

М. А. Алоян

## О динамической устойчивости параболической арки переменного поперечного сечения

Статической устойчивости и свободным колебаниям параболических арок посвящено много работ как отечественных, так и зарубежных исследователей.

Сравнительно мало исследованы задачи о динамической устойчивости параболических арок. Насколько нам известно, единственной работой, посвященной решению этой задачи для пологих арок, является работа Н. Г. Бондаря [5], однако его решение содержит ошибки [2, 3].

В настоящей статье рассматривается динамическая устойчивость двухшарнирных и бесшарнирных параболических арок переменного сечения любого подъема, нагруженных вертикальной периодической нагрузкой, равномерно распределенной вдоль пролета арки.

Решение задачи дается применением приближенного метода Бубнова-Галеркина.

### § 1. Вывод основного дифференциального уравнения задачи и его решение

Рассмотрим тонкий, упругий криволинейный стержень (фиг. 1), ось которого и все приложенные к нему силы лежат в одной и той же плоскости  $хоу$ . Рассмотрим перемещения точек оси стержня в плоскости  $хоу$ . Обозначим через  $u$  и  $v$  проекции перемещения соответственно на оси  $x$  и  $y$ .

Координаты точек оси стержня после деформации будут

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x + u, \\ y_1 &= y + v, \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

где  $y = f(x)$  — уравнение осевой линии недеформированного криволинейного стержня,  $x$  — абсцисса точки.

Рассмотрим такие отклонения от первоначальной недеформированной формы равновесия, при которых удлинение осевой линии стержня было бы малой величиной второго порядка. Это условие дает следующую зависимость между перемещениями  $u$  и  $v$

$$u' = -y'v', \quad (1.2)$$

полученную Л. С. Гильманом в работе [6]. В этой же работе дано изменение кривизны осевой линии криволинейного стержня

$$\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} = \frac{v''}{V1+y'^2} \quad (1.3)$$

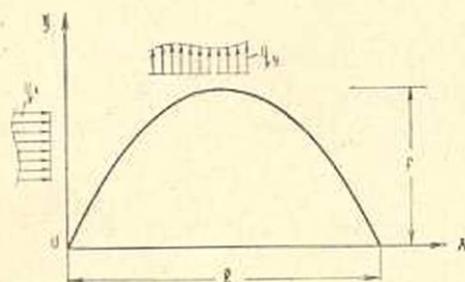
и условие, выражающее отсутствие поворота какого либо сечения

$$v' = 0, \quad (1.4)$$

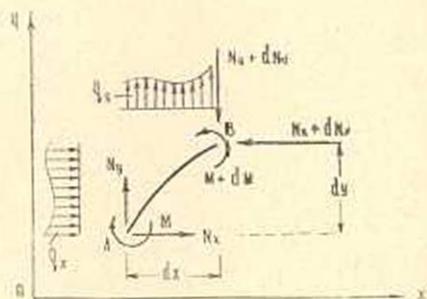
где  $\rho$  — радиус кривизны оси стержня в недеформированном состоянии,  $\rho_1$  — радиус кривизны оси стержня после деформации.

Выделим бесконечно малый элемент  $AB$  дуги стержня (фиг. 2) и составим уравнения его равновесия в декартовой системе координат. Отбрасывая малые величины высших порядков, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_x}{dx} - y'q_x &= 0, \\ \frac{dN_y}{dx} - q_y &= 0, \\ \frac{dM}{dx} - N_y + y'N_x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Здесь  $N_x$  и  $N_y$  — проекции главного вектора внутренних сил в сечении  $A$  соответственно на оси  $x$  и  $y$ ,  $M$  — изгибающий момент,  $q_x$  и  $q_y$  — проекции внешней нагрузки соответственно на оси  $x$  и  $y$ .

Если ось стержня совпадает с веревочной кривой данной нагрузки (мы в дальнейшем будем рассматривать именно такие стержни), то стержень будет испытывать только сжатие или растяжение, но не изгиб. Тогда во всех сечениях изгибающий момент  $M = 0$  и уравнения равновесия для такого стержня примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_x^0}{dx} - y'q_x &= 0, \\ \frac{dN_y^0}{dx} - q_y &= 0, \\ -N_y^0 + y'N_x^0 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

где  $N_x^0$  и  $N_y^0$  — соответственно значения  $N_x$  и  $N_y$  в безмоментном состоянии равновесия.

