ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 2, 1961 Физико-математические науки

ФИЗИКА

В. А. Шахбазян

О радиационных поправках низших порядков в скалярной квантовой электродинамике

При рассмотрении ренормализационной группы в скалярной электродинамике [1]—[3] были использованы приближенные выражения радиационных поправок низших порядков к одночастичным функциям Грина и вершинным частям, справедливые в ультрафиолетовой и инфракрасной областях (см., например, ф-лы (16) в [1]). Представляют, однако, интерес также точные выражения указанных поправок. Ниже приводятся формулы радиационных поправок низших порядков к мезонной и фотонной функциям Грина, справедливые во всей области изменения импульсного аргумента, расчет дважды логарифмической ультрафиолетовой асимптотики вершинной части порядка e^2 и инфракрасной асимптотики четырехвершинной функции $\square_1$ (определение последней см. в [1]—[3]). В последнем разделе статьи излагается получение второго обобщенного тождества Уорда в скалярной электродинамике. Рассмотрение везде проводится в формализме Дэффина-Кеммера.

§ 1. Радиационные поправки низших порядков к мезонной и фотонной функциям Грина

Пользуясь методом, развитым в [4], для мезонной собственно-энергетической части получаем во втором порядке теории возмущений

$$\Sigma_M^{(2)}(p) = -\frac{3e^2}{8\pi^2} X \frac{M^2}{m} + \left(\frac{3e^2}{64\pi^2} - \frac{e^2 d_l^0}{64\pi^2}\right) \ln\left(\frac{M}{m}\right)^2 (\hat{p} - m) +$$

$$+ \left(\frac{5e^2}{64\pi^2} + \frac{e^2 d_l^0}{64\pi^2}\right) m \ln\left(\frac{M}{m}\right)^2 - \frac{3e^2 (d_l^0 - 1)}{64\pi^2} \ln\left(\frac{M}{m}\right)^2 \left(\frac{p^2 - m^2}{m}\right) X +$$

$$+ \frac{e^2}{64\pi^2} \left\{ -2 \frac{p^2 - m^2}{m^2} \left(\hat{p} \frac{p^2 + m^2}{p^2} + 2m\right) A(p) - 2 \frac{p^2 - m^2}{p^2} \hat{p} + \right.$$

$$+ \left[\hat{p} - m + \frac{3X}{m}(p^2 - m^2)\right] \frac{p^2 - m^2}{m^2} \left(\frac{p^2 + m^2}{p^2} A(p) + \frac{m^2}{p^2}\right)(d_l^0 - 1) +$$

$$+ 4m\frac{\hat{p}^2}{p^2}\cdot\frac{p^2-m^2}{p^2}[A(p)+1](d_l^0-1)+$$

$$+\left[2m\frac{\hat{p}^2}{m^2}\cdot\frac{p^2-m^2}{p^2}-\frac{2}{m}(\hat{p}^2-m^2)\right](d_l^0-1)\Big\}, \tag{1.1}$$

где

$$A(p)=\begin{cases}\dfrac{m^2}{p^2}\ln\left|\dfrac{p^2-m^2}{m^2}\right|, & |p^2-m^2|\gg\lambda_0^2,\\ \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\lambda_0^2}{m^2}, & p^2=m^2,\end{cases}$$

λ_0—фиктивная масса фотона, введенная для устранения инфракрасной расходимости. Выражение для $A(p)$ получено с точностью до мнимой части. Из (1.1) следует, что при снятии промежуточной регуляризации Паули-Вилларса (т. е. при $M\to\infty$) $\Sigma_M(p)$ расходится. Как известно [4], после устранения расходимостей из S-матрицы, регулярные части диаграмм, содержавших особености, определяются с точностью до конечных полиномов по импульсам той же степени и операторной структуры, что и устраненные сингулярные члены. Поэтому регулярная часть (1.1) будет определяться с точностью до членов $\sim(\hat{p}-m)$, $\sim X\dfrac{p^2-m^2}{m^2}$, $\sim m$, $\sim Xm$ с произвольными коэффициентами. Определяя произвольные постоянные из условия обращения в нуль радиационных поправок во внешние линии, мы получим не содержащее произвола конечное выражение для $\Sigma(p)$.

