

А. А. Бабляни

Изгиб круглых валов с продольными зубцами или выточкой

Рассматривается задача изгиба призматических стержней с поперечным сечением в виде кольцевого сектора с симметрично-расположенными зубцами и кольца с секториальной выточкой, когда изгибающая сила действует вдоль оси симметрии. Решение задачи ищется в виде тригонометрических рядов, коэффициенты которых определяются из бесконечных систем линейных уравнений. Доказывается, что эти системы вполне регулярны и имеют ограниченные сверху и стремящиеся к нулю (при $p \rightarrow \infty$) свободные члены.

Подобные задачи рассматривались в работах Лейбензона [4], Стивенсона [5, 6], М. Сигара и К. Пирсона [8] и других [2, 3, 7, 9, 10].

§ 1. Постановка задачи

Пусть внешняя изгибающая сила P приложена на свободном конце стержня и действует вдоль оси симметрии поперечного сечения стержня, т. е. изгиб не сопровождается кручением. Функция напряжений при изгибе $F(x, y)$ внутри области поперечного сечения удовлетворяет следующему уравнению [4]

$$\nabla^2 F(x, y) = \frac{P}{J} \left[\frac{\sigma}{1 + \sigma} y - \frac{1}{2} f'(y) \right], \quad (1.1)$$

а на контуре сечения удовлетворяет условию

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{P}{J} \left[\frac{x^2}{2} - x_0 x - \frac{1}{2} f(y) \right] \frac{dy}{ds}, \quad (1.2)$$

где x_0 —координата центра тяжести сечения, J —осевой момент инерции поперечного сечения относительно оси η , $f(y)$ —произвольная функция, σ —коэффициент Пуассона.

Положим

$$f(y) = b^2 - y^2 \quad (1.3)$$

и перейдем к новым координатам следующим образом [2, 3]

$$x = be^t \cos \varphi, \quad y = be^t \sin \varphi. \quad (1.4)$$

Тогда уравнение (1.1) и условие (1.2) примут вид

$$\nabla^2 F(t, \varphi) = \frac{Pb^3}{J} \frac{1+2\sigma}{1+\sigma} e^{2t} \sin \varphi, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{Pb^3}{2J} \left[e^{2t} - 1 - 2 \frac{x_0}{b} e^t \cos \varphi \right] \frac{d(e^t \cdot \sin \varphi)}{ds}. \quad (1.6)$$

Касательные напряжения при изгибе определяются формулами

$$\tau_{rz}(t, \varphi) = -\frac{1}{be^t} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{Pb^2}{2J} \left[e^{2t} - 1 - 2 \frac{x_0}{b} e^t \cos \varphi \right] \sin \varphi; \quad (1.7)$$

$$\tau_{rz}(t, \varphi) = \frac{1}{be^t} \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{Pb^2}{2J} \left[e^{2t} - 1 - 2 \frac{x_0}{b} e^t \cos \varphi \right] \cos \varphi.$$

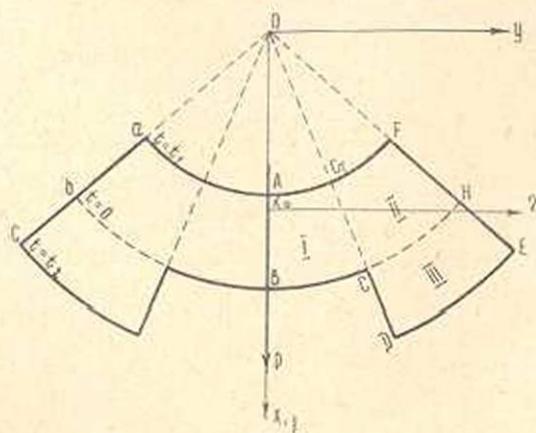
На оси симметрии $y=0$ ($\varphi=0; \pi$) напряжение $\tau_{rz}=0$, т. е.

$$F(t, \varphi) \Big|_{\varphi=0; \pi} = \text{const.} \quad (1.8)$$

§ 2. Изгиб стержня с поперечным сечением в виде кольцевого сектора с симметрично-расположенными зубцами

Рассмотрим задачу изгиба стержня с поперечным сечением в виде кольцевого сектора с симметрично-расположенными зубцами, когда изгибающая сила P проходит по оси симметрии (фиг. 1).

В силу симметрии области сечения, достаточно рассматривать только область $ABCDEFGA$. Чтобы решение, определенное в этой



Фиг. 1.

части области, распространилось на всю область сечения, требуется, чтобы на оси симметрии имело бы место соотношение (1.8).

Из граничного условия (1.6) следует

$$F(-t_1, \varphi) = \frac{Pb^3 e^{-t_1}}{2J} \left[-(1 - e^{-2t_1}) \sin \varphi - \frac{x_0 e^{-t_1}}{2b} (2\varphi + \sin 2\varphi) \right].$$

$$F(0, \varphi) = -\frac{Pb^2 x_0}{4J} (2\varphi + \sin 2\varphi),$$

$$F(t_2, \varphi) = \frac{Pb^3 e^{t_2}}{2J} \left[(e^{2t_2} - 1) \sin \varphi - \frac{x_0 e^{t_2}}{2b} (2\varphi + \sin 2\varphi) \right] + C_2, \quad (2.1)$$

$$F(t, \varphi_1) = \frac{Pb^3 \sin \varphi_1}{2J} \left[\frac{e^{3t}}{3} - e^t - \frac{x_0 e^{2t}}{b} \cos \varphi_1 \right] + C_1,$$

$$F(t, \varphi_2) = \frac{Pb^3 \sin \varphi_2}{2J} \left[\frac{e^{3t}}{3} - e^t - \frac{x_0 e^{2t}}{b} \cos \varphi_2 \right] + C_3.$$

