

Х. А. Симонян

Прохождение через квадратичный резонанс в синхротроне с жесткой фокусировкой

Полные уравнения бетатронных колебаний вокруг некоторой плоской периодической орбиты в синхротроне с жесткой фокусировкой даны в [1].

Здесь мы рассмотрим эффект совместного действия возмущений из-за флуктуаций квадратичной нелинейности и несимметрии поля относительно плоскости орбиты ($z = 0$).

Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} - \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \frac{n}{\rho^2} r &= - \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{H\rho} \left[\delta \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} \right) (r^2 - z^2) + \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial z} rz \right], \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \frac{n}{\rho^2} z &= \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{H\rho} \left[2\delta \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} \right) rz + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial z} (z^2 - r^2) \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где r — означает горизонтальное, а z — вертикальное отклонения частицы от периодической орбиты; ρ — радиус этой орбиты. „Угол“ θ изменяется на длине периодического элемента l на величину 2π ,

$n = - \frac{\rho}{H} \frac{\partial H}{\partial r}$ — показатель спадания магнитного поля по радиусу;

$\delta \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} \right)$ — ошибка в квадратичной нелинейности; величина $\frac{\partial^2 H}{\partial r \partial z}$ — описывает несимметрию поля относительно плоскости $z = 0$.

Решение системы (1) ищем в виде

$$\begin{aligned} x_k(\theta) &= a_k \varphi_k + a_k^* \bar{\varphi}_k, \\ \frac{dx_k(\theta)}{d\theta} &= a_k \frac{d\varphi_k}{d\theta} + a_k^* \frac{d\bar{\varphi}_k}{d\theta}, \\ (k = r, z \quad x_r = r \quad x_z = z), \end{aligned} \quad (2)$$

где φ_k и $\bar{\varphi}_k$ — суть два линейно независимых решения уравнений (1) без правой части, нормированных условием

$$\varphi_k \frac{d\varphi_k^*}{d\theta} - \varphi_k^* \frac{d\varphi_k}{d\theta} = -2i\omega \quad (3)$$

с известными свойствами

$$\begin{aligned} \varphi_k(\theta) &= f_k(\theta) e^{i \int_0^\theta \nu_k d\theta} \\ f_k(\theta + 2\pi) &= f_k(\theta), \end{aligned} \quad (4)$$

$\nu_k = \nu_k(\theta)$ — мгновенная квази-частота бетатронных колебаний.

Подставляя (2) в (1) и учитывая (3), получим уравнение для коэффициентов $a_k(\theta)$

$$\begin{aligned} \frac{da_r}{d\theta} &= -\frac{\varphi_r^*}{2i\omega} \left(\frac{l}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{H\rho} [\Delta_1 (a_r^2 \varphi_r^2 + a_r^{*2} \varphi_r^{*2} + 2|a_r|^2 |\varphi_r|^2 - \\ &\quad - a_z^2 \varphi_z^2 - a_z^{*2} \varphi_z^{*2} - 2|a_z|^2 |\varphi_z|^2) + \Delta_2 (a_r a_z \varphi_r \varphi_z + \\ &\quad + a_r^* a_z^* \varphi_r^* \varphi_z^* + a_r a_z^* \varphi_r \varphi_z^* + a_r^* a_z \varphi_r^* \varphi_z)], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{da_z}{d\theta} &= \frac{\varphi_z^*}{2i\omega} \left(\frac{l}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{H\rho} \left[2\Delta_1 (a_r a_z \varphi_r \varphi_z + a_r^* a_z^* \varphi_r^* \varphi_z^* + \right. \\ &\quad + a_r^* a_z \varphi_r^* \varphi_z + a_r a_z^* \varphi_r \varphi_z^*) + \frac{1}{2} \Delta_2 (a_z^2 \varphi_z^2 + a_z^{*2} \varphi_z^{*2} + \\ &\quad \left. + 2|a_z|^2 |\varphi_z|^2 - a_r^2 \varphi_r^2 - a_r^{*2} \varphi_r^{*2} - 2|a_r|^2 |\varphi_r|^2) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где введены обозначения

$$\Delta_1 = \delta \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} \right), \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial z}. \quad (7)$$

Правые части уравнений (5) и (6) являются малыми периодическими возмущениями, зависящими от частот $\nu_{r,z}$ и, несмотря на свою малость, при определенных резонансных значениях этих частот могут дать большой вклад в изменение величин $a_k(\theta)$.