Учитывая, что полная мезонная функция Грина определяется формулой

$$G(p)=\Delta^c(p)+\Delta^c(p)\Sigma(p)G(p), \tag{1.2}$$

мы получим следующее выражение $G_{(2)}(p)$ с точностью до членов третьего порядка по e

$$G_{(2)}(p)=\frac{1}{m}\,\frac{m^2a_{(2)}(p)+(\hat{p}^2-p^2)\,b_{(2)}(p)+m\,\hat{p}\,d_M^{(2)}(p)}{m^2-p^2}-$$

$$-\frac{1}{m}Y\varphi_{(2)}(p), \tag{1.3}$$

где

$$a_{(2)}(p)=1+\frac{e^2}{64\pi^2}\left|\left(4\frac{p^2-m^2}{p^2}-4\frac{m^2}{p^2}-12\right)\ln\left|\frac{p^2-m^2}{m^2}\right|+\right.$$

$$+\left(4\frac{p^4-m^4}{p^4}+4\frac{m^2}{p^2}\cdot\frac{p^2+m^2}{p^2}\right)\ln\left|\frac{p^2-m^2}{m^2}\right|(d_l^0-1)+ \tag{1.4}$$

$$+4\frac{p^2-m^2}{p^2}(d_l^0-1)+4\frac{p^2+m^2}{p^2}(d_l^0-1)+$$

$$+ 2\frac{p^2+m^2}{p^2}(d_l^0-1)+2(d_l^0-1)\Bigg],$$

$$b_{(2)}(p) = 1 + \frac{e^2}{64\pi^2}\Bigg[-4\frac{m^2-p^2}{p^2}\cdot\frac{m^2+p^2}{p^2}\ln\left|\frac{p^2-m^2}{m^2}\right| -$$

$$-16\frac{m^2}{p^2}\ln\left|\frac{p^2-m^2}{m^2}\right| + 4\left(\frac{p^2-m^2}{p^2}\cdot\frac{p^2+m^2}{p^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{m^4}{p^4}\cdot\frac{p^2+m^2}{p^2}\right)\ln\left|\frac{p^2-m^2}{m^2}\right|(d_l^0-1)+ \tag{1.5}$$

$$+4\left(\frac{p^2-m^2}{p^2}+\frac{m^2}{p^2}\cdot\frac{p^2+m^2}{p^2}\right)(d_l^0-1)+2\frac{p^2+m^2}{p^2}(d_l^0-1)+$$

$$+8(3-d_l^0)A(m^2)+4(4-3d_l^0)\Bigg],$$

$$d_M^{(2)}(p) = 1+\frac{e^2}{64\pi^2}\Bigg[-2\left(\frac{p^2+m^2}{p^2}\right)^2\ln\left|\frac{p^2-m^2}{m^2}\right| - 8\frac{m^2}{p^2}\ln\left|\frac{p^2-m^2}{m^2}\right| -$$

$$-2\frac{p^2+m^2}{p^2}+4\frac{p^2-m^2}{p^2}\cdot\frac{p^2+m^2}{p^2}\ln\left|\frac{p^2-m^2}{m^2}\right|(d_l^0-1)+ \tag{1.6}$$

$$+8\frac{m^4}{p^4}\ln\left|\frac{p^2-m^2}{m^2}\right|(d_l^0-1)+\left(4\frac{p^2-m^2}{p^2}+8\frac{m^2}{p^2}\right)(d_l^0-1)+$$

$$+8(3-d_l^0)A(m^2)+4(3-d_l^0)\Bigg],$$

$$\varphi_{(2)}(p) = \frac{3e^2}{64\pi^2}\left[\frac{p^2-m^2}{p^2}\left(\frac{p^2+m^2}{p^2}\ln\left|\frac{p^2-m^2}{m^2}\right|+1\right)\right](d_l^0-1). \tag{1.7}$$

При $|p^2| \gg m^2$ нетрудно получить выражения для $a_{(2)}(p)$, $b_{(2)}(p)$, $d_M^{(2)}(p)$ и $\varphi_{(2)}(p)$, приведенные в [1].