Из условия непрерывности граничных значений функции $F(t, \varphi)$ в точках C, D, E, F , получим выражения для $C_i (i=1, 2, 3)$ и координату центра тяжести

$$C_1 = \frac{Pb^3}{2J} \left[\frac{2}{3} \sin \varphi_1 - \frac{x_0 \varphi_1}{b} \right],$$

$$C_2 = \frac{Pb^3}{2J} \left[-\frac{2}{3} (e^{3t_2} - 1) \sin \varphi_1 + \frac{x_0 \varphi_1}{b} (e^{2t_2} - 1) \right], \quad (2.2)$$

$$C_3 = \frac{Pb^3}{2J} \left[\frac{2}{3} e^{-3t_1} \sin \varphi_1 - \frac{x_0 e^{-2t_1} \varphi_1}{b} \right],$$

$$\frac{x_0}{b} = \frac{2}{3} \frac{(e^{3t_2} - e^{-3t_1}) \sin \varphi_2 - (e^{3t_2} - 1) \sin \varphi_1}{(e^{2t_2} - e^{-2t_1}) \varphi_2 - (e^{2t_2} - 1) \varphi_1}. \quad (2.3)$$

В области $ABCDEF GA$ функцию $F(t, \varphi)$ ищем в виде [1, 2, 3]

$$F(t, \varphi) = \begin{cases} F_1(t, \varphi) & \text{в области I,} \\ F_2(t, \varphi) & \text{в области II,} \\ F_3(t, \varphi) & \text{в области III.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Пользуясь условием симметрии (1.8) и граничными условиями (2.1), в силу (2.4) для $F_i(t, \varphi) (i=1, 2, 3)$ получим следующие граничные условия

$$F_1(t, 0) = 0,$$

$$F_1(-t_1, \varphi) = F_2(-t_1, \varphi) = \frac{Pb^3 e^{-t_1}}{2J} \left[-(1 - e^{-2t_1}) \sin \varphi - \frac{x_0 e^{-t_1}}{b} (2\varphi + \sin 2\varphi) \right],$$

$$F_1(0, \varphi) = -\frac{Pb^2 x_0}{4J} (2\varphi + \sin 2\varphi),$$

$$F_3(t_2, \varphi) = \frac{Pb^3 e^{t_2}}{2J} \left[(e^{2t_2} - 1) \sin \varphi - \frac{x_0 e^{t_2}}{2b} (2\varphi + \sin 2\varphi) \right] + C_2, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
 F_3(t, \varphi_1) &= \frac{Pb^3 \sin \varphi_1}{2J} \left[\frac{e^{3t}}{3} - e^t - \frac{x_0 e^{2t_1}}{2b} \cos \varphi_1 \right] + C_1, \\
 F_2(t, \varphi_2) &= F_3(t, \varphi_2) = \frac{Pb^3 \sin \varphi_2}{2J} \left[\frac{e^{3t}}{3} - e^t - \frac{x_0 e^{2t}}{b} \cos \varphi_2 \right] + C_2, \\
 F_1(t, \varphi_1) &= F_2(t, \varphi_1), & F_2(0, \varphi) &= F_3(0, \varphi), \\
 \left. \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_1} &= \left. \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_1}, & \left. \frac{\partial F_2}{\partial t} \right|_{t=0} &= \left. \frac{\partial F_3}{\partial t} \right|_{t=0}.
 \end{aligned} \quad (2.6)$$

§ 2. Определение функции напряжений

Решив уравнение (1.5) методом разделения переменных и удовлетворив условиям (2.5) и (2.6), как это сделано в работе [3], для функций $F_i(t, \varphi)$ ($i = 1, 2, 3$) получим выражения

$$\begin{aligned}
 F_1(t, \varphi) &= C \sin \varphi \left[e^{3t} + e^{-3t} \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t_1} - \frac{\operatorname{sh}(t_1 + t)}{\operatorname{sh} t_1} \right] + \frac{Pb^3 e^{-2t_1}}{J} \operatorname{sh} t \cdot \sin \varphi - \\
 &\quad - \frac{Pb^2 x_0}{4J} e^{2t} \sin 2\varphi - \frac{Pb^2 x_0}{2J} \left(\frac{t_1 + t}{t_1} - \frac{t}{t_1} e^{-2t_1} \right) \varphi + \\
 &\quad + \frac{2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{\beta_k} \frac{\operatorname{sh} \beta_k \varphi}{\operatorname{sh} \beta_k \varphi_1} \sin \beta_k t.
 \end{aligned} \quad (2.7)$$

в области $(-t_1 < t \leq 0, 0 < \varphi \leq \varphi_1)$.

$$\begin{aligned}
 F_2(t, \varphi) &= C \sin \varphi \left[e^{3t} + e^{-3t} \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t_1} - \frac{\operatorname{sh}(t_1 + t)}{\operatorname{sh} t_1} \right] + \frac{Pb^3 e^{-2t_1}}{J} \operatorname{sh} t \cdot \sin \varphi - \\
 &\quad - \frac{Pb^2 x_0}{4J} e^{2t} \sin 2\varphi - \frac{Pb^2 x_0 e^{-2t_1}}{2J} \varphi - \frac{Pb^3}{2J} \left[\frac{2(1 - e^{-3t_1})}{3} \frac{\varphi - \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} \sin \varphi_2 + \right. \\
 &\quad + \left. \frac{x_0 \varphi_1 (1 - e^{-2t_1})}{b} \frac{\varphi_2 - \varphi}{\varphi_2 - \varphi_1} \right] \frac{t_1 + t}{t_1} - \frac{2 \sin \varphi_2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \frac{\operatorname{sh} \beta_k (\varphi - \varphi_1)}{\operatorname{sh} \beta_k (\varphi_2 - \varphi_1)} \sin \beta_k t + \\
 &\quad + \frac{2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{\beta_k} \frac{\operatorname{sh} \beta_k (\varphi_2 - \varphi)}{\operatorname{sh} \beta_k (\varphi_2 - \varphi_1)} \sin \beta_k t - \\
 &\quad - \frac{2}{\varphi_2 - \varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{\delta_k} \frac{\operatorname{sh} \delta_k (t_1 + t)}{\operatorname{sh} \delta_k t_1} \sin \delta_k (\varphi - \varphi_1)
 \end{aligned} \quad (2.8)$$

