\frac{H}{b}<$	0.118	0.354	0.472	0.590	0.745	0.834

$a_{12}=0$ *Таблица 4*

$\frac{G_{23}}{G_{13}}=$	1	0,50	0,40	0,25	0,10	0,05
$\frac{H}{b}<$	0.118	0,083	0.074	0.059	0.037	0,026

$\mu_{zx,zy}=-0,4$ *Таблица 5*

$\frac{G_{23}}{G_{13}}=$	1	9	16	25	40	50
$\frac{H}{b}<$	0.120	0.361	0.481	0.601	0.760	0.850

$\mu_{zx,zy}=-0,4$ *Таблица 6*

$\frac{G_{23}}{G_{13}}=$	1	0,50	0,40	0,25	0,10	0,05
$\frac{H}{b}<$	0,120	0,085	0,076	0,060	0,038	0,017

Из этих таблиц видно, для каких анизотропных профилей верно выражение (5.30).

Ереванский государственный университет

Поступила 22 XI 1960

Վ. Ս. Սարգսյան

ԵՐԿԱՐԱՑՎԱԾ ԱՎԻԱՑԻՈՆ ՊՐՈՖԻԼՆԵՐՈՎ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՔՆԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՊՐԻԶՄԱՅԱՁԵՎ ՁՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատության մեջ դիտարկված է երկարացված ընդհանուր տեսքի ավիացիոն պրոֆիլներով լայնական հատվածքներ ունեցող անիզոտրոպ (ոչ օրթոտրոպ) պրիզմայաձև ձողերի ոլորման խնդիրը։

Լուծումը ներկայացված է շարքով ըստ փոքր λ պարամետրի։ Ստացված են ամենաընդհանուր դեպքում լարումների ֆունկցիայի, շոշափող լարումների, մաքսիմում լարումների և ոլորման կոշտության համար արտահայտությունները։

Ուսումնասիրված է ոլորման կոշտության մոտավոր բանաձևի ճշգրտության հարցը։ Ստացված արդյունքների համար կազմված են աղյուսակներ։

Դիտարկված են մի քանի կոնկրետ խնդիրներ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лейбензон Л. С.* Собрание трудов. Том 1, Изд. АН СССР, М., 1951.
2. *Duncan W. T.* Torsion and Flexure of Cylinders and Tubes. „R. & M.", № 1444, 1932.
3. *Панов Д. Ю.* Об одном методе решения краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных. „ДАН СССР, новая серия", **3** (VIII), № 12 (62), 1935, 63—66.
4. *Панов Д. Ю.* Решение краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных для длинных и узких областей. „Изв. АН СССР, серия математическая", 1937.
5. *Икуи.* Кручение стержней, имеющих авиационные профили „Trans. Japan. Soc. Mech. Engrs", **20**, №95, 1954, 462—465.
6. *Ванторин В. Д.* О кручении анизотропной призмы, сечение которой ограничено кривой $y^2=k^2x(1-x)^2$. „ПММ", **3**, вып. 3, 1939.
7. *Локшин А. Ш.* К кручению анизотропных призм. „Записки Днепропетровского института народного образования", 1927.
8. *Саркисян В. С.* Кручение анизотропных призматических стержней с удлиненным профилем. „Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук" **12**, № 2, 1959.
9. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. Госиздат технико-теоретической литературы, М.—Л., 1950.
10. *Янке Е.* и *Эмиде Ф.* Таблицы функций с формулами и кривыми. ОГИЗ, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
11. *Ляв А.* Математическая теория упругости. ОНТИ НКТП СССР, М.—Л., 1935.
12. *Griffith.* Preliminary Report on the twisting of Propeller Blades. „R. & M.", № 454, 1918.
13. *Prescott I.* Applied Elasticity, 1924.
14. *Olszak W.* Uogólnienie analogii membranowej do zagadnien ukladow anizotropowych., „Arch. mech. stosowanej", 1953, **5**, № 1, 89—106.
15. *Лехницкий С. Г.* Кручение многослойного прямоугольного стержня. „Инженерный сборник", **23**, 1956.
16. *Саркисян В. С.* Кручение многослойных призматических стержней прямоугольного поперечного сечения с учетом линейной ползучести. „Известя АН АрмССР, серя физ.-мат., наук", **12**, № 4, 1959.
17. *Леонов М. Я.* и *Панасюк В. В.* О приближенном определении жесткости при кручении. „Научные записки ин-та машиновед. и автоматики АН УССР", 5, 1956, 46—50.
18. *Martin A. I.* On a formula for the torsional rigidity of thin—symmetrical—sections. „I. Math. and Phys", **36**, № 1, 1957, 10—25.
19. *Ченцов Н. Г.* Исследование фанеры, как ортотропной пластинки. „Технические заметки ЦАГИ", № 91, 1936.
20. *Рабинович А. Л.* Об упругих постоянных и прочности анизотропных материалов. „Труды ЦАГИ", № 582, 1946.
21. *Митинский А. Н.* Упругие постоянные древесины, как ортотропного материала. „Труды Лесотехнической академии им. С. М. Кирова", № 63, 1948.
22. *Янпольский А. Р.* Расчет крутильной жесткости анизотропного стержня. „Труды МВМИ", вып. 11, 1955.