ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 2, 1961 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

Р. А. Оганян

Разложение по собственным и присоединенным функциям краевой задачи, порожденной несамосопряженным, сингулярным дифференциальным операторам второго порядка и краевым условием, зависящим от λ

Рассмотрим краевую задачу на полуоси $[0, \infty)$

$$y'' - q(x)\,y + \lambda^2 y = 0, \tag{A}$$

$$y'(0) - h(\lambda)\,y(0) = 0, \tag{B}$$

где $q(x)$ — комплекснозначная функция, суммируемая на полуоси $[0, \infty)$

$$\int_0^\infty |q(x)|\,dx, \tag{1}$$

а $h(\lambda)$ — четная и мероморфная функция во всей λ — плоскости, удовлетворяющая условию

$$I\lambda - h(\lambda) \to \infty, \text{ когда } \lambda \to \infty, \quad I\lambda \geqslant 0. \tag{2}$$

Целью настоящей статьи является доказательство формул разложения по собственным и присоединенным функциям краевой задачи $(A)-(B)$. Для вещественных $q(x)$ задачи с краевым условием, зависящим от λ, рассмотрены А. В. Штраусом [4]. В случае, когда $(1+x^2)\,q(x)$ — комплекснозначная функция, суммируемая на полуоси $[0, \infty)$, а $h(\lambda) \equiv \text{const}$, формулы разложения получены М. А. Наймарком [1] и Б. Я. Левиным [3]. Метод доказательства, предложенный в настоящей статье, по существу совпадает с вычетным методом Коши и отличается от методов, используемых в [1, 2, 3, 4].

§ 1. Определение и свойства некоторых решений дифференциального уравнения (A)

Как известно [2], в случае (1) уравнение (A) имеет одно решение — $e(\lambda, x)$ $(I\lambda \geqslant 0,\ 0 \leqslant x < \infty)$, удовлетворяющее интегральному уравнению

$$e(\lambda, x) = e^{i\lambda x} - \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda} q(t) e(\lambda, t)\, dt,$$

причем $e(\lambda, x)$—при фиксированном x—голоморфная функция от λ в полуплоскости $I\lambda > 0$ и непрерывная в $I\lambda \geqslant 0$, $\lambda \neq 0$.

При $\lambda \to \infty$ имеют место асимптотические формулы

$$e(\lambda, x) = e^{i\lambda x}\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right], \quad e'(\lambda, x) = i\lambda e^{i\lambda x}\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right] \tag{1.1}$$

равномерно относительно x из интервала $[0, \infty)$; для $I\lambda = 0$

$$e(\lambda, 0)\, e'(-\lambda, 0) - e'(\lambda, 0)\, e(-\lambda, 0) = -2i\lambda. \tag{1.2}$$

Пусть $v(\lambda, x)$, $c(\lambda, x)$, $s(\lambda, x)$—решения дифференциального уравнения (A), удовлетворяющие условиям:

$$v(\lambda, 0) = 1, \quad v'(\lambda, 0) = h(\lambda),$$

$$c(\lambda, 0) = 1, \quad c'(\lambda, 0) = 0,$$

$$s(\lambda, 0) = 0, \quad s'(\lambda, 0) = \lambda.$$

Заметим, что

$v(\lambda, x)$—удовлетворяет краевому условию (B) и при фиксированном x является четной и мероморфной функцией от λ во всей λ—плоскости;

$c(\lambda, x)$, $s(\lambda, x)$—при фиксированном x—целые функции от λ, причем $s(\lambda, x)$—нечетная;

при $\lambda \to \infty$, $I\lambda \geqslant 0$ имеет место асимптотическая формула

$$s(\lambda, x) = \sin\lambda x + e^{-i\lambda x} O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{1.3}$$

равномерно относительно x из любого конечного промежутка полуоси $[0, \infty)$.