в области $(-t_1 < t \leq 0, \varphi_1 \leq \varphi < \varphi_2)$.

$$\begin{aligned}
 F_3(t, \varphi) &= C \sin \varphi \left[e^{3t} - e^{-3t} \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t_2} - \frac{\operatorname{sh}(t_2 - t)}{\operatorname{sh} t_2} \right] + \frac{Pb^3 e^{2t_2}}{J} \operatorname{sh} t \cdot \sin \varphi + C_2 - \\
 &\quad - \frac{Pb^2 x_0}{4J} e^{2t} \sin 2\varphi + \frac{Pb^3}{3J} (e^{3t_2} - 1) \frac{(\varphi_2 - \varphi) \sin \varphi_1 + (\varphi - \varphi_1) \sin \varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1} \cdot \frac{t_2 - t}{t_2}
 \end{aligned}$$

$$-\frac{\rho b^2 X_0}{2J} e^{2i_1 \cdot \varphi} + \frac{2}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} E_k \left[\sin \varphi_1 \frac{\operatorname{sh} \gamma_k (\varphi_2 - \varphi)}{\operatorname{sh} \gamma_k (\varphi_2 - \varphi_1)} + \sin \varphi_2 \frac{\operatorname{sh} \gamma_k (\varphi - \varphi_1)}{\operatorname{sh} \gamma_k (\varphi_2 - \varphi_1)} \right] \sin \gamma_k t -$$

$$-\frac{2}{\varphi_2 - \varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{\delta_k} \frac{\operatorname{sh} \delta_k (t_2 - t)}{\operatorname{sh} \delta_k t_2} \sin \delta_k (\varphi - \varphi_1) \quad (2.9)$$

в области $(0 < t < t_2, \varphi_1 < \varphi \leq \varphi_2)$.

где

$$D_k = [1 + (-1)^{k+1} e^{-3t_1}] \left[8C \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 + 1)(\beta_k^2 + 9)} - \frac{\rho b^3}{J} \frac{\beta_k^2 - 3}{\beta_k (\beta_k^2 + 1)(\beta_k^2 + 9)} \right] \quad (2.10)$$

$$E_k = [1 + (-1)^{k+1} e^{3t_2}] \left[8C \frac{\gamma_k}{(\gamma_k^2 + 1)(\gamma_k^2 + 9)} - \frac{\rho b^3}{J} \frac{\gamma_k^2 - 3}{\gamma_k (\gamma_k^2 + 1)(\gamma_k^2 + 9)} \right],$$

$$\beta_k = \frac{k\pi}{t_1}, \quad \gamma_k = \frac{k\pi}{t_2}, \quad \delta_k = \frac{k\pi}{\varphi_2 - \varphi_1} \quad (2.11)$$

$$C = \frac{\rho b^3}{8J} \frac{1 + 2\sigma}{1 + \sigma} \quad (2.12)$$

Для определения неизвестных коэффициентов X_k и Y_k получаем совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений

$$X_p = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kp} Y_k + P_p, \quad (p=1, 2, \dots) \quad (2.13)$$

$$Y_p = \sum_{k=1}^{\infty} b_{kp} X_k + Q_p,$$

где

$$a_{kp} = \frac{2\beta_p}{(\varphi_2 - \varphi_1) [\operatorname{cth} \beta_p \varphi_1 + \operatorname{cth} \beta_p (\varphi_2 - \varphi)]} \cdot \frac{1}{\delta_k^2 + \beta_p^2}, \quad (2.14)$$

$$b_{kp} = \frac{2\beta_p}{t_1 [\operatorname{cth} \delta_p t_1 + \operatorname{cth} \delta_p t_2]} \cdot \frac{1}{\beta_k^2 + \delta_p^2},$$

$$P_p = \frac{1}{\operatorname{ch} \beta_p \varphi_1 + \operatorname{cth} \beta_p (\varphi_2 - \varphi_1)} \left\{ \frac{\rho b^3}{2J \beta_p (\varphi_2 - \varphi_1)} \left[\frac{2(1 - e^{-3t_1})}{3} \sin \varphi_2 - \frac{X_0 \varphi_2}{b} (1 - e^{-2t_1}) \right] - \frac{\beta_p D_p}{\operatorname{sh} \beta_p (\varphi_2 - \varphi_1)} \sin \varphi_2 \right\}, \quad (2.15)$$

$$Q_p = \frac{\delta_p}{\operatorname{cth} \delta_p t_1 + \operatorname{cth} \delta_p t_2} \left\{ B_p \left[\sin \varphi_1 + (-1)^{p+1} \sin \varphi_2 \right] \left(\operatorname{cth} \delta_p t_2 - \frac{e^{3t_2}}{\operatorname{sh} \delta_p t_2} \right) + \right. \\ \left. + \sin \varphi_2 \left(\operatorname{cth} \delta_p t_1 - \frac{e^{-3t_1}}{\operatorname{sh} \delta_p t_1} \right) \right\} + \left(\frac{Pb^3}{2J} - C \right) \left(\operatorname{cth} t_1 - \frac{e^{-3t_1}}{\operatorname{sh} t_1} \right) \frac{\sin \varphi_1}{\delta_p^2 - 1} + \\ + \left(3C - \frac{Pb^3}{2J} \right) \frac{\sin \varphi_1}{\delta_p^2 - 9} - \frac{Pb^2 x_0}{J} \frac{(1 - e^{-2t_1}) \varphi_1}{2t_1 \delta_p^2} \left. \right\}, \quad (2.16)$$

$$B_p = 8C \frac{\delta_p}{(\delta_p^2 - 1)(\delta_p^2 - 9)} - \frac{Pb^3}{J} \frac{\delta_p^2 + 3}{\delta_p(\delta_p^2 - 1)(\delta_p^2 - 9)}. \quad (2.17)$$

Покажем, что системы (2.13) вполне регулярны. Действительно, для суммы модулей коэффициентов систем (2.13) имеют место следующие неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{kp}| = \frac{\operatorname{cth} \beta_p (\varphi_2 - \varphi_1) - 1/\beta_p (\varphi_2 - \varphi_1)}{\operatorname{cth} \beta_p (\varphi_2 - \varphi_1) + \operatorname{cth} \beta_p \varphi_1} \leq \frac{1}{2}, \quad (2.18)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_{kp}| = \frac{\operatorname{cth} \delta_p t_1 - 1/\delta_p t_1}{\operatorname{cth} \delta_p t_1 + \operatorname{cth} \delta_p t_2} \leq \frac{1}{2},$$

т. е. системы (2.13) оказались вполне регулярными.