Учитывая это, мы можем оставить в правых частях (5) и (6) только резонансные члены и в первом приближении отбросить нерезонансные. Полученные таким способом резонансные уравнения первого приближения совпадают с так называемыми укороченными уравнениями, полученными по методу Крылова и Боголюбова [2].

Учет нерезонансных членов и оценка их влияния проводится по резонансной теории возмущений, подробное изложение которой дано, в частности, в [1].

Из уравнений (5) и (6) видно, что резонансы (при которых правые части обращаются в постоянные, если $a_k = \text{const}$) могут возникнуть при соотношениях

$$\begin{aligned} \nu_{r,z} &= \frac{k}{M}, & 3\nu_{r,z} &= \frac{k}{M}, \\ \nu_{r,z} + 2\nu_{z,r} &= \frac{k}{M}, & 2\nu_{r,z} - \nu_{z,r} &= \frac{k}{M}, \end{aligned} \quad (8)$$

т. к. функции Δ_1 и Δ_2 имеют период в один оборот

$$\begin{aligned} \Delta_1(\theta + 2\pi M) &= \Delta_1(\theta), \\ \Delta_2(\theta + 2\pi M) &= \Delta_2(\theta), \end{aligned} \quad (9)$$

M — число периодических секторов.

Мы не будем рассматривать резонансы при $\nu_{r,z} = \frac{k}{M}$, т. к. частоты $\nu_{r,z}$ всегда выбираются в пределах

$$\frac{k}{M} - \frac{1}{2M} < \nu_{r,z} < \frac{k}{M}, \quad (10)$$

а также резонансы на разности $2\nu_{r,z} - \nu_{z,r} = \frac{k}{M}$, дающие, как известно, только связь колебаний.

Истинные резонансы при $3\nu_{r,z} = \frac{k}{M}$ и $2\nu_{r,z} + \nu_{z,r} = \frac{k}{M}$ (назовем их квадратичными) из-за синхротронных колебаний бетатронной частоты могут неоднократно проходиться. Оценим прирост амплитуды, например, радиальных колебаний при однократном прохождении через квадратичный резонанс.

Учитывая, что частоты обычно выбираются близкими —

$$|\nu_r - \nu_z| \ll \nu_{r,z} = \nu, \quad (11)$$

получим резонансное уравнение для a_r

$$\begin{aligned} \frac{da_r}{d\theta} &= - \left(\frac{l}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{2i\omega_p} (a_r^{*2} g_1 e^{i\gamma_1} + a_z^{*2} g_2 e^{i\gamma_2} + a_r^* a_z^* g_3 e^{i\gamma_3}) \times \\ &\times \exp \left\{ -3i \int_0^\theta \left(\nu - \frac{k}{3M} \right) d\theta \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} g_1 e^{i\gamma_1} &= \frac{1}{2\pi M H} \int_0^{2\pi M} \Delta_1 f_r^3 e^{-i \frac{k}{M} \theta} d\theta, \\ g_2 e^{i\gamma_2} &= \frac{1}{2\pi M H} \int_0^{2\pi M} \Delta_1 f_r^2 f_z^2 e^{-i \frac{k}{M} \theta} d\theta, \end{aligned} \quad (13)$$

$$g_3 e^{i\gamma_3} = \frac{1}{2\pi M H} \int_0^{2\pi M} \Delta_2 f_r^2 f_z^2 e^{-i \frac{k}{M} \theta} d\theta. \quad (13)$$

Вблизи резонанса $\nu \approx \nu_{\text{рез}} = \frac{k}{3M}$ можно пользоваться разложением

$$\nu(\theta) = \nu_{\text{рез}} + \left(\frac{d\nu}{d\theta} \right)_{\text{рез}} (\theta - \theta_{\text{рез}}) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\nu}{d\theta^2} \right)_{\text{рез}} (\theta - \theta_{\text{рез}})^2 + \dots \quad (14)$$

причем для случая $\nu'_{\text{рез}} \neq 0$ можно отбросить последний член в (14).