Так например, если  $q_x = 0$ ,  $q_y = -q = \text{const}$ , из (1.6) получаем  $N_x^0 = \frac{ql^2}{8f}$ ,  $N_y^0 = \frac{1}{2}ql - qx$  ( $l$  — расстояние между концевыми сечениями по горизонтали), а осевая линия — квадратная парабола.

Предположим, что внешняя нагрузка  $q(x, t)$  есть некоторая периодическая функция времени  $t$ . Тогда невозмущенное безмоментное напряженное состояние можно определять из системы уравнений (1.6), которая примет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} N_x^0(x, t) - y' q_x(x, t) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} N_y^0(x, t) - q_y(x, t) &= 0, \\ -N_y^0(x, t) + y' N_x^0(x, t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Это будет верно, если пренебречь силами инерции продольных колебаний (считаем, что стержень находится вне резонанса продольных колебаний).

Пусть теперь какой то внешний импульс отклонил стержень от его первоначального недеформированного состояния и заставил колебаться около этого состояния. Тогда во всех сечениях появятся изгибающие моменты, а  $N_x^0(x, t)$  и  $N_y^0(x, t)$  получат малые приращения. Приращения получат также координаты точек оси, которые могут быть определены из (1.1).

Уравнение изгибных колебаний стержня можно получить из уравнений равновесия (1.5) воспользовавшись методом кинестатики. Для этого, кроме действующих на стержень сил следует учесть еще и силы инерции, вызванные поперечными смещениями точек оси стержня. Влияниями продольных сил инерции, а также сил инерции, связанных с вращением поперечных сечений относительно своих главных осей, будем пренебрегать.

После учета всех сделанных выше замечаний, система уравнений (1.5) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} (N_x^0 + \delta N_x) - (q_x + p_x) y_1' &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} (N_y^0 + \delta N_y) - (q_y + p_y) &= 0, \\ \frac{\partial M}{\partial x_1} - (N_y^0 + \delta N_y) + (N_x^0 + \delta N_x) y_1' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

где  $\delta N_x$  и  $\delta N_y$  — весьма малые приращения  $N_x$  и  $N_y$ .

$$p_x = -m \frac{V \sqrt{1 + y'^2}}{y'} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad p_y = -m V \sqrt{1 + y'^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (1.9)$$

$m$  — масса единицы длины стержня.

Имея в виду (1.1), получим

$$y'_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}, \quad \frac{\partial M}{\partial x_1} = \frac{\frac{\partial M}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} \quad (1.10)$$

Подставляя (1.10) в (1.8), учитывая (1.7) и отбрасывая малые величины высших порядков, система уравнений (1.8) приводится к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \delta N_x}{\partial x} - q_x \frac{\partial v}{\partial x} - y' p_x &= 0, \\ \frac{\partial \delta N_y}{\partial x} - q_y \frac{\partial u}{\partial x} - p_y &= 0, \\ \frac{\partial M}{\partial x} + N_x^0 (1 + y'^2) \frac{\partial v}{\partial x} - \delta N_y + y' \delta N_x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Исключив из (1.11)  $\delta N_x$  и  $\delta N_y$ , подставив значения  $p_x$  и  $p_y$  из (1.9) и значение изгибающего момента

$$M = B(x) \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} \right) = \frac{B(x)}{V \sqrt{1 + y'^2}} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (1.12)$$

получим следующее уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{B(x)}{V \sqrt{1 + y'^2}} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ N_x^0 (1 + y'^2) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \left( q_x y' \frac{\partial v}{\partial x} - q_y \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m \sqrt{1 + y'^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v - y'u) + y'' \delta N_x = 0, \quad (1.13)$$

где  $B(x)$  — жесткость изгиба в плоскости кривизны стержня.

Уравнение (1.13) и есть дифференциальное уравнение динамической устойчивости криволинейного стержня, очерченного по веревочной кривой данной нагрузки. При  $y=0$  (1.13) принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( B(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( N_x^0 \frac{\partial v}{\partial x} \right) + m(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

и представляет известное дифференциальное уравнение динамической устойчивости прямолинейного стержня.