Для удобства введем следующие обозначения

$$a(\lambda) = e'(\lambda, 0) - h(\lambda)\, e(\lambda, 0), \quad \psi(\lambda, x) \equiv \frac{\lambda e(\lambda, x)}{a(\lambda)}, \quad m(\lambda) \equiv \frac{\lambda e(\lambda, 0)}{a(\lambda)}.$$

Из определения решений дифференциального уравнения (A) $e(\lambda, x)$, $v(\lambda, x)$, $c(\lambda, x)$, $s(\lambda, x)$, $\psi(\lambda, x)$ и из единственности решения задачи Коши следует, что

$$v(\lambda, x) = c(\lambda, x) + \frac{h(\lambda)}{\lambda} s(\lambda, x), \tag{1.4}$$

$$\psi(\lambda, x) = s(\lambda, x) + m(\lambda)\, v(\lambda, x), \tag{1.5}$$

$$\frac{\lambda v(\lambda, x)}{a(\lambda)} = -\frac{s(\lambda, x)}{e(\lambda, 0)} + \frac{\lambda e(\lambda, x)}{a(\lambda)\, e(\lambda, 0)}. \tag{1.6}$$

Пусть K—множество всех финитных функций на $[0, \infty)$ с суммируемыми производными. Для обобщенных преобразований Фурье функции $f(x)$ из K введем следующие обозначения

$$V_f(t)=\int\limits_0^\infty f(x)\,v(\lambda, x)\,dx, \qquad C_f(\lambda)=\int\limits_0^\infty f(x)\,c(\lambda, x)\,dx,$$

$$S_f(\lambda)=\int\limits_0^\infty f(x)\,s(\lambda, x)\,dx, \qquad \Psi_f(\lambda)=\int\limits_0^\infty f(x)\,\psi(\lambda, x)\,dx.$$

Из (1.4) и (1.5) следует, что

$$V_f(\lambda)=C_f(\lambda)+\frac{h(\lambda)}{\lambda}S_f(\lambda), \tag{1.7}$$

$$\Psi_f(\lambda)=S_f(\lambda)+m(\lambda)\,V_f(\lambda). \tag{1.8}$$

Пусть
$$\varphi(\lambda)\equiv\frac{1}{a(\lambda)\,e(\lambda, 0)}.$$

Лемма. *При* $\lambda\to\infty$, $I\lambda\geqslant 0$ *имеют место асимптотические формулы*

$$\frac{\lambda v(\lambda, x)}{a(\lambda)}=-\sin\lambda x+e^{-i\lambda x}O\left(\frac{1}{\lambda}\right)+e^{i\lambda x}O\left(\frac{1}{\lambda}\right)+$$
$$+e^{i\lambda x}\varphi(\lambda)\,\lambda+e^{i\lambda x}\varphi(\lambda)\,O(1), \tag{1.9}$$

$$\frac{\lambda v(\lambda, x)}{a(\lambda)}=e^{-i\lambda x}O(1)+e^{i\lambda x}O(1)+e^{i\lambda x}\varphi(\lambda)\,\lambda+e^{i\lambda x}\varphi(\lambda)\,O(1); \tag{1.10}$$

причем при $\lambda\to\infty$, $I\lambda\geqslant 0$: $\varphi(\lambda)\to 0$.

Доказательство. Подставляя в (1.6) асимптотические формулы для $e(\lambda, x)$, $s(\lambda, x)$ получим

$$\frac{\lambda v(\lambda, x)}{a(\lambda)}=-\frac{\sin\lambda x+e^{-i\lambda x}O\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{1+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)}+e^{i\lambda x}\left[1+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]\varphi(\lambda)\,\lambda=$$

$$=-\left[1+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]\left[\sin\lambda x+e^{-i\lambda x}O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]+e^{i\lambda x}\varphi(\lambda)\,\lambda+e^{i\lambda x}\varphi(\lambda)\,O(1)=$$

$$=-\sin\lambda x+e^{-i\lambda x}O\left(\frac{1}{\lambda}\right)+\sin\lambda x\,O\left(\frac{1}{\lambda}\right)+e^{-i\lambda x}O\left(\frac{1}{\lambda}\right)+$$
$$+e^{i\lambda x}\varphi(\lambda)\,\lambda+e^{i\lambda x}\varphi(\lambda)\,O(1).$$

Отсюда, ввиду

$$\sin\lambda x\,O\left(\frac{1}{\lambda}\right)=e^{i\lambda x}O\left(\frac{1}{\lambda}\right)+e^{-i\lambda x}O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