В инфракрасной области, т. е. при $p^2 \to m^2$, имеем в согласии с [5] и [6]

$$a_{(2)}(p) = b_{(2)}(p) = d_M^{(2)}(p) = 1 + \frac{e^2}{8\pi^2}(d_l^0-3)\ln\left|\frac{p^2-m^2}{m^2}\right|, \tag{1.8}$$

$$\varphi_{(2)}(p) \to 0.$$

Аналогично можно получить выражение для поперечной функции Грина фотона

$$D_{tr}^{C_{mn}}(k) = -\frac{d(k^2)}{k^2}\left(g^{mn}-\frac{k^m k^n}{k^2}\right). \tag{1.9}$$

С точностью до члена $\sim e^4$

$$d_{(2)}(k^2) = 1 + \frac{e^2}{16\pi^2}I(k^2), \tag{1.10}$$

где

$$I(k^2)=\int_0^1 dx\,[4x(1-x)-1]\ln\left|\frac{m^2-x(1-x)k^2}{m^2}\right|. \tag{1.11}$$

Произведя те же преобразования, что и в [1], придем к следующему параметрическому представлению [7], [8] фотонной функции Грина

$$D^{C_{mn}}_{(2)_{tr}}(k)=-\left(g^{mn}-\frac{k^m k^n}{k^2}\right)\left[\frac{1}{k^2+i\varepsilon}+\frac{e^2}{48\pi^2}\int_{4m^2}^{\infty}dM^2\,\frac{(1-4m^2/M^2)^{3/2}}{M^2(M^2-k^2+i\varepsilon)}\right] \tag{1.12}$$

При $|k^2|\gg m^2$

$$d(k^2)=1+\frac{e^2}{48\pi^2}\ln\left|\frac{k^2}{m^2}\right|+\cdots \tag{1.13}$$

§ 2. О радиационных поправках к вершинным частям

Рассмотрим радиационные поправки к вершинным частям Γ и $\square$ (определение Γ и $\square$ см. [1], [2]). При их вычислении в общем случае не удается избавиться от конечных интегрирований. Поэтому получающиеся выражения выписывать не будем. Ограничимся нахождением дважды-логарифмической асимптотики функции Γ порядка e^2 и инфракрасной асимптотики функции $\square_1$ в низших приближениях по e^2 и h. Методика нахождения дважды-логарифмической асимптотики вершинной части порядка e^2 была разработана Судаковым [9] для спинорной электродинамики. Техника вычисления типового интеграла, дающего двойной логарифм, в скалярной электродинамике сохраняется без изменения. Различие возникает при исследовании матричных структур. Типовой интеграл имеет вид

$$J=\int\frac{d^4k'}{[(p-k')^2+i\varepsilon]\,[(q-k')^2+i\varepsilon]\,(k'^2+i\varepsilon)}. \tag{2.1}$$

Асимптотика J при

$$|k^2|\sim|pq|\gg|q^2|,\quad |p^2|\gg m^2 \tag{2.2}$$

имеет вид [9]

$$J=-\frac{i}{8pq}\ln\left|\frac{pq}{q^2}\right|\ln\left|\frac{pq}{p^2}\right|. \tag{2.3}$$

В числителе подинтегрального выражения вершинной части

$$\sum_l g^{ll}\Big\{\Gamma^l\left[(\hat{q}-\hat{k}')-\frac{1}{m}(q-k')^2+\frac{1}{m}(\hat{q}-\hat{k}')^2\right]\Gamma^n\times$$

$$\times\left[(\hat{p}-\hat{k}')-\frac{1}{m}(p-k')^2+\frac{1}{m}(\hat{p}-\hat{k}')^2\right]\Gamma^l$$