Легко увидеть из (2.15)–(2.17), что свободные члены систем (2.13) ограничены сверху и, при $p \rightarrow \infty$, стремятся к нулю.

Числовые примеры. В качестве числовых примеров рассмотрен изгиб стержней с поперечным сечением в виде кольцевого сектора с внешними симметрично расположенными зубцами, с размерами $t_1 = t_2 = 0,270$; $\varphi_2 - \varphi_1 = 0,2366$; $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ и π .

Для этих случаев вычислены значения касательных напряжений в некоторых точках, которые показаны на фиг. 2 и 3.

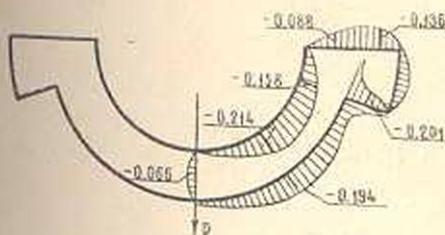
Частные случаи. Рассмотрим изгиб стержня с поперечным сечением в виде кольцевого сектора с трещиной (фиг. 4). Решение этой задачи получается из формул (2.7)–(2.9), переходя к пределу $\varphi_1 = 0$. Для функции напряжений получаем следующие выражения

$$F_2(t, \varphi) = C \sin \varphi \left[e^{3t} + e^{-3t} \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t_1} - \frac{\operatorname{sh}(t_1 + t)}{\operatorname{sh} t_1} \right] + \frac{Pb^3 e^{-2t_1}}{J} \operatorname{sh} t \cdot \sin \varphi - \\ - \frac{Pb^2 x_0}{4J} e^{2t} \sin 2\varphi - \frac{Fb^2 x_0 e^{-2t_1}}{2J} \varphi - \frac{Pb^3 \sin \varphi_2}{3J \varphi_2} (1 - e^{-3t_1}) \varphi \frac{t_1 + t}{t_1} - \\ - \frac{2 \sin \varphi_2}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} B_k}{\operatorname{cth} \delta_k t_1 + \operatorname{cth} \delta_k t_2} \left(\operatorname{cth} \delta_k t_1 + \operatorname{cth} \delta_k t_2 - \frac{e^{-3t_1}}{\operatorname{sh} \delta_k t_1} - \frac{e^{3t_2}}{\operatorname{sh} \delta_k t_2} \right) \times \\ \times \frac{\operatorname{sh} \delta_k (t_1 + t)}{\operatorname{sh} \delta_k t_1} \sin \delta_k \varphi - \frac{2 \sin \varphi_2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \frac{\operatorname{sh} \beta_k \varphi}{\operatorname{sh} \beta_k \varphi_2} \sin \beta_k t \quad (2.19)$$

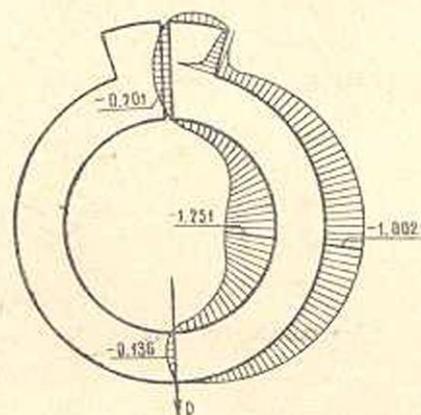
в области $(0 < \varphi < \varphi_2, -t_1 < t < 0)$,

$$\begin{aligned}
 F_2(t, \varphi) = & C \sin \varphi \left[e^{3t} - e^{3t_2} \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t_2} - \frac{\operatorname{sh} (t_2 - t)}{\operatorname{sh} t_2} \right] + \frac{Pb^3 e^{2t_2}}{J} \operatorname{sh} t \cdot \sin \varphi - \\
 & - \frac{Pb^3 X_0}{4J} e^{2t} \sin 2\varphi + \frac{Pb^3 \sin \varphi_2}{3J\varphi_2} (e^{3t_2} - 1) \varphi \frac{t_2 - t}{t_2} - \frac{Pb^2 X_0}{2J} e^{2t_2} \varphi - \\
 & - \frac{2 \sin \varphi_2}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} B_k}{\operatorname{cth} \delta_k t_1 + \operatorname{cth} \delta_k t_2} \left(\operatorname{cth} \delta_k t_1 + \operatorname{cth} \delta_k t_2 - \frac{e^{-3t_1}}{\operatorname{sh} \delta_k t_1} - \frac{e^{3t_2}}{\operatorname{sh} \delta_k t_2} \right) \times \\
 & \times \frac{\operatorname{sh} \delta_k (t_2 - t)}{\operatorname{sh} \delta_k t_2} \sin \delta_k \varphi + \frac{2 \sin \varphi_2}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} E_k \frac{\operatorname{sh} \gamma_k \varphi}{\operatorname{sh} \gamma_k \varphi_2} \sin \gamma_k t \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

в области $(0 < \varphi < \varphi_2, 0 < t < t_2)$.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Для рассмотренного случая использованы значения

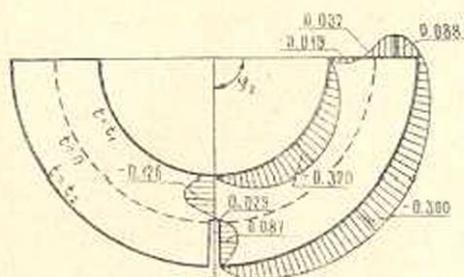
$$X_p = 0,$$

(2.21)

$$Y_p = \frac{(-1)^{p+1} \delta_p \sin \varphi_2}{\operatorname{cth} \delta_p t_1 + \operatorname{cth} \delta_p t_2} \left(\operatorname{cth} \delta_p t_1 + \operatorname{cth} \delta_p t_2 - \frac{e^{-3t_1}}{\operatorname{sh} \delta_p t_1} - \frac{e^{3t_2}}{\operatorname{sh} \delta_p t_2} \right) B_p,$$

полученные из (2.13)–(2.16) соответствующим предельным переходом.