получим (1.9). А из (1.9), ввиду

$$\sin\lambda x = \frac{e^{i\lambda x} - e^{-i\lambda x}}{2i},$$

получим (1.10). Теперь покажем, что при $\lambda \to \infty$, $I\lambda \geqslant 0$

$$\varphi(\lambda) \to 0.$$

Действительно. Из определения $a(\lambda)$ и (1.1) следует, что

$$a(\lambda) \equiv e'(\lambda, 0) - h(\lambda)\, e(h, 0) = i\lambda\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right] - h(\lambda)\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right] =$$

$$= i\lambda - h(\lambda) + O(1) - h(\lambda)\, O\left(\frac{1}{\lambda}\right) = i\lambda - h(\lambda) + O(1) - h(\lambda) O\left(\frac{1}{\lambda}\right) +$$

$$+ i\lambda O\left(\frac{1}{\lambda}\right) - i\lambda O\left(\frac{1}{\lambda}\right) = i\lambda - h(\lambda) + [i\lambda - h(\lambda)]\, O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + O(1).$$

Отсюда, ввиду условия (2), следует, что при $\lambda \to \infty$, $I\lambda \geqslant 0$: $a(\lambda) \to \infty$, но $e(\lambda, 0) = 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ поэтому при $\lambda \to \infty$, $I\lambda \geqslant 0$: $\varphi(\lambda) \to 0$. Лемма доказана.

§ 2. Основная формула

Пусть L_R—контур, идущий по вещественной оси от $-R$ к R и обходящий в верхней полуплоскости все особенности функций $\frac{h(\lambda)}{\lambda}$, $m(\lambda)$, лежащие на отрезке вещественной оси $[-R, R]$. Пусть P_R— множество всех полюсов $\frac{h(\lambda)}{\lambda}$, лежащих на отрезке вещественной оси $[-R, R]$.

В дальнейшем существенную роль играет следующая лемма.

Лемма. *Для любой $f(x)$ из K имеет место формула*

$$\int\limits_{L_R} V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, m(\lambda)\, d\lambda = \int\limits_{L_R} \psi(\lambda, x) \int\limits_0^x f(t)\, v(\lambda, t)\, dt\, d\lambda +$$

$$\int\limits_{L_R} v(\lambda, x) \int\limits_x^\infty f(t)\, \psi(\lambda, t)\, dt\, d\lambda + \pi i \sum_{P_R} \operatorname{Res}\left\{V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, \frac{\lambda}{h(\lambda)}\right\}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Из (1.8)

$$V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, m(\lambda) = \Psi_f(\lambda)\, v(\lambda, x) - S_f(\lambda)\, v(\lambda, x)$$

отсюда

$$\int\limits_{L_R} V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, m(\lambda)\, d\lambda = \int\limits_{L_R} \Psi_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, d\lambda - \int\limits_{L_R} S_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, d\lambda. \tag{2.2}$$

Очевидно, что

$$\int_{L_R} \Psi_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, dx = \int_{L_R} v(\lambda, x) \int_0^x f(t)\, \psi(\lambda, t)\, dt\, d\lambda +$$

$$+ \int_{L_R} v(\lambda, x) \int_x^\infty f(t)\, \psi(\lambda, t)\, dt\, d\lambda. \tag{2.3}$$

Два раза применив (1.5) получим

$$\int_{L_R} v(\lambda, x) \int_0^x f(t)\, \psi(\lambda, t)\, dt\, d\lambda = \int_{L_R} \psi(\lambda, x) \int_0^x f(t)\, v(\lambda, t)\, dt\, d\lambda +$$

$$+ \int_{L_R} v(\lambda, x) \int_0^x f(t)\, s(\lambda, t)\, dt\, d\lambda - \int_{L_R} s(\lambda, x) \int_0^x f(t)\, v(\lambda, t)\, dt\, d\lambda. \tag{2.4}$$

Подставив (2.4) в (2.3), а потом (2.3) в (2.2), получим

$$\int_{L_R} V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, m(\lambda)\, d\lambda = \int_{L_R} \psi(\lambda, x) \int_0^x f(t)\, v(\lambda, t)\, dt\, d\lambda +$$

$$+ \int_{L_R} v(\lambda, x) \int_x^\infty f(t)\, \psi(\lambda, t)\, dt\, d\lambda + \int_{L_R} A(\lambda)\, d\lambda, \tag{2.5}$$