вклад в дважды-логарифмическую асимптотику дают члены

$$\sum_l g^{ll}\left\{\Gamma^l\hat{q}\Gamma^n\hat{p}\Gamma^l+\Gamma^l\left[-\frac{1}{m}(q^2-\hat{q}^2)\right]\Gamma^n\hat{p}\Gamma^l+\right.$$

$$\left.+\Gamma^l\hat{q}\Gamma^n\left[-\frac{1}{m}(p^2-\hat{p}^2)\right]\Gamma^l\right\}.$$

Пользуясь свойствами пятирядного представления матриц Кеммера [10], последнее выражение можно переписать в виде

$$\sum_l g^{ll}\Gamma^l\hat{q}\Gamma^n\hat{p}\Gamma^l+\frac{p^n+q^n}{m}Xpq$$

или

$$-\hat{q}\hat{p}\Gamma^n+\hat{q}p^n+\hat{p}\hat{q}\Gamma^n+\frac{p^n+q^n}{m}Xpq.$$

Так как справа и слева от вершинной части должны стоять функции Грина мезона, рассмотрим следующее выражение

$$\left[\hat{q}+\frac{1}{m}(\hat{q}^2-q^2)\right](-\hat{q}\hat{p}\Gamma^n+\hat{q}p^n+\hat{p}\hat{q}\Gamma^n)\left[\hat{p}+\frac{1}{m}(\hat{p}^2-p^2)\right].$$

Пользуясь неравенствами (2.2) и опять совершая преобразования с использованием свойств матриц Кеммера, получим

$$\left[\hat{q}+\frac{1}{m}(\hat{q}^2-q^2)\right](-\hat{q}\hat{p}\Gamma^n+\hat{q}p^n+\hat{p}\hat{q}\Gamma^n)\left[\hat{p}+\frac{1}{m}(\hat{p}^2-p^2)\right]\cong$$

$$\cong\left[\hat{q}+\frac{1}{m}(\hat{q}^2-q^2)\right]pq\cdot\Gamma^n\left[\hat{p}+\frac{1}{m}(\hat{p}^2-p^2)\right].$$

Так же, как и в [9], доказывается, что вклад недиагональной части функции Грина фотона $\sim(d_l^0-1)$ в дважды-логарифмическую асимптотику равен нулю.

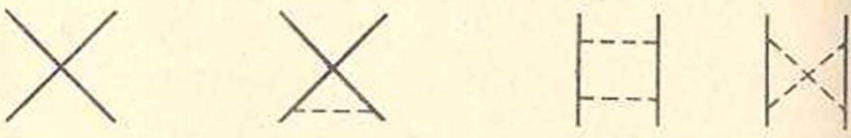
Окончательно для вершинного оператора второго порядка получаем

$$\Gamma^n_{(2)}(p,q,k)=\Gamma^n\left(1-\frac{e^2}{32\pi^2}\ln\left|\frac{k^2}{p^2}\right|\ln\left|\frac{k^2}{q^2}\right|\right)-$$

$$-\frac{e^2}{32\pi^2}\frac{p^n+q^n}{m}X\ln\left|\frac{k^2}{p^2}\right|\ln\left|\frac{k^2}{q^2}\right|. \tag{2.4}$$

Перейдем к рассмотрению инфракрасной асимптотики функции $\mathfrak{G}_1$. Таковая имеет место, когда квадраты четырех наружных импульсов стремятся к m^2. При этом, разумеется, существенно поведение тех диаграмм, которые имеют инфракрасные особенности. Такими особенностями обладают диаграммы б), в) и г) на фиг. 1.

Нахождение инфракрасных асимптотик значительно сложнее, нежели нахождение симметричных асимптотик в ультрафиолетовой области. Элементы S-матрицы, соответствующие диаграммам 1б), 1в) и 1г) и обладающие матричной структурой $X_{\alpha\beta}X_{\gamma\delta}$, обозначим через S_{he^2}, $S^{(1)}_{e^4}$, $S^{(2)}_{e^4}$ (α, β, γ, $\delta=0, 1, 2, 3, 4$). Тогда радиационные опе-



а б в г

Фиг. 1.