Для этого случая приведен числовой пример, когда $t_1 = t_2 = 0,270$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$. Вычислены значения касательных напряжений в некоторых точках контура, которые приведены на фиг. 4.



Фиг. 4.

При $\varphi_2 = \pi$ (фиг. 5) формулы (2.19) и (2.20) упрощаются и принимают вид

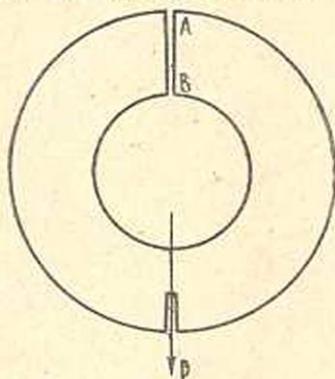
$$F_2(t, \varphi) = C \sin \varphi \left[e^{3t} + e^{-3t_1} \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t_1} - \frac{\operatorname{sh} (t_1 + t)}{\operatorname{sh} t_1} \right] + \frac{Pb^3 e^{-2t_1}}{J} \operatorname{sh} t \cdot \sin \varphi -$$

$$-\left(2C - \frac{Pb^3}{J}\right) \frac{e^{2t_1} - e^{-2t_1}}{\operatorname{cth} t_1 + \operatorname{cth} t_2} \frac{\operatorname{sh}(t_1 + t)}{\operatorname{sh} t_1} \sin \varphi, \quad (2.22)$$

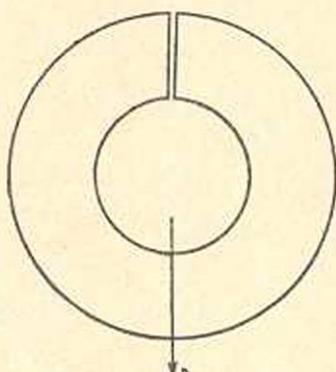
$$F_3(t, \varphi) = C \sin \varphi \left[e^{3t} - e^{3t_2} \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t_2} - \frac{\operatorname{sh}(t_2 - t)}{\operatorname{sh} t_2} \right] + \frac{Pb^3 e^{2t_2}}{J} \operatorname{sh} t \sin \varphi -$$

$$-\left(2C - \frac{Pb^3}{J}\right) \frac{e^{2t_2} - e^{-2t_2}}{\operatorname{cth} t_1 + \operatorname{cth} t_2} \frac{\operatorname{sh}(t_2 - t)}{\operatorname{sh} t_2} \sin \varphi. \quad (2.23)$$

Переходя к пределу при $t_2 = 0$, из формулы (2.22) получим формулу функции напряжений для кольца с трещиной (фиг. 6)



Фиг. 5.



Фиг. 6.

$$F_2(t, \varphi) = C \sin \varphi \left[e^{3t} + e^{-3t} \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t_1} - \frac{\operatorname{sh}(t_1 + t)}{\operatorname{sh} t_1} \right] +$$

$$+ \frac{Pb^3 e^{-2t_1}}{J} \operatorname{sh} t \cdot \sin \varphi. \quad (2.24)$$

Ниже приводятся значения напряжений на некоторых линиях ($\nu = 0,3$, $t_1 = 0,270$)

$$\tau_{\varphi r} \left(-\frac{t_1}{2}, \varphi \right) = \frac{Pb^2}{J} 0,00863 \cdot \cos \varphi,$$

$$\tau_{r\varphi}(0, \varphi) = -\frac{Pb^2}{J} 0,67352 \cdot \sin \varphi,$$

$$\tau_{\varphi r} \left(-\frac{t_1}{2}, \varphi \right) = -\frac{Pb^2}{J} 0,78528 \cdot \sin \varphi,$$

$$\tau_{r\varphi}(-t_1, \varphi) = -\frac{Pb^2}{J} 0,90922 \cdot \sin \varphi.$$

Из формулы (2.19), предельным переходом $t_2 = 0$, после некоторого преобразования получим решение для кольцевого сектора

$$F_2(t, \varphi) = Ce^{3t} \left(\sin \varphi - \sin \varphi_2 \frac{\sin 3\varphi}{\sin 3\varphi_2} \right) - \frac{Pb^3}{2J} e^t \sin \varphi -$$

$$-\frac{Pb^2x_0}{4J}e^{2t}\sin 2\varphi + \frac{Pb^3}{6J}e^{3t}\frac{\sin 3\varphi}{\sin 3\varphi_2}\sin \varphi_2 +$$

$$+ \frac{2\sin \varphi_2}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} B_k \left[\frac{\operatorname{sh} \delta_k(t_1+t)}{\operatorname{sh} \delta_k t_1} - e^{-3t} \frac{\operatorname{sh} \delta_k t}{\operatorname{sh} \delta_k t_1} \right] \sin \delta_k \varphi \quad (2.25)$$

в области $(-t_1 < t < 0, 0 < \varphi < \varphi_2)$.

Отсюда, перейдя к пределу при $t_1 \rightarrow \infty$ ($ae^{t_1} = b$), получим решение для кругового сектора (фиг. 7)

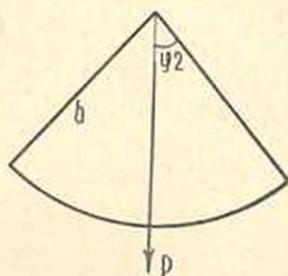
$$F_2(t, \varphi) = Ce^{3t} \left(\sin \varphi - \sin \varphi_2 \frac{\sin 3\varphi}{\sin 3\varphi_2} \right) - \frac{Pb^3}{2J} e^t \sin \varphi -$$

$$-\frac{Pb^2x_0}{4J} e^{2t} \sin 2\varphi + \frac{Pb^3}{6J} \sin \varphi_2 \frac{\sin 3\varphi}{\sin 3\varphi_2} e^{3t} +$$

$$+ \frac{2\sin \varphi_2}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} B_k e^{\delta_k t} \sin \delta_k \varphi \quad (2.26)$$

в области $(-\infty < t < 0, 0 < \varphi < \varphi_2)$.

