

М. М. Манукян

Установившаяся ползучесть скручиваемого конического стержня

В. В. Соколовским [1] получено точное решение задачи о пластическом кручении конического стержня при степенном законе упрочнения материала, когда боковая поверхность стержня свободна от внешних усилий.

В настоящей заметке дается точное решение задачи об установившейся ползучести скручиваемого конического стержня, когда на боковой поверхности стержня приложена нагрузка по степенному закону, а основание испытывает действие крутящего момента.

При решении этой задачи в качестве физической гипотезы принимаем степенной закон связи между скоростью деформации ползучести и напряжением [2].

§ 1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим задачу о кручении стержней переменного диаметра, находящихся в условиях установившейся ползучести.

Пусть имеем круглый вал переменного диаметра, нижнее сечение которого закреплено, а верхнее — испытывает действие момента M . Предположим, что момент M направлен параллельно оси стержня. Направим ось z цилиндрических координат $r\theta z$ по оси стержня, а плоскость $z = 0$ совместим с нижним сечением стержня.

Положим, как и при кручении упругих стержней, что компоненты напряжений и скорости деформаций, за исключением $\tau_{r\theta}$, $\tau_{\theta z}$, $\dot{\gamma}_{r\theta}$ и $\dot{\gamma}_{\theta z}$, равны нулю, т. е.

$$\begin{aligned}\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{rz} &= 0, \\ \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \varepsilon_z = \dot{\gamma}_{rz} &= 0.\end{aligned}\tag{1.1}$$

В силу теории установившейся ползучести, компоненты напряжения $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{\theta z}$ выражаются через компоненты скорости деформации следующими соотношениями

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_{r\theta} &= f(T) \tau_{r\theta}, \\ \dot{\gamma}_{\theta z} &= f(T) \tau_{\theta z}.\end{aligned}\tag{1.2}$$

$$T^2 = \tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2, \quad (1.3)$$

$$\Gamma^2 = \gamma_{r\theta}^2 + \gamma_{\theta z}^2,$$

где T и Γ — соответственно интенсивность касательных напряжений и скорости сдвига.

Здесь предположено, что материал скручиваемого стержня следует законам теории установившейся ползучести в наиболее общей форме, а именно: интенсивность скорости деформации Γ является некоторой функцией интенсивности касательных напряжений T .

$$\Gamma = f(T)T, \quad T = f^*(\Gamma)\Gamma, \quad (1.4)$$

где $f(T)$ или $f^*(\Gamma)$ — некоторая функция, характеризующая материал стержня.

В данном случае уравнение равновесия в цилиндрических координатах примет вид

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial z}(r^2 \tau_{\theta z}) = 0 \quad (1.5)$$

и будет тождественно удовлетворено, если, как обычно, положить

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \tau_{\theta z} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad (1.6)$$

где функция напряжений Φ зависит от r и z .

Уравнение неразрывности деформаций будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \gamma_{\theta z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \gamma_{r\theta} \right) = 0. \quad (1.7)$$

Подставляя выражения $\gamma_{\theta z}$ и $\gamma_{r\theta}$ из соотношения (1.2) в (1.7) и пользуясь (1.6), получим дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция напряжений

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r^3} f(T) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r^3} f(T) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] = 0. \quad (1.8)$$

Пусть между интенсивностями касательных напряжений и скорости деформаций существует степенной закон зависимости, т. е.

$$T = K \Gamma^\mu, \quad (1.9)$$

где K, μ — числовые параметры, определяемые из опыта, причем $0 < \mu < 1$.

Тогда основные уравнения, связывающие компоненты касательных напряжений и скорости сдвига принимают вид

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\Gamma}{T} \tau_{r\theta}, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{\Gamma}{T} \tau_{\theta z}. \quad (1.10)$$

Внося (1.10) в (1.7) и пользуясь соотношениями (1.3), (1.6) и (1.9), найдем

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r^{\frac{2+\mu}{\mu}}} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1-\mu}{2\mu}} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{r^{\frac{2+\mu}{\mu}}} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1-\mu}{2\mu}} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\} = 0. \quad (1.11)$$

Пусть боковая поверхность стержня находится под действием внешней нагрузки, закон распределения которой определяется следующей формулой

$$\tau_{\theta l} + \tau_{\theta z} m = p[r, z(r)], \quad (1.12)$$

где l, m — направляющие косинусы внешней нормали к контуру, а p — проекция полного касательного напряжения на нормаль к контуру осевого сечения вала.