раторы [4], [11] четвертого порядка для рассеяния частиц одинакового знака имеют вид

$$\frac{1}{S_0}\left\langle \frac{\delta^4 S_{he^2}}{\delta\bar{\psi}_4(p')\,\delta\bar{\psi}_4(q')\,\delta\psi_4(-p)\,\delta\psi_4(-q)}\right\rangle_0 = -\frac{he^2}{(2\pi)^8}\left\{\frac{1}{2}\sum_{(p_1,p_2)=(p',q'),\,(q',p')}^{(q,p),\,(p,q)} J^{(1)}_{he^2}(p_1,p_2) + \sum_{(p_1,p_2)=(q',q),\,(q',p)}^{(p',q),\,(p',p)} J^{(2)}_{he^2}(p_1,p_2)\right\}\delta(p'+q'-p-q). \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{S_0}\left\langle \frac{\delta^4 (S^{(1)}_{e^4}+S^{(2)}_{e^4})}{\delta\bar{\psi}_4(p')\,\delta\bar{\psi}_4(q')\,\delta\psi_4(-p)\,\delta\psi_4(-q)}\right\rangle_0 = \frac{e^4\delta(p'+q'-p-q)}{4(2\pi)^8}\times$$

$$\times\left\{\sum_{(p_1,p_2,p_3)=(p',q',p'-p),\,(p',q',p'-q)}^{(q',p',q'-p),\,(q',p',q'-q)} J^{(1)}_{e^4}(p_1,p_2,p_3) + \sum_{(p_1,p_2,p_3)=(p',q',p'-p),\,(p',p,p'-q)}^{(q,q',q'-p),\,(q',p,q'-q)} J^{(2)}_{e^4}(p_1,p_2,p_3)\right\}. \tag{2.6}$$

Здесь

$$J^{(1)}_{he^2}(p_1,p_2) = \int (p_1-k)(p_2+k)\,D^c(p_1-k)\,D^c(p_2+k)\,D^c_0(k)\,d^4k. \tag{2.7}$$

$$J^{(2)}_{he^2}(p_1,p_2) = \int (p_1-k)(p_2-k)\,D^c(p_1-k)\,D^c(p_2-k)\,D^c_0(k)\,d^4k. \tag{2.8}$$

$$J^{(1)}_{e^4}(p_1,p_2,p_3) = \iint\Big\{4m^2-3(p_1-k)^2-3(p_2+k)^2+$$

$$\frac{1}{m^2}\left[2(p_1-k)^2(p_2+k)^2+|(p_1-k)(p_2+k)|^2\right]\Bigg\}\times$$

$$\times D^c(p_1-k)\,D^c(p_2+k)\,D_0^c(p_3-k)\,D_0^c(k)\,d^4k, \tag{2.9}$$

$$J^{(2)}_{e^4}(p_1,p_2,p_3)=\int\Bigg\{4m^2-3(p_1-k)^2-3(p_2-k)^2+$$

$$+\frac{1}{m^2}\left[2(p_1-k)^2(p_2-k)^2+|(p_1-k)(p_2-k)|^2\right]\Bigg\}\times$$

$$\times D^c(p_1-k)\,D^c(p_2-k)\,D_0^c(p_3-k)\,D_2^c(k)\,d^4k, \tag{2.10}$$

D^c—причинная функция мезона в формализме Клейна-Гордона, D_0^c—фотонная функция Грина. Использована стандартная калибровка $d_l^0=1$.