Последние две формулы совпадают с результатами, полученными М. Сигаром и К. Пирсоном [8] другим путем.



Фиг. 7.

Интересно отметить, что в этом случае при $\frac{\pi}{2} < \varphi_2 \leq \pi$ касательные напряжения в точке O не обращаются в бесконечность.

Из последней формулы, при $\varphi_2 = \pi$, получается функция напряжений при изгибе круглого вала с трещиной до центра

$$F_2(t, \varphi) = C \sin \varphi [e^{3t} - e^t]. \quad (2.27)$$

Так как эта функция совпадает с функцией напряжений для круглого вала без трещины, полученной Л. С. Лейбензоном [4], то следует, что в этом случае наличие трещины не влияет на значения касательных напряжений.

§ 3. Изгиб стержня с поперечным сечением в виде кольца с секториальной выточкой

Рассматривается задача изгиба стержня с поперечным сечением в виде кругового кольца с симметрично расположенной выточкой, когда изгибающая сила P проходит по оси симметрии (фиг. 8).

Интегрируя граничное условие (1.6) по контуру сечения, получим

$$P(-t_1, \varphi) = \frac{Pb^3 e^{-t_1}}{2J} \left[-(1 - e^{-2t_1}) \sin \varphi - \frac{x_0 e^{-t_1}}{2b} (2\varphi + \sin 2\varphi) \right],$$

$$F(0, \varphi) = -\frac{Pb^2 x_0}{4J} (2\varphi + \sin 2\varphi),$$

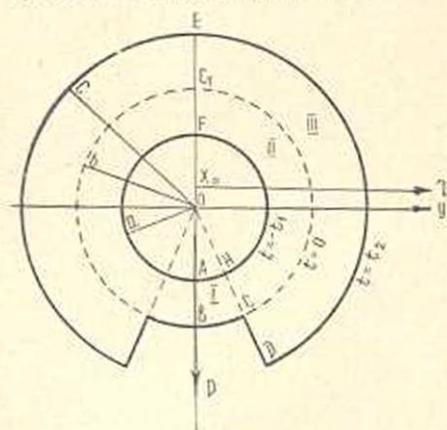
$$F(t_2, \varphi) = \frac{Pb^3 e^{t_2}}{2J} \left[(e^{2t_2} - 1) \sin \varphi - \frac{x_0 e^{t_2}}{2b} (2\varphi + \sin 2\varphi) \right] + C_2,$$

$$F(t, \varphi_1) = \frac{Pb^3 \sin \varphi_1}{2J} \left[\frac{e^{3t}}{3} - e^t - \frac{x_0}{b} e^{2t} \cos \varphi_1 \right] + C_3,$$

(3.1)

$$F(t, \pi) = C_1, \quad F(t, 0) = 0.$$

Обеспечивая непрерывность граничных значений функции напряжений в точках C, D, E, F , получим значения $C_i (i = 1, 2, 3)$ и формулу для координаты центра тяжести поперечного сечения вала



Фиг. 8.

$$C_1 = -\frac{Pb^2 e^{-2t_1} x_0 \pi}{2J},$$

$$C_2 = \frac{Pb^2 (e^{2t_2} - e^{-2t_1}) x_0 \pi}{2J}, \quad (3.2)$$

$$C_3 = \frac{Pb^3}{2J} \left[\frac{2}{3} \sin \varphi_1 - \frac{x_0 \varphi_1}{b} \right],$$

$$\frac{x_0}{b} = -\frac{2}{3} \times$$

$$\times \frac{(e^{3t_2} - 1) \sin \varphi_1}{(e^{2t_2} - e^{-2t_1}) \pi - (e^{2t_2} - 1) \varphi_1}. \quad (3.3)$$

В области $ABCDEFH$ функцию $F(t, \varphi)$ ищем в виде (2.4). Тогда из (3.1) и (2.4) для функции $F_i(t, \varphi) (i = 1, 2, 3)$ получим следующие граничные условия и условия сопряжения

$$F_1(t, 0) = 0,$$

$$F_1(0, \varphi) = -\frac{Pb^2 x_0}{4J} (2\varphi + \sin 2\varphi),$$

$$F_1(-t_1, \varphi) = F_2(-t_1, \varphi) =$$

$$= \frac{Pb^3 e^{-t_1}}{2J} \left[-(1 - e^{-2t_1}) \sin \varphi - \frac{x_0 e^{-t_1}}{2b} (2\varphi + \sin 2\varphi) \right],$$

$$F_3(t_2, \varphi) = \frac{Pb^3 e^{t_2}}{2J} \left[(e^{2t_2} - 1) \sin \varphi - \frac{x_0 e^{t_2}}{2b} (2\varphi + \sin 2\varphi) \right] + C_2,$$

$$F_3(t, \varphi_1) = \frac{Pb^3 \sin \varphi_1}{2J} \left[\frac{e^{3t}}{3} - e^t - \frac{x_0}{b} e^{2t} \cos \varphi_1 \right] + C_3, \quad (3.4)$$

$$F_2(t, \pi) = F_3(t, \pi) = C_1,$$

$$F_1(t, \varphi_1) = F_2(t, \varphi_1), \quad F_2(0, \varphi) = F_3(0, \varphi), \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_1} = \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_1}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial F_3}{\partial t} \Big|_{t=0}$$