1) Рассмотрим этот основной случай. Тогда (12) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{da_r}{d\theta} = & - \left(\frac{l}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{2i\omega\rho} (a_r^{*2} g_1 e^{i\gamma_1} + a_z^{*2} g_2 e^{i\gamma_2} + a_r^* a_z^* g_3 e^{i\gamma_3}) \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{3}{2} i \nu'_{\text{рез}} (\theta - \theta_{\text{рез}})^2 \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Полагая резонанс достаточно тонким, получим

$$|\Delta a_r| \approx \left(\frac{l}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{2\omega\rho} \sqrt{\frac{2\pi}{3\nu'_{\text{рез}}}} |a_r^{*2} g_1 e^{i\gamma_1} + a_z^{*2} g_2 e^{i\gamma_2} + a_r^* a_z^* g_3 e^{i\gamma_3}|. \quad (16)$$

Фазы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ имеют самые различные значения, т. к. они получены в результате интегрирования разных величин.

Предполагая статистическую независимость возмущений в различных магнитах, получим

$$\overline{|\Delta a_r|^2} \approx \left(\frac{l}{2\pi} \right)^4 \left(\frac{1}{2\omega\rho} \right)^2 \frac{2\pi}{3\nu'_{\text{рез}}} (|a_r|^4 \overline{g_1^2} + |a_z|^4 \overline{g_2^2} + |a_r|^2 |a_z|^2 \overline{g_3^2}), \quad (17)$$

где усреднение проведено по различным величинам

$$\begin{aligned} \left(\frac{H_2}{H} \right)_1 &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H / \partial r^2}{H} \quad \text{и} \quad \left(\frac{H_2}{H} \right)_2 = \frac{\partial^2 H / \partial r \partial z}{H}, \\ \overline{g_1^2} &\approx \frac{1}{4\pi^2 M} \overline{\left(\frac{H_2}{H} \right)_1^2} \left\{ \left| \int_0^\pi \varphi_r^{*3} d\theta \right|^2 + \left| \int_0^{2\pi} \varphi_r^{*3} d\theta \right|^2 \right\}, \\ \overline{g_2^2} &\approx \frac{1}{4\pi^2 M} \overline{\left(\frac{H_2}{H} \right)_1^2} \left\{ \left| \int_0^\pi \varphi_r^* \varphi_z^{*2} d\theta \right|^2 + \left| \int_0^{2\pi} \varphi_r^* \varphi_z^{*2} d\theta \right|^2 \right\}, \\ \overline{g_3^2} &\approx \frac{1}{4\pi^2 M} \overline{\left(\frac{H_2}{H} \right)_2^2} \left\{ \left| \int_0^\pi \varphi_r^{*2} \varphi_z d\theta \right|^2 + \left| \int_0^{2\pi} \varphi_r^{*2} \varphi_z d\theta \right|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Введя фазу $\psi_k(\theta)$ по формуле

$$a_k(\theta) = \frac{A_k e^{i\psi_k}}{2|\varphi|_{\max}},$$

$$|\varphi_r|_{\max} \approx |\varphi_z|_{\max} = |\varphi|_{\max}$$

и усредняя по этим фазам, получим

$$\overline{\Delta A_r^2} \approx \left(\frac{l}{2\pi}\right)^4 \left(\frac{1}{2\omega\rho}\right)^2 \frac{2\pi}{3\nu_{\text{рез}}} \frac{[A_r^4 \bar{g}_1^2 + A_z^4 \bar{g}_2^2 + A_r^2 A_z^2 \bar{g}_3^2]}{4|\varphi|_{\max}^2}. \quad (19)$$

Вблизи центра области устойчивости выполняется соотношение

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx -\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}. \quad (20)$$

где $\Delta\nu$ — отклонение частоты и $\Delta\varepsilon$ — отклонение энергии при синхротронных колебаниях.

В линейном приближении

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = \left(\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}\right)_{\max} \cos \Omega t, \quad (21)$$

где Ω — частота синхротронных колебаний.

Подставляя значение $\nu_{\text{рез}}$ из (20) и (21) в (19), получим

$$\begin{aligned} \overline{\Delta A_r^2} \approx & \left(\frac{l}{2\pi}\right)^4 \left(\frac{1}{2\omega\rho}\right)^2 \frac{2\pi}{3} \frac{\omega_0 M}{4|\varphi|_{\max}^2 (\Delta\nu)_{\max} \Omega \sin \Omega t_{\text{рез}}} \times \\ & \times [A_r^4 \bar{g}_1^2 + A_z^4 \bar{g}_2^2 + A_r^2 A_z^2 \bar{g}_3^2], \end{aligned} \quad (22)$$

где ω_0 — частота обращения.