Если  $q_x=0$ ,  $q_y=-q(t)$  (случай неповорачивающихся сил), то из (1.7) будем иметь

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x) \quad \text{и} \quad N_x^0 = \frac{l^2}{8f} q(t). \quad (1.14)$$

В этом случае (1.13) принимает следующий вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{B(x)}{V \sqrt{1 + y'^2}} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + q(t) \frac{\partial}{\partial x} \left[ u + \frac{l^2}{8f} (1 + y'^2) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + m(x) \sqrt{1 + y'^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v - y'u) = 0 \quad (1.15)$$

и представляет собой дифференциальное уравнение динамической устойчивости параболической арки нагруженной периодической, равномерно распределенной вдоль пролета вертикальной нагрузкой  $q(t)$ . Весьма малая величина  $y'' \delta N_x$  в (1.15) не учтена. В (1.14)  $f$  — стрела подъема,  $l$  — пролет арки.

Решение (1.15) ищем в виде

$$\left. \begin{aligned} v(x, t) &= V(x) T(t), \\ u(x, t) &= U(x) T(t). \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Нетрудно убедиться что точное разделение переменных подстановкой (1.16) невозможно. Поэтому задачу приходится решать приближенными методами, среди которых наиболее удобным является метод Бубнова-Галеркина.

Пользуясь этим методом (переменные разделяются приближенно [7]), для функции  $T(t)$  получаем следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 \left[ 1 - \frac{q(t)}{q_{kp}} \right] T(t) = 0, \quad (1.17)$$

где

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l \left[ \frac{d^2}{dx^2} \left[ \frac{B(x)}{V \sqrt{1+y'^2}} \cdot \frac{d^2 V}{dx^2} \right] \right] V dx}{\int_0^l m(x) V \sqrt{1+y'^2} (V - y'U) V dx} \quad (1.18)$$

есть приближенное значение квадрата частоты свободных плоских колебаний ненагруженной параболической арки, а

$$q_{kp} = \frac{\int_0^l \left[ \frac{d^2}{dx^2} \left[ \frac{B(x)}{V \sqrt{1+y'^2}} \cdot \frac{d^2 V}{dx^2} \right] \right] V dx}{\int_0^l \left[ \frac{d}{dx} \left[ U + \frac{l^2}{8f} (1+y'^2) \frac{dV}{dx} \right] \right] V dx} \quad (1.19)$$

есть приближенное значение равномерно распределенной вдоль пролета критической нагрузки.

Если  $q(t) = q_1 + q_0 \cos pt$ , то уравнение (1.17) приводится к известному уравнению Матье

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega_q^2 (1 - \mu \cos pt) T(t) = 0, \quad (1.17^*)$$

где

$$\omega_q^2 = \omega^2 \left( 1 - \frac{q_1}{q_{kp}} \right) \quad (1.20)$$

— квадрат частоты свободных плоских колебаний параболической арки нагруженной постоянной составляющей силы  $q(t)$ , а

$$\mu = \frac{q_0}{q_{кр} - q_1} \quad (1.21)$$

— коэффициент пульсации.

Известно, что при определенных соотношениях между коэффициентами  $\omega_q$  и  $\mu$  решение (1.17\*) —  $T(t)$  неограниченно возрастает. Тогда, согласно (1.16), неограниченно возрастут и перемещения. Поэтому первоначальная параболическая форма арки станет динамически неустойчивой. Совокупность всех тех точек в плоскости параметров  $\left(\mu, \frac{2\omega_q}{p}\right)$ , для которых  $T(t)$  неограниченно возрастает, образует области динамической неустойчивости, наличие которых характерно для параметрического резонанса. Практически наиболее опасной является первая область динамической неустойчивости, границы которой определяются в [1]

$$1 - \frac{1}{2}\mu + \frac{7}{32}\mu^2 - \frac{55}{512}\mu^3 + \dots < \frac{4\omega_q^2}{p^2} < 1 + \frac{1}{2}\mu + \frac{7}{32}\mu^2 + \frac{55}{512}\mu^3 + \dots \quad (1.22)$$

В общем случае изменения внешней нагрузки по закону  $q(t) = q_1 + q_0\Phi(t)$ , где  $\Phi(t) = \Phi(t + \tau)$  — периодическая функция с периодом  $\tau$ , уравнение (1.17) приводится к уравнению Хилла

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega_q^2 [1 - \mu\Phi(t)] T(t) = 0.$$

В этом случае уравнение можно решить методом разложения  $T(t)$  по малому параметру  $\mu$ . Условие отсутствия „вековых“ членов в решении  $T(t)$ , т. е. требование периодичности решений, дает границы областей динамической неустойчивости.