Решив уравнение (1.5) и удовлетворив условиям (3.4) и (3.5), для функций $F_i(t, \varphi)$ ($i = 1, 2, 3$) получим следующие выражения

$$F_1(t, \varphi) = C \sin \varphi \left[e^{3t} + e^{-3t_1} \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t_1} - \frac{\operatorname{sh}(t_1 + t)}{\operatorname{sh} t_1} \right] - \\ - \frac{Pb^2 x_0}{2J} \left(\frac{t_1 + t}{t_1} - \frac{t}{t_1} e^{-2t_1} \right) \varphi + \frac{Pb^3 e^{-2t_1}}{J} \operatorname{sh} t \cdot \sin \varphi - \\ - \frac{Pb^2 x_0}{4J} e^{2t} \sin 2\varphi + \frac{2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{X}_k}{\beta_k} \frac{\operatorname{sh} \beta_k \varphi}{\operatorname{sh} \beta_k \varphi_1} \sin \beta_k t \quad (3.6)$$

в области ($0 < \varphi < \varphi_1$, $-t_1 < t < 0$),

$$F_2(t, \varphi) = C \sin \varphi \left[e^{3t} + e^{-3t_1} \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t_1} - \frac{\operatorname{sh}(t_1 + t)}{\operatorname{sh} t_1} \right] - \\ - \frac{Pb^2 x_0 \varphi_1}{2J} \left(\frac{t_1 + t}{t_1} - \frac{t}{t_1} e^{-2t_1} \right) \frac{\pi - \varphi}{\pi - \varphi_1} + \frac{Pb^3 e^{-2t_1}}{J} \operatorname{sh} t \cdot \sin \varphi - \\ - \frac{Pb^2 x_0}{4J} e^{2t} \sin 2\varphi + \frac{2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{X}_k \operatorname{sh} \beta_k (\pi - \varphi)}{\beta_k \operatorname{sh} \beta_k (\pi - \varphi_1)} \sin \beta_k t - \\ - \frac{2}{\pi - \varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{Y}_k}{\delta_k} \frac{\operatorname{sh} \delta_k (t_1 + t)}{\operatorname{sh} \delta_k t_1} \sin \delta_k (\varphi - \varphi_1) \quad (3.7)$$

в области ($\varphi_1 < \varphi < \pi$, $-t_1 < t < 0$)

$$F_3(t, \varphi) = C \sin \varphi \left[e^{3t} - e^{3t_2} \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t_2} - \frac{\operatorname{sh}(t_2 - t)}{\operatorname{sh} t_2} \right] - \\ - \frac{Pb^3 \sin \varphi_1}{3J} (e^{3t_2} - 1) \frac{\pi - \varphi}{\pi - \varphi_1} \cdot \frac{t}{t_2} + \frac{Pb^3 e^{2t_2}}{J} \operatorname{sh} t \cdot \sin \varphi - \\ - \frac{Pb^2 x_0}{4J} e^{2t} \sin 2\varphi - \frac{Pb^2 x_0}{2J} \frac{\varphi_1 (\pi - \varphi_1) + \pi e^{-2t_1} (\varphi - \varphi_1)}{\pi - \varphi_1} - \\ - \frac{2}{\pi - \varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{Y}_k}{\delta_k} \frac{\operatorname{sh} \delta_k (t_2 - t)}{\operatorname{sh} \delta_k t_2} \sin \delta_k (\varphi - \varphi_1) + \\ + \frac{2 \sin \varphi_1}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} E_k \frac{\operatorname{sh} \gamma_k (\pi - \varphi)}{\operatorname{sh} \gamma_k (\pi - \varphi_1)} \sin \gamma_k t \quad (3.8)$$

в области ($\varphi_1 < \varphi < \pi$, $0 < t < t_2$),

где

$$\beta_k = \frac{k\pi}{t_1}, \quad \gamma_k = \frac{k\pi}{t_2}, \quad \delta_k = \frac{k\pi}{\pi - \varphi_1} \quad (3.9)$$

Для определения постоянных \bar{X}_k и \bar{Y}_k получаем совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений

$$\overline{X}_p = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a}_{kp} \overline{Y}_k + \overline{P}_p, \quad (p=1, 2, \dots) \quad (3.10)$$

$$\overline{Y}_p = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{b}_{kp} \overline{X}_k + \overline{Q}_p.$$

где

$$\overline{a}_{kp} = \frac{2\beta_p^2}{(\pi - \varphi_1) [\operatorname{cth} \beta_p \varphi_1 + \operatorname{cth} \beta_p (\pi - \varphi_1)]} \cdot \frac{1}{\beta_k^2 + \beta_p^2}, \quad (3.11)$$

$$\overline{b}_{kp} = \frac{2\delta_p}{t_1 [\operatorname{cth} \delta_p t_1 + \operatorname{cth} \delta_p t_2]} \cdot \frac{1}{\beta_k^2 + \beta_p^2},$$

$$\overline{Q}_p = \frac{Pb^2 x_0 \pi (1 - e^{-2t_1})}{2J\beta_p (\pi - \varphi_1) [\operatorname{cth} \beta_p \varphi_1 + \operatorname{cth} \beta_p (\pi - \varphi_1)]}, \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \overline{P}_p = & \frac{\delta_p \cdot \sin \varphi_1}{\operatorname{cth} \delta_p t_1 + \operatorname{cth} \delta_p t_2} \left\{ B_p + \left(\frac{Pb^2}{2J} - C \right) \left(\operatorname{cth} t_1 - \frac{e^{-2t_1}}{\operatorname{sh} t_1} \right) \frac{1}{\beta_p^2 - 1} + \right. \\ & \left. + \left(3C - \frac{Pb^2}{2J} \right) \frac{1}{\beta_p^2 - 9} - \frac{Pb^2 x_0 \varphi_1}{J\beta_p^2} \cdot \frac{1 - e^{-2t_1}}{2t_1 \cdot \sin \varphi_1} \right\}. \quad (3.13) \end{aligned}$$

Эти системы вполне регулярны (см. 2.18), а свободные члены этих систем ограничены сверху и, при $p \rightarrow \infty$, стремятся к нулю.