В формулах (2.5) и (2.6) суммирование производится по выписанным значениям групп импульсов. Например, сумма

$$\sum_{(p_1,p_2)=(p',q'),\,(q',p')}^{(q,p),\,(p,q)} J^{(1)}_{he^2}(p_1,p_2)$$

означает, что берется сумма величин $J^{(1)}_{he^2}(p_1,p_2)$, когда импульсы (p_1,p_2) принимают значения (p',q'), (q',p') (q,p), (p,q).

p, q—начальные импульсы частиц,

p', q'—конечные импульсы частиц.

Ищется поведение интегралов (2.7)—(2.10) при p^2, q^2, q'^2, $p'^2\to m^2$ одновременно в окрестности $k\sim 0$. Отбрасывая в числителях все малые члены, заметим, что для нахождения инфракрасных асимптотик интегралов (2.7)—(2.10) необходимо оценить интегралы следующих типов

$$\int\frac{d^4k}{(2p_1k-\alpha^2)(2p_2k+\alpha^2)k^2}, \qquad \alpha^2=p^2-m^2,$$

$$k^2=(k^0)^2-\vec{k}^2,$$

$$\int\frac{d^4k}{(2p_1k-\alpha^2)(2p_2k-\alpha^2)k^2}. \qquad p^2=q'^2=q^2=p'^2\to m^2$$

Вычисляя их обычным способом [12] в окрестности $k\sim 0$, получим следующее выражение для функции $\square_1^{(2)}$

$$\square_1^{(2)}\left(\frac{p^2-m^2}{m^2},\,s_1,s_2,s_3,e^2,h\right)=1+\Bigg[e^2f_1(s_1,s_2,s_3)+$$

$$+\frac{e^4}{h}f_2(s_1,s_2,s_3)\Bigg]\ln\frac{p^2-m^2}{m^2}. \tag{2.11}$$

где

$$f_1(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{4\pi^2}\left\{-\frac{s_1 - {}^1/_2}{\sqrt{s_1(s_1-1)}}\ln\frac{1+\sqrt{(s_1-1)/s_1}}{1-\sqrt{(s_1-1)/s_1}} + \right.$$

$$+\frac{|s_2| + {}^1/_2}{\sqrt{|s_2|(1+|s_2|)}}\ln\frac{1+\sqrt{|s_2|/(1+|s_2|)}}{1-\sqrt{|s_2|/(1+|s_2|)}} + \qquad (2.12)$$

$$\left. + \frac{|s_3| + {}^1/_2}{\sqrt{|s_3|(1+|s_3|)}}\ln\frac{1+\sqrt{|s_3|/(1+|s_3|)}}{1-\sqrt{|s_3|/(1+|s_3|)}}\right\},$$

$$f_2(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{16\pi^2}\left\{-\frac{(s_1 - {}^1/_2)^2}{\sqrt{s_1(s_1-1)}}\cdot\frac{s_2+s_3}{4s_2 s_3}\ln\frac{1+\sqrt{(s_1-1)/s_1}}{1-\sqrt{(s_1-1)/s_1}} + \right.$$

$$+\frac{(|s_2| + {}^1/_2)^2}{4s_3\sqrt{|s_2|(1+|s_2|)}}\ln\frac{1+\sqrt{|s_2|/(1+|s_2|)}}{1-\sqrt{|s_2|/(1+|s_2|)}} + \qquad (2.13)$$

$$\left. + \frac{(|s_3| + {}^1/_2)^2}{4s_2\sqrt{|s_3|(1+|s_3|)}}\ln\frac{1+\sqrt{|s_3|/(1+|s_3|)}}{1-\sqrt{|s_3|/(1+|s_3|)}}\right\},$$

$$s_1 = \frac{(p+q)^2}{4m^2}, \quad s_2 = \frac{(p'-p)^2}{4m^2}, \quad s_3 = \frac{(p'-q)^2}{4m^2}, \qquad (2.14)$$

$$s_1 + s_2 + s_3 = 1, \quad s_1 > 1, \quad s_2 < 0, \quad s_3 < 0. \qquad (2.15)$$

Чтобы получить выражение $\Box_1^{(2)}$ для рассеяния частиц с противоположными зарядами, в формулах (2.11)—(2.13) следует произвести замену

$$s_1 \rightleftarrows s_3, \quad s_2 \to s_2.$$

§ 3. Об обобщенных тождествах Уорда в скалярной электродинамике

Как об этом упоминалось в [1], при устранении расходимостей скалярной электродинамики, приходится пользоваться двумя тождествами Уорда—между мезонной собственно-энергетической частью и вершинной частью и между вершинной и комптоновской частями.