На оси силового вала напряжения равны нулю. Поэтому функция на оси z должна быть постоянной. Не нарушая общности решения, можно принять, что на оси вала

$$\Phi(0, z) = 0. \quad (1.13)$$

Таким образом, решение задачи установившейся ползучести скручиваемого вала переменного диаметра, по боковой поверхности которого приложены внешние силы, приводится к решению дифференциального уравнения (1.11) с условиями (1.12) и (1.13).

§ 2. Кручение конического стержня

Рассмотрим задачу о кручении конического стержня с углом раствора 2γ . Направим ось z цилиндрических координат $r\theta z$ по оси конического стержня, а центр координат поместим в вершине конуса.

Пусть боковая поверхность конуса нагружена по степенному закону, т. е.

$$\tau_{\theta z} m = ar^{\mu}, \quad (2.1)$$

где

$$a = -\frac{M}{2\pi} \frac{3+\mu}{R^{3+\mu}} \sin \gamma, \quad (2.2)$$

R — радиус основания.

Ищем решение уравнения (1.11) в виде

$$\Phi = \Phi(r). \quad (2.3)$$

Тогда (1.11) примет следующий вид

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^{\frac{2+\mu}{\mu}}} \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^{\frac{1}{\mu}} \right] = 0. \quad (2.4)$$

Интегрируя (2.4) и пользуясь условием (1.13), получим

$$\Phi = \frac{C}{3 + \mu} r^{3+\mu}, \quad (2.5)$$

где C — постоянная интегрирования.

Крутящий момент M выражается формулой

$$M = 2\pi \int_0^R r^2 \tau_{\theta z} dr. \quad (2.6)$$

Подставляя значение Φ из (2.5) в (2.6) и пользуясь (1.6), найдем

$$C = \frac{M}{2\pi} \frac{3 + \mu}{R^{1+\mu}}. \quad (2.7)$$

Тогда окончательно для функции напряжений получим

$$\Phi = \frac{M}{2\pi} \left(\frac{r}{R} \right)^{3+\mu}. \quad (2.8)$$

Нетрудно убедиться, что решение (2.8) удовлетворяет контурному условию (2.1).

Подставляя значение Φ из (2.8) в (1.6), получим выражения компонентов касательных напряжений

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= 0, \\ \tau_{\theta z} &= \frac{M}{2\pi} \frac{3 + \mu}{R^{3+\mu}} r^{\mu}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Институт математики и механики АН Армянской ССР
Ереванский государственный университет

Поступила 17 VI 1960

Մ. Մ. Մանուկյան

ՈՒՈՐՎՈՂ ԿՈՆՍԿԱՆ ՋՈՂԻ ՀԱՍՏԱՏՎԱԾ ՍՈՂՔԸ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում արվում է ոլորող կոնական ձողի հաստատված սողքի խնդրի ճշգրիտ լուծումը, երբ ձողի մակերևույթի վրա կիրառված է բևռ րատաստիճանային օրենքի, իսկ հիմքը ենթարկված է ոլորող մոմենտի ազդեցությանը:

Այս խնդրի լուծման ժամանակ որպես ֆիզիկական հիպոթեզ ընդունվում է, որ սողքի ղեֆորմացիայի արադուկան և լարումների միջև գոյություն ունի աստիճանային օրենք:

Ստացված են լարումների ֆունկցիայի և շոշափող լարումների կոմպոնենտների արաճաբադուկաները վերջավոր տեսքով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Соколовский В. В., Теория пластичности. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
2. Пател С., Венкатрман В. и Ходж Ф. Кручение цилиндрических и призматических стержней при наличии установившейся ползучести. „Механика, периодический сборник переводов иностранных статей“, № 6, 1958, стр. 103—113.