Для определения областей динамической неустойчивости сначала необходимо в каждом частном случае определить  $\omega_q^2$  и  $\mu$  из (1.18) — (1.21).

Перейдем к определению этих коэффициентов.

## § 2. Двухшарнирная параболическая арка переменного поперечного сечения

Граничные условия двухшарнирной арки имеют вид

$$u = v = M = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad \text{и } x = l. \quad (2.1)$$

Принимая во внимание (1.12) и (1.16) перепишем условия (2.1) в виде

$$U = V = V'' = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad \text{и } x = l. \quad (2.2)$$

Здесь и в дальнейшем будем рассматривать кососимметричную форму отклонения арки от ее первоначального недеформированного

состояния. Как показывают вычисления, эта форма хорошо аппроксимируется функцией [6]

$$V(x) = a \sin \frac{2\pi}{l} x, \quad (2.3)$$

удовлетворяющей (2.2).

С учетом (1.16) условие (1.2) примет вид

$$U'(x) = -y' V'(x). \quad (2.4)$$

Подставляя значения  $y'$  и  $V'(x)$  соответственно из (1.14) и (2.3) в (2.4), интегрируя и учитывая, что  $U(0) = U(l) = 0$ , для  $U(x)$  получим следующее выражение

$$U(x) = a \left[ \frac{4f}{l} (2x-l) \sin \frac{2\pi}{l} x + \frac{4f}{\pi l} \left( \cos \frac{2\pi}{l} x - 1 \right) \right]. \quad (2.5)$$

Рассмотрим теперь два частных случая изменения поперечного сечения арки, которые с точки зрения их практического применения представляются наиболее важными.

а) *Первый случай.* Сечение арки прямоугольное; высота остается постоянной, а ширина меняется по закону

$$b = \frac{b_{кл}}{\cos \psi} = b_{кл} \sqrt{1 + y'^2},$$

где  $b_{кл}$  — ширина ключевого сечения,  $\psi$  — угол наклона к горизонту касательной к оси арки.

Тогда для жесткости при изгибе и массы единицы длины арки в сечении с абсциссой  $x$  будем иметь

$$B(x) = \frac{B_{кл}}{\cos \psi} = B_{кл} \sqrt{1 + y'^2}; \quad m(x) = m_{кл} \sqrt{1 + y'^2},$$

где  $B_{кл} = E \frac{b_{кл} h^3}{12}$  — жесткость при изгибе ключевого сечения,  $h =$

$= \text{const}$  — высота сечений,  $m_{кл} = \frac{\gamma}{g} b_{кл} h$  — масса единицы длины в ключевом сечении,  $\gamma$  — объемный вес,  $E$  — модуль упругости материала арки,  $g$  — ускорение силы тяжести.

Для этого случая изменения поперечных сечений, выражение (1.18) принимает вид

$$\omega^2 = \frac{B_{кл} \int_0^l \frac{d^4 V}{dx^4} V dx}{m_{кл} \int_0^l (1 + y'^2) (V - y' U) V dx}, \quad (2.6)$$

и выражение (1.19), после интегрирования по частям его знаменателя с учетом (2.2), приводится к виду

$$q_{кр} = \frac{B_{кр} \int_0^l \frac{d^4 V}{dx^4} V dx}{\int_0^l \left[ U + \frac{l^2}{8f} (1 + y'^2) \frac{dV}{dx} \right] \frac{dV}{dx} dx} \quad (2.7)$$

Подставляя  $V(x)$ ,  $U(x)$  из (2.3), (2.5) в (2.6) и (2.7), получаем приближенное значение квадрата частоты и значение критической нагрузки

$$\omega^2 = \varphi_1^2 \frac{B_{кр}}{m_{кр} l^2}, \quad q_{кр} = K_1 \frac{B_{кр}}{l^2},$$

где

$$\varphi_1^2 = \frac{8\pi^4}{\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{3}\right) \left(\frac{f}{l}\right)^2 + 16 \left(\frac{8}{5} + \frac{4}{\pi^2} - \frac{78}{\pi^4}\right) \left(\frac{f}{l}\right)^4},$$

$$K_1 = \frac{96\pi^4 \frac{f}{l}}{3\pi^2 + (16\pi^2 + 48) (f/l)^2}.$$

Значения коэффициентов частоты  $\varphi_1$  и устойчивости  $K_1$  в зависимости от  $\frac{f}{l}$  приведены в таблицах 1 и 2.