При грубой оценке эффекта можно положить

$$\begin{aligned} \left(\frac{H_2}{H}\right)_1^2 \sim \left(\frac{H_2}{H}\right)_z^2, \quad A_r \sim A_z \sim A, \quad \sin \Omega t_{\text{рез}} = \frac{1}{2}, \\ \bar{g}_1^2 \sim \bar{g}_2^2 \sim \bar{g}_3^2 \sim \left(\frac{l_M}{l}\right)^2 \frac{|\varphi|_{\max}^6}{M} \left(\frac{H_2}{H}\right)_1^2, \end{aligned} \quad (23)$$

где l_M — длина магнита.

Тогда

$$\overline{\Delta A^2} \sim 0,5 \cdot 10^{-3} \left(\frac{l_M}{\rho}\right)^2 \frac{\omega_0 |\varphi|_{\max}^4}{\Omega \omega^2 (\Delta\nu)_{\max}} A^4 \left(\frac{H_2}{H}\right)_1^2. \quad (24)$$

2) В случае, когда $\nu_{\text{рез}} = 0$ берем следующий член в разложении (14). Уравнение (12) приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{da_r}{d\theta} = & -\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2\omega\rho} (a_r^{*2} g_1 e^{i\tau_1} + a_z^{*2} g_2 e^{i\tau_2} + a_r^* a_z^* g_3 e^{i\tau_3}) \times \\ & \times \exp\left\{-\frac{1}{2} i \nu_{\text{рез}} (\theta - \theta_{\text{рез}})^2\right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

При тех же предположениях, что и в пункте 1), получим

$$|\Delta a_r| \approx \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2wp} |a_r^* g_1 e^{i\varphi_1} + a_z^* g_2 e^{i\varphi_2} + a_r^* a_z^* g_3 e^{i\varphi_3}| \times \\ \times \frac{2\pi}{3} \frac{1}{\sqrt{0,5 v_{\text{рез}} \cdot \Gamma(2/3)}} \quad (16_2)$$

откуда

$$|\overline{\Delta a_r}|^2 \approx \left(\frac{l}{2\pi}\right)^4 \left(\frac{1}{2wp}\right)^2 \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 \frac{1}{\Gamma^2(2/3) (0,5 v_{\text{рез}})^{1/2}} \times \\ \times (|a_r|^4 \overline{g_1^2} + |a_z|^4 \overline{g_2^2} + |a_r|^2 |a_z|^2 \overline{g_3^2}) \quad (17_2)$$

Усредняя по фазам φ_k (6), получим

$$\overline{\Delta A_r^2} \approx \left(\frac{l}{2\pi}\right)^4 \left(\frac{\pi}{3wp}\right)^2 \left(\frac{1}{2|\varphi|_{\text{max}} \cdot \Gamma(2/3)}\right)^2 \times \\ \times \left(\frac{1}{0,5 v_{\text{рез}}}\right)^{1/2} [A_r^4 \overline{g_1^2} + A_z^4 \overline{g_2^2} + A_r^2 A_z^2 \overline{g_3^2}] \quad (19_2)$$

Подставим значение $v_{\text{рез}}$ из (20) и (21) в (19₂)

$$\overline{\Delta A_r^2} \approx \left(\frac{l}{2\pi}\right)^4 \left(\frac{\pi}{3wp}\right)^2 \left(\frac{1}{2|\varphi|_{\text{max}} \cdot \Gamma(2/3)}\right)^2 \left(\frac{(M\omega_0)^2}{0,5 (\Delta v)_{\text{max}} \Omega^2 \cos \Omega t_{\text{рез}}}\right)^{1/2} \times \\ \times [A_r^4 \overline{g_1^2} + A_z^4 \overline{g_2^2} + A_r^2 A_z^2 \overline{g_3^2}] \quad (22_2)$$

При грубой оценке, согласно (23), получим

$$\overline{\Delta A^2} \sim 0,72 \cdot 10^{-3} \left(\frac{l l_M}{\rho}\right)^2 \frac{|\varphi|_{\text{max}}^4}{w^2} \frac{M^{1/2}}{(\Delta v)_{\text{max}}^{1/2}} \left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)^{1/2} A^4 \left(\frac{H_2}{H}\right)^2 \quad (24_2)$$

За все время ускорения, частица проходит через резонанс n раз (n — число фазовых колебаний за цикл ускорения). Поэтому полный прирост амплитуды за время ускорения равен

$$\overline{A_r^2} = \sum^n \overline{\Delta A_r^2} \quad (25)$$

Принимая оценку (24₁), (24₂) и возлагая требования на $\overline{A_r^2}$, можно получить допуск на величину $\sqrt{\left(\frac{H_2}{H}\right)^2}$.