В работах [13] было получено, так называемое, обобщенное тождество Уорда в спинорной электродинамике. В скалярной электродинамике возможно получить соответственно два обобщенных тождества Уорда. Первое из них по своей форме в точности совпадает с таковым в спинорной электродинамике. Получим второе обобщенное тождество Уорда—между вершинной и комптоновской частями.

Для этого заметим, что соотношение для коэффициентных функций

$$\operatorname{div}_{\xi}^{(4)} K_{n+1}(x_1, \cdots, x_n \xi) = i\left[\sum_a \delta(\xi - x_a) - \sum_b \delta(\xi - x_b)\right] K_n(x_1, \ldots, x_n), \tag{3.1}$$

полученное в [4], справедливо также и в скалярной электродинамике. Рассматривая его для комптоновской ($n+2$-го порядка) и вершинной ($n+1$-го порядка) частей, запишем (3.1) в импульсном представлении

$$\pi_2 K'_{n+2}(p_1, \cdots, p_n|\pi_1, \pi_2) = \Gamma'_{n+1}(p_1, \cdots, p_b + \pi_2, \cdots, p_n|\pi_1) -$$
$$- \Gamma'_{n+1}(p_1, \cdots, p_a + \pi_2, \cdots, p_n|\pi_1), \tag{3.2}$$

где π_1, π_2 — интересующие нас наружные фотонные линии. Штрихи означают, что из k и Γ выделены δ-функции суммарных импульсов. Проинтегрируем (3.2) по всем импульсам, кроме p_a, p_b, π_1, π_2. Надо заметить, что K_{n+2} (как и Γ_{n+1}) представляет собой сумму членов, соответствующих последовательным включениям вершины с внешним фотонным импульсом π_2 во все внутренние мезонные линии цикла. При этом, поскольку рассматривается комптоновская диаграмма, т. е. диаграмма с двумя внешними фотонными линиями и двумя внешними мезонными линиями, следует различать совокупность членов, в которых фотонная линия с импульсом π_2 расположена левее фотонной линии с импульсом π_1, от совокупности членов, в которых имеет место обратное. Поэтому при интегрировании комптоновского члена по всем внутренним линиям, получим

$$\int K'_{n+2}(p_1, \cdots, p_n|\pi_1, \pi_2)\, dp_1 \cdots dp_{a-1}\, dp_{a+1} \cdots dp_{b-1}\, dp_{b+1} \cdots dp_n =$$
$$= K_{n+2}(p_a, p_b|\pi_1, \pi_2) + K_{n+2}(p_a, p_b|\pi_2, \pi_1). \tag{3.3}$$

Здесь первый член представляет собой интеграл от суммы членов, в которых линия с импульсом π_1 расположена левее линии с импульсом π_2. Второй член соответствует обратному расположению внешних фотонных линий. Интегрируя вершинные части, из (3.3) получаем

$$\pi_2 K_{n+2}(p_a, p_b|\pi_1, \pi_2) + \pi_2 K_{n+2}(p_a, p_b|\pi_2, \pi_1) =$$
$$= \Gamma_{n+1}(p_a, p_b + \pi_2|\pi_1) - \Gamma_{n+1}(p_a + \pi_2, p_b|\pi_1). \tag{3.4}$$

Формулу (3.4) можно переписать в виде

$$\sum_l g^{ll} k'^{l} K^{ml}_{n+2}(p', p, k, k') + \sum_l g^{ll} k'^{l} K^{lm}_{n+2}(p', p, k', k) =$$
$$= \Gamma^{m}_{n+1}(p', p' - k) - \Gamma^{m}_{n+1}(p' + k', p), \tag{3.5}$$