Числовой пример. В качестве числового примера рассмотрен изгиб стержня с поперечным сечением в виде кольца с трещиной. Принято

$$\frac{c}{a} = 2, \quad \frac{b}{a} = \frac{5}{3}, \quad \frac{c-b}{b-a} = \frac{1}{2}, \quad \varphi_1 = 0,2 = 11^\circ 27'$$

($t_1 = 0,51083$; $t_2 = 0,18232$). Вычислены значения касательных напряжений в некоторых точках, которые приведены в таблицах 1 и 2.

Из таблицы 1 видно, что максимальные значения касательного напряжения $\tau_{z\varphi}$ получаются на внутреннем контуре.

$$-\tau_{z\varphi}(t, \varphi) \frac{Pb^2}{J}$$

Таблица 1

$t \backslash \varphi$	0	$\frac{\varphi_1}{2}$	φ_1	$\varphi_1 + 30^\circ$	$\varphi_1 + 60^\circ$	$\varphi_1 + 90^\circ$	$\varphi_1 + 120^\circ$	$\varphi_1 + 150^\circ$	π
$-t_1$	0	0,0923	0,1480	0,6497	0,9856	1,0354	0,7981	0,3405	0
$-\frac{t_1}{2}$	0	0,0704	0,1279	0,5264	0,8025	0,8122	0,6482	0,2774	0
0	0	0,0463	∞	0,4680	0,7008	0,7395	0,5686	0,2385	0
$\frac{t_2}{2}$	—	—	0	0,4377	0,6447	0,6799	0,5289	0,2244	0
t_2	—	—	0	0,4038	0,6105	0,6500	0,5029	0,2110	0

$$\tau_{zr} \left(-\frac{t_1}{2}, \varphi \right) / \frac{Pb^2}{J}$$

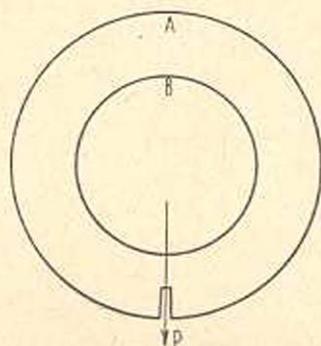
Таблица 2

$\varphi = 0$	$\frac{\varphi_1}{2}$	φ_1	$\varphi_1 + 30^\circ$	$\varphi_1 + 60^\circ$	$\varphi_1 + 90^\circ$	$\varphi_1 + 120^\circ$	$\varphi_1 + 150^\circ$	π
0,0630	0,0640	0,0693	0,0764	0,0311	-0,0246	0,0775	-0,1108	-0,1177

Частные случаи. Из формул (3.6) — (3.13), перейдя к пределу при $\varphi_1 = 0$, получим решение задачи изгиба для полого вала с трещиной (фиг. 9). Это решение совпадает с формулами (2.22) и (2.23), т. е. наличие трещины AB на оси симметрии $\varphi = \pi$, $(-t_1, t_2)$ в этом случае не имеет никакого значения для касательных напряжений.

Для полого вала без трещины функция напряжений принимает вид

$$F_1(t, \varphi) = C \sin \varphi \left[e^{3t} + e^{-3t} \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t_1} - \frac{\operatorname{sh}(t_1 + t)}{\operatorname{sh} t_1} \right] + \frac{Pb^3 e^{-2t}}{J} \operatorname{sh} t \cdot \sin \varphi. \quad (3.14)$$



Фиг. 9.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 24 XI 1960

Ս. Հ. Քարլոյան

ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ԱԿՈՍ ԿՍՄ ԱՏԱՄՆԵՐ ՌԻՆԵՑՈՂ ԿԼՈՐ ՋՈՂԵՐԻ ԾՌՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկվում է պրիզմատիկ ձողերի ծաման խնդիրը, երբ ձողի լայնական կտրվածքը իրենից ներկայացնում է՝

ա) սիմետրիկ ձևով դասավորված ատամներով օղակալին սեկտոր,

բ) օղակալին սեկտորի տևք անկյոյ սկստով շրջանալին օղակ, երբ ձող ուժը անցնում է հատվածքի սիմետրիալի առանցքով:

Խնդիրը բերվում է գծալին անվերջ սիստեմների լուծմանը, ցույց է տրվում, որ այդ սիստեմները լիովին սեղալյար են, իսկ ազատ անգամներն

անեն $O\left(\frac{1}{k}\right)$ կարգը: Դիտարկված են մի քանի մասնավոր դեպքեր, բերված

են թվալին օրինակներ:

Նման խնդիրները դիտարկվել են Լեյբնիզոսի [4], Մաիլենսոնի [5, 6] ու Սիդարի և Պիրսոնի [8] աշխատություններում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х. Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. „ПММ“, 13, в. 1, 1949.
2. Абрамян Б. Л. Кручение круглых цилиндрических стержней с продольными пазами клиновидной формы. „ДАН АрмССР“, 28, № 3, 1959.
3. Абрамян Б. Л., Баблюк А. А. Кручение круглых стержней, имеющих продольные выточки. „ПММ“, 24, № 2, 1960.
4. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. Огиз, Гостехиздат, М.—Л., 1947.
5. Stevenson A. C. The centre of flexure of a hollow shaft. „Proc. Lond. Math. Soc.“ (2), 50, 1949.
6. Stevenson A. C. Flexure with shear and associated torsion in prisms of uni-axial and asymmetric cross-sections. „Philosophical Transactions of the Royal Society of London“, Ser. A., vol. 237, 1939.
7. Зволлинский Н. В. Некоторые случаи точного решения проблемы о центре изгиба. „Труды ЦАГИ“, вып. 249, 1936.
8. Mary Seegar, Karl Pearson. De Saint-Venant solution for the Flexure... „Proc. Roy. Soc.“ Ser. A, vol. 96, № A. 676, 1919.
9. Бурак Я. П. Деякі задачі кручення та згину призматичних стержнів. Изд. АН УкрССР, Киев, 1959.
10. Юнг, Элдертон и Парсон (Young, Elderton and K. Pearson). On the torsion resulting from flexure in prismatic cross sections of uniaxial symmetry only. „Drapers Company Research Memoirs“, Tech. Series 7, 1918, 175.