б) *Второй случай.* Сечение арки прямоугольное; ширина остается постоянной, а высота меняется по закону

$$h = \frac{h_{кр}}{\cos \psi} = h_{кр} \sqrt{1 + y'^2}.$$

Тогда для жесткости при изгибе и массы единицы длины арки в сечении с абсциссой  $x$  будем иметь

$$B(x) = \frac{B_{кр}}{\cos^3 \psi} = B_{кр} (1 + y'^2)^{3/2}, \quad m(x) = m_{кр} \sqrt{1 + y'^2}. \quad (2.8)$$

Применяя двукратное интегрирование по частям к числителям выражений (1.18), (1.19), учитывая (2.2) и (2.8), получим

$$\omega^2 = \frac{B_{кр} \int_0^l (1 + y'^2) \left(\frac{d^2 V}{dx^2}\right)^2 dx}{m_{кр} \int_0^l (1 + y'^2) (V - y'U) V dx} \quad (2.9)$$

$$q_{кр} = \frac{B_{кр} \int_0^l (1 + y'^2) \left(\frac{d^2 V}{dx^2}\right)^2 dx}{\int_0^l \left[ U + \frac{l^2}{8f} (1 + y'^2) \frac{dV}{dx} \right] \frac{dV}{dx} dx} \quad (2.10)$$

Подставив  $V(x)$ ,  $U(x)$  из (2.3), (2.5) в (2.9) и (2.10), получаем приближенное значение квадрата частоты и значение критической нагрузки

$$\omega^2 = \varphi_2^2 \frac{B_{кл}}{m_{кл} l^3}, \quad q_{кр} = K_2 \frac{B_{кл}}{l^3}$$

где

$$\varphi_2^2 = \frac{\frac{8}{3} \pi^2 \left[ 3\pi^2 + (16\pi^2 - 24) \left( \frac{f}{l} \right)^2 \right]}{\frac{1}{2} + \left( \frac{4}{\pi^2} + \frac{16}{3} \right) \left( \frac{f}{l} \right)^2 + 16 \left( \frac{8}{5} + \frac{4}{\pi^2} - \frac{78}{\pi^4} \right) \left( \frac{f}{l} \right)^4},$$

$$K_2 = \frac{32\pi^2 \left[ 3\pi^2 + (16\pi^2 - 24) \left( \frac{f}{l} \right)^2 \right] \frac{f}{l}}{3\pi^2 + (16\pi^2 + 48) \left( \frac{f}{l} \right)^2}.$$

Значения коэффициентов частоты  $\varphi_2$  и устойчивости  $K_2$  приведены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1

$f/l$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1
$\varphi_1$	37,32	32,01	25,78	20,19	15,75	12,40	8,03	5,53
$\varphi_2$	38,16	34,79	30,58	26,51	23,00	20,11	15,86	12,99
$\varphi_3$	59,64	53,16	44,87	36,71	29,67	4,01	16,12	11,32
$\varphi_4$	61,28	58,77	54,96	50,46	45,88	41,60	34,41	28,97

### § 3. Бесшарнирная параболическая арка переменного поперечного сечения

Граничные условия бесшарнирной арки с учетом (1.4) и (1.16) можно написать в виде

$$U(x) = V(x) = V'(x) = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = l. \quad (3.1)$$

Кососимметричную форму отклонения арки от ее первоначального недеформированного состояния аппроксимируем функцией [6]

$$V(x) = ax(l-x) \sin \frac{2\pi}{l} x, \quad (3.2)$$

удовлетворяющей (3.1). Подставив значения  $y'$  и  $V'(x)$  соответственно из (1.14) и (3.2) в (2.4), проинтегрировав и учитывая, что  $U(0) = U(l) = 0$ , для  $U(x)$  получим следующее выражение

$$U(x) = -a \frac{4f}{l^2} \left\{ \left[ \frac{l}{\pi} x(x-l) - \frac{l^3}{2\pi^3} \right] \cos \frac{2\pi}{l} x + \right.$$

$$+ \left[ 2x^3 - 3lx^2 + l^2 \left( 1 - \frac{1}{\pi^2} \right) x + \frac{l^3}{2\pi^2} \right] \sin \frac{2\pi}{l} x + \frac{l^3}{2\pi^3} \}. \quad (3.3)$$

Рассмотрим опять вышеупомянутые два случая изменения поперечных сечений арки.