где

$$A(\lambda) \equiv v(\lambda, x) \int_0^x f(t)\, s(\lambda, t)\, dt - s(\lambda, x) \int_0^x f(t)\, v(\lambda, t)\, dt - S_f(\lambda)\, v(\lambda, x).$$

Покажем, что

$$\int_{L_R} A(\lambda)\, d\lambda = -\pi i \sum_{P_R} \operatorname{Res} A(\lambda). \tag{2.6}$$

Действительно. Пусть L_R^* — контур, описываемый переменной $-\lambda$, когда λ пробегает контур L_R, и направленный от R к $-R$. Заменив λ на $-\lambda$ и пользуясь нечетностью $A(\lambda)$, получим

$$\int_{L_R^*} A(\lambda)\, d\lambda = -\int_{L_R} A(-\lambda)\, d\lambda = \int_{L_R} A(\lambda)\, d\lambda.$$

Из теоремы Коши о вычетах и этой формулы получим

$$-2\pi i \sum_{P_R} \operatorname{Res} A(\lambda) = \int_{L_R} A(\lambda)\, d\lambda = \int_{L_R^*} A(\lambda)\, d\lambda = 2\int_{L_R} A(\lambda)\, d\lambda,$$

откуда следует формула (2.6).

Теперь покажем, что

$$\sum_{P_R} \operatorname{Res} A(\lambda) = -\sum_{P_R} \operatorname{Res}\left\{V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\frac{\lambda}{h(\lambda)}\right\}. \tag{2.7}$$

Из определения $A(\lambda)$

$$\sum_{P_R} \operatorname{Res} A(\lambda) = \sum_{P_R} \operatorname{Res}\left\{v(\lambda, x)\int_0^x f(t)\, s(\lambda, t)\, dt - \right.$$

$$\left. - s(\lambda, x)\int_0^x f(t)\, v(\lambda, t)\, dt\right\} - \sum_{P_R} \operatorname{Res}\{S_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\}. \tag{2.8}$$

Из (1.4) следует, что разность

$$v(\lambda, x)\int_0^x f(t)\, s(\lambda, t)\, dt - s(\lambda, x)\int_0^x f(t)\, v(\lambda, t)\, dt$$

является целой функцией, поэтому

$$\sum_{P_R} \operatorname{Res}\left\{v(\lambda, x)\int_0^x f(t)\, s(\lambda, t)\, dt - s(\lambda, x)\int_0^x f(t)\, v(\lambda, t)\, dt\right\} = 0, \tag{2.9}$$

а из (1.4) и (1.7) следует, что разность

$$S_f(\lambda)\, v(\lambda, x) - V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\frac{\lambda}{h(\lambda)}$$

регулярна на множестве P_R, поэтому

$$\sum_{P_R} \operatorname{Res}\{S_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\} = \sum_{P_R} \operatorname{Res}\left\{V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\frac{\lambda}{h(\lambda)}\right\}. \tag{2.10}$$

Из (2.8)—(2.10) следует (2.7), а из (2.5)—(2.7) следует (2.1), т. е. лемма доказана.

§ 3. Вычисление некоторых контурных интегралов

Через C_R обозначим полуокружность в верхней λ—полуплоскости радиуса R с центром в нуле, направленную по часовой стрелке.

Лемма. *Пусть* $f(x) \in K$. *Если* $\varphi(\lambda)$ *такая, что при* $\lambda \to \infty$, $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$: $\varphi(\lambda) \to 0$, *то для любого фиксированного* x *из* $(0, \infty)$ *при* $R \to \infty$

$$\int\limits_{C_R} \varphi(\lambda)\, \lambda e^{i\lambda x} \int\limits_0^\infty f(t)\, e^{i\lambda t}\, dt\, d\lambda \to 0. \tag{3.1}$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_0^\infty f(t)\, e^{i\lambda t}\, dt = \frac{i}{\lambda} f(0) - \frac{i}{\lambda} \int\limits_0^\infty f'(t)\, e^{i\lambda t} dt,$$