где

$$K^{ml}_{n+2}(p', p, k, k') = K^{ml}_{n+2}(p, -p'|k, -k'),$$

$$K^{lm}_{n+2}(p', p, k', k) = K^{lm}_{n+2}(p, -p'|-k', k),$$

$$\Gamma^{m}_{n+1}(p', p-k') = \Gamma^{m}_{n+1}(p-k', -p'|k),$$

$$\Gamma^{m}_{n+1}(p'+k', p) = \Gamma^{m}_{n+1}(p, -p'-k'|k).$$

Формула (3.5) и представляет собой второе обобщенное тождество Уорда в скалярной электродинамике.

В заключение, пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность Д. В. Ширкову, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступила 24 VI 1960

Վ. Ա. Շահբազյան

ՍԿԱԼՅԱՐ ԿՎԱՆՏԱՅԻՆ ԷԼԵԿՏՐԱԴԻՆԱՄԻԿԱՅՈՒՄ ՑԱԾՐ ԿԱՐԳԵՐԻ ՃԱՌԱԳԱՅԹԱՅԻՆ ՈՒՂՂՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ստացված են գրգռումների տեսության երկրորդ կարգում Գրինի մեզոնային և ֆոտոնային ֆունկցիաների ռադիացիոն ուղղումների արտահայտությունները, որոնք ճշմարտացի են իմպուլսային արգումենտների փոփոխության ամբողջ տիրույթում: Բերված է e^2 կարգի գագաթային մասի կրկնակի լոգարիթմական ասիմպտոտիկայի և ցածր կարգերում ըստ e^2-ի ու h-ի միևնույն փոխազդեցության Գրինի ֆունկցիայի ինֆրակարմիր ասիմպտոտիկայի հաշվարկը:

Դիտարկված է Ուորդի ընդհանրացված նույնությունը գագաթային և կոմպտոնյան մասերի միջև:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шахбазян В. А.* Об улучшении теории возмущений в квантовой электродинамике частиц со спином нуль. „Изв. АН АрмССР", **12**, № 6, 1959.
2. *Шахбазян В. А.* О двухзарядной ренормализационной группе в скалярной квантовой электродинамике. „ЖЭТФ", **37**, 1959, 1789.
3. *Шахбазян В. А.* Об инфракрасной катастрофе в скалярной квантовой электродинамике. „ЖЭТФ", **39**, 1960, 484.
4. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. ГИТТЛ, М., 1957.
5. *Логунов А. А.* Функция Грина в скалярной электродинамике в области малых импульсов. „ЖЭТФ", **29**, 1955, 871.

6. *Горьков Л. П.* Функции Грина заряженных частиц в области „инфракрасной катастрофы". „ЖЭТФ". **30**, 1956, 790.

7. *Källén G.* On the definition of the Renormalisation constants in Quantum Electrodynamics. „Helv. Phys. Acta". **25**, 1952, 417.

8. *Lehman H.* Über Eigenschaften von Ausbereitings funktionen und Renormierungs Konstanten quanti-ierter Felder. „Nuovo cimento", **11**, 1954, 342.

9. *Судаков В. В.* Вершинные части для сверхвысоких энергий в квантовой электродинамике. „ЖЭТФ", **30**, 1956, 87.

10. *Salam A.* Renormalisation of scalar electrodynamics using β-formalism. „PROC. РОУ. Soc.", A **211**, 1952, 276.

11. *Боголюбов Н. Н.* *Медведев Б. В.*, *Поливанов М. К.* Вопросы теории дисперсионных соотношений. ГИТТЛ. М., 1958.

12. *Ахиезер А. Н.*, *Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика. ГИТТЛ. М., 1959.

13. *Takahashi Y.* On the Generalized Ward Identity. „Nuovo Cimento", **6**, 1957, 371.
Ширков Д. В. Об обобщенном тождестве Уорда (неопубликовано).