а) *Первый случай.* Здесь выражения (1.18) и (1.19) принимают вид, аналогичный (2.6) и (2.7). Подставляя  $V(x)$  и  $U(x)$  из (3.2), (3.3) в (2.6), (2.7), получим

$$\omega^2 = \varphi_3^2 \frac{B_{кл}}{m_{кл} l^4}, \quad q_{кр} = K_3 \frac{B_{кл}}{l^3},$$

где

$$\varphi_3^2 = \frac{A}{B}, \quad K_3 = \frac{A}{C} \cdot \frac{f}{l},$$

$$A = \frac{3}{4} + 4\pi^2 + \frac{4}{15} \pi^4,$$

$$B = \frac{1}{60} + \frac{3}{64\pi^4} + \left( \frac{8}{105} + \frac{2}{15\pi^2} + \frac{11}{2\pi^4} - \frac{27}{8\pi^6} \right) \left( \frac{f}{l} \right)^2 + \\ + \left( \frac{64}{315} + \frac{32}{35\pi^2} + \frac{76}{\pi^4} - \frac{486}{\pi^6} - \frac{2025}{\pi^8} \right) \left( \frac{f}{l} \right)^4,$$

$$C = \frac{1}{8} \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{16\pi^2} + \frac{\pi^2}{15} \right) + \left( \frac{4}{15} - \frac{3}{8\pi^2} + \frac{3}{4\pi^4} + \frac{2\pi^2}{10} \right) \left( \frac{f}{l} \right)^2.$$

Некоторые значения  $\varphi_3$  и  $K_3$  приведены в таблицах 1 и 2.

б) *Второй случай.* Здесь (1.18) и (1.19) принимают вид, аналогичный (2.9) и (2.10). Подставляя  $V(x)$  и  $U(x)$  из (3.2), (3.3) в (2.9), (2.10), получим

$$\omega^2 = \varphi_4^2 \frac{B_{кл}}{m_{кл} l^4}, \quad q_{кр} = K_4 \frac{B_{кл}}{l^3},$$

где

$$\varphi_4^2 = \frac{D}{B}, \quad K_4 = \frac{D}{C} \cdot \frac{f}{l},$$

$$D = \frac{3}{4} + 4\pi^2 + \frac{4}{15} \pi^4 + \left( \frac{44}{3} + \frac{448}{15} \pi^2 + \frac{64\pi^4}{105} - \frac{10}{\pi^2} \right) \left( \frac{f}{l} \right)^2,$$

а  $B$  и  $C$  имеют те же значения, что и в первом случае.

Некоторые значения  $\varphi_4$  и  $K_4$  приведены в таблицах 1 и 2.

Таблица 2

$f/l$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.8	1	
$K_1$	29.50	49.00	—	57.00	52.00	41.00	37.0	1
	29.53	49.42	58.27	59.80	54.0	46.3	39.70	2
	0.10	0.85	—	4.90	4.01	5.34	7.31	3
$K_2$	30.70	59.80	81.10	101.00	142.00	70.00	193.00	1
	30.86	58.36	81.99	03.0	142.14	180.52	219.27	2
	0.53	-2.41	1.09	2.04	0.10	6.13	13.61	3
$K_3$	62.30	12.00	—	154.00	15.00	133.00	118.00	1
	62.14	111.02	141.33	155.6	155.73	141.65	125.71	2
	-0.26	-0.87	—	1.04	2.46	6.5	6.53	3
$K_4$	65.70	134.00	204.00	277.00	444.00	87.00	700.00	1
	65.59	135.19	212.06	293.91	467.21	645.2	824.07	2
	0.14	1.26	3.95	6.10	5.22	9.93	17.72	3

Примечание. В строке 1 приведены значения коэффициентов устойчивости по А. Н. Динику [8], в строке 2 приведены значения коэффициентов устойчивости, полученные в настоящей работе, в строке 3 — разность в процентах.