В качестве примера найдем допуски на $\sqrt{\left(\frac{H_2}{H}\right)^2}$ в электронном ускорителе с жесткой фокусировкой.

Полагая $A \sim (0,45 - 0,56)$ см (в формулы входят амплитуды свободных колебаний вокруг периодической орбиты)

$$\frac{U_M}{\rho} \sim 130 \text{ см}, \quad M(\Delta\nu)_{\max} \sim 3 \cdot 10^{-2}, \quad |\varphi|_{\max}^2 \sim 8,5, \quad \frac{\omega_0 M}{\Omega} \sim 25 \cdot 10^6.$$

$$\omega = 1, \quad n = 100 \div 300,$$

согласно (24₁) получим

$$\overline{\Delta A^2} \sim (2 \div 4,5) \cdot 10^6 \left(\frac{H_2}{H} \right)^2, \quad (26_1)$$

а согласно (24₂) —

$$\overline{\Delta A^2} \sim (0,4 \div 1) \cdot 10^5 \left(\frac{H_2}{H} \right)^2. \quad (26_2)$$

Полный прирост амплитуды за время ускорения соответственно равен

$$\overline{A^2} \sim (100 \div 1000) \cdot 10^6 \left(\frac{H_2}{H} \right)^2, \quad (27_1)$$

$$\overline{A^2} \sim (10 \div 100) \cdot 10^5 \left(\frac{H_2}{H} \right)^2. \quad (27_2)$$

Потребуем, например, чтобы $\overline{\Delta A^2} < 10^{-2} \text{ см}^2$.

Тогда в первом случае $\sqrt{\left(\frac{H_2}{H} \right)^2} \sim (0,5 \div 0,7) \cdot 10^{-4}$, а во втором случае $\sqrt{\left(\frac{H_2}{H} \right)^2} \sim (0,3 \div 0,5) \cdot 10^{-3}$.

Это является жестким допуском на флуктуации нелинейности второго порядка и поэтому необходимому соответствующим выбором рабочей частоты избегать прохождения через квадратичные резонансы.

Автор глубоко признателен Ю. Ф. Орлову за обсуждения, стимулирующие возникновение настоящей работы.

Физический институт
АН Армянской ССР

Поступила 26 V 1960

Խ. Ս. ՍԻՐԻՆՅԱՆ

ԱՆՑՈՒՄԸ ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ՌԵԶՈՆԱՆՍԻ ՄԻՋՈՎ ԿՈՇՏ ՖՈԿՈՒՍԱՅՄԱՄԲ ՍԻՆԽՐՈՆԱԶԱՏՐՈՆՈՒՄ

Ս. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Տվյալ աշխատության մեջ քննարկված է քառակուսային ոչ-լծային ֆլուկտացիաներով և օրբիտի հարթության նկատմամբ մագնիսական դաշտի ոչ-սիմետրիկությամբ պայմանավորված զրգուշմաների համառոտ ազդեցության էֆեկտը:

Ստացված է և լուծված շարավիզային տատանումների, ալիպես կոչված, ռեզոնանսային հաճախորդներ:

Ուսումնասիրված են սեղանանոթի անցնելու երկու հիմնական դեպքեր, որոնք պայմանավորված են բևեռացման և հաճախականության սինխրոնության տատանումներով:

Գնահատված է սեղանանոթի անցնելիս ստացված շարավիզային տատանումների ամպլիտուդայի աճը:

Արդյունքները բերված են ֆորմուլաների տեսքով, որոնք պարունակում են արագացուցչի պարամետրները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Орлов Ю. Ф. Нелинейная теория бетатронных колебаний в ускорителе с жесткой фокусировкой. Диссертация, Ергосунт, 1958.
2. Крылов Н. М. и Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Киев, 1937.
3. Рыжик И. М. и Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. Гостехиздат, М.—Л., 1951.
4. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Часть I. Издательство Иностранной литературы, М., 1949.