\* \* \*

Таким образом, для нагрузки вида  $q(t) = q_1 + q_0 \cos pt$  исследование динамической устойчивости параболической арки приближенно приводится [7] к уравнению (1.17\*) типа Матвея. Коэффициенты  $\omega_0$  и  $\mu$  уравнения (1.17\*), необходимые для построения областей динамической неустойчивости по (1.22), определяются выражениями (1.20) и (1.21), в которые входят критическая нагрузка и частота свободных колебаний ненагруженной арки. Для рассмотренных двух случаев изменения поперечных сечений двухшарнирной и бесшарнирной параболических арок переменного поперечного сечения получены приближенные (в смысле метода Галеркина) выражения для частот основной кососимметричной формы собственных колебаний и критической нагрузки при кососимметричной форме потери статической устойчивости по двум полуволнам.

Чтобы судить о точности приближенных выражений для  $\omega$ , в таблице 3 приведены значения коэффициента частоты, вычисленные в работе [4] по оценкам А. Ф. Смирнова для бесшарнирной параболической арки при первом случае изменения поперечных сечений.

Таблица 3

$f/l$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\varphi_3^+$	63.0	56.1	46.5	36.7	29.6
$\varphi_3^-$	57.0	51.0	42.6	34.7	29.0
$\varphi_3$	59.6	53.2	44.9	36.7	29.7

В таблице 3  $\varphi_3^+$  и  $\varphi_3^-$  — оценки коэффициента частоты сверху и снизу,  $\varphi_3$  — коэффициент частоты полученной в настоящей работе (см. таблицу 1). Табличные данные свидетельствуют об удовлетворительной точности выражения для  $\varphi_3$ . Точность приближенного выражения  $\varphi_3$  является одновременно косвенной оценкой для остальных коэффициентов частоты.

При  $\frac{f}{l} = 0,1 \rightarrow 0,8$  отклонения значений коэффициентов устойчивости от точных, как это видно из таблицы 2, в большинстве случаев составляет менее  $6,5\%$ . Имея это в виду, можно сказать, что приближенные выражения для  $q_{кр}$ , полученные в настоящей работе, дают удовлетворительные для практических целей результаты.

Ереванский политехнический институт  
им. К. Маркса

Поступила 15 III 1961

#### Մ. Ն. Ալոյան

### ՓՈՓՈՒԱԿԱՆ ԸՆԴԼԱՅՆԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ՊԱՐԱԲՈԼԱԿԱՆ ԿԱՍԱՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

#### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում ուսումնասիրվում է պարարտական առանցք և փոփոխական կտրվածք ունեցող կամարների զինամիկ կալունություն խնդիրը: Ստացված է խնդրի հիմնական (1.15) դիֆերենցիալ հավասարումը, որի լուծումը Բարնոֆ-Պալլոբկինի մոտավոր եղանակով բերվում է (1.17) դիֆերենցիալ հավասարմանը, իսկ վերջինս, կախված ազդող արտաքին, ժամանակի ընթացքում պարբերաբար փոփոխվող բեռից, բերվում է Մատչի կամ Յիլլի դիֆերենցիալ հավասարումներին:

Երկհոդակապալին և ամրակցված ծալրերով կամարների, նրանց կտրվածքի փոփոխման երկու հիմնական դեպքերի համար որոշված են կրիտիկական ստատիկական բեռի մեծությունը, սեփական սառանուսմների հաճախականությունը, իսկ աչտահետև՝ Մատչի դիֆերենցիալ հավասարման գործակիցները և արված է զինամիկ անկալունություն տիրույթը:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Боднер Б. А. Устойчивость пластины под действием продольных периодических сил. ПММ\*, 2, вып. 1, 1938.
2. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, М., 1956.
3. Болотин В. В. Замечания к статье Н. Г. Бондаря «Динамическая устойчивость и колебания бесшарнирных параболических арок». Инженерный сборник\*, 17, 1953.
4. Бондарь Н. Г. О частоте плоских, свободных, незатухающих колебаний бесшарнирных параболических и цепных арок переменного сечения. Инженерный сборник\*, 11, 1952.

5. Бондарь Н. Г. Динамическая устойчивость и колебания бесшарнирных параболических арок. „Инженерный сборник“, **13**, 1952.
6. Гильман Л. С. К вопросу об устойчивости параболических арок, нагруженных вертикальной равномерно-распределенной нагрузкой. „Известия Ленинградского политехнического института“, **33**, 1931.
7. Джанелидзе Г. Ю. Теоремы о разделении переменных в задачах о динамической устойчивости упругих систем. „Труды Ленинградского института инженеров водного транспорта“, выпуск XX, М.—Л., 1953.
8. Динник А. Н. Устойчивость арок. Гостехиздат, М.—Л., 1946.