ввиду этого

$$\int\limits_{C_R} \varphi(\lambda)\, \lambda e^{i\lambda x} \int\limits_0^\infty f(t)\, e^{i\lambda t}\, dt\, d\lambda = i f(0) \int\limits_{C_R} \varphi(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda +$$

$$+ i \int\limits_{C_R} \varphi(\lambda)\, e^{i\lambda x} \int\limits_0^\infty f'(t)\, e^{i\lambda t}\, dt\, d\lambda, \tag{3.2}$$

но в $I\lambda > 0$

$$\left| \int\limits_0^\infty f'(t)\, e^{i\lambda t}\, dt \right| \leqslant \int\limits_0^\infty |f'(t)|\, dt < \infty$$

поэтому к обоим интегралам справа в (3.2) применима лемма Жордана.

Лемма. *Пусть $f(x) \in K$. Тогда для любого фиксированного x из $[0, \infty)$ при $R \to \infty$*

$$\int\limits_{C_R} e^{i\lambda x} \int\limits_0^x f(t)\, e^{-i\lambda t}\, O\left(\frac{1}{\lambda}\right) dt\, d\lambda \to 0, \tag{3.3}$$

$$\int\limits_{C_R} e^{-i\lambda x} \int\limits_0^\infty f(t)\, e^{i\lambda t}\, O\left(\frac{1}{\lambda}\right) dt\, d\lambda \to \infty. \tag{3.4}$$

Здесь под $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ понимается функция $\varphi(\lambda, x)$ ($I\lambda \geqslant 0$, $0 \leqslant x < \infty$), удовлетворяющая при больших $|\lambda|$ условию

$$|\varphi(\lambda, x)| \leqslant \frac{c}{|\lambda|}$$

равномерно по x из каждого конечного интервала полуоси $[0, \infty)$.

Докажем только (3.3), так как (3.4) доказывается аналогично.

Доказательство. Обозначим

$$F(\lambda) \equiv e^{i\lambda x} \int\limits_0^x f(t)\, e^{-i\lambda t}\, O\left(\frac{1}{\lambda}\right) dt.$$

Пусть

$$\lambda = R(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

Очевидно, что

$$|e^{i\lambda x}| = e^{-Rx\sin\varphi}.$$

Пользуясь этим равенством легко показать, что

$$|F(\lambda)| \leqslant \left[e^{-R\delta\sin\varphi} \int_0^{x-\delta} |f(t)|\, dt + \int_{x-\delta}^{x} |f(t)|\, dt \right] \frac{c}{R}, \tag{3.5}$$

где δ—любое число из $[0, x]$.

Перейдя к полярным координатам R и φ получим

$$\int_{C_R} F(\lambda)\, d\lambda = \int_0^{\pi} F(Re^{i\varphi})\, Rie^{i\varphi} d\varphi. \tag{3.6}$$

Из (3.6) и (3.5) следует, что

$$\left| \int_{C_R} F(\lambda)\, d\lambda \right| \leqslant \int_0^{\pi} |F(Re^{i\varphi})|\, R\, d\varphi \leqslant c \int_0^{\pi} \left[e^{-R\delta\sin\varphi} \int_0^{x} |f(t)|\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_{x-\delta}^{x} |f(t)|\, dt \right] d\varphi = c \int_0^{x} |f(t)| dt \int_0^{\pi} e^{-R\delta\sin\varphi}\, d\varphi + c\pi \int_{x-\delta}^{x} |f(t)|\, dt.$$

Однако, для любого фиксированного $\delta > 0$, при $R \to \infty$

$$\int_0^{\pi} e^{-R\delta\sin\varphi}\, d\varphi \to 0,$$

а при $\delta \to 0$

$$\int_{x-\delta}^{x} |f(t)|\, dt \to 0.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно найти сначала такое $\delta_\varepsilon > 0$, а потом такое R_ε, что

$$\left| \int_{C_R} F(\lambda)\, d\lambda \right| < \varepsilon.$$

Отсюда следует утверждение (3.3) леммы.

Лемма. *Пусть $f(x) \in K$. Тогда для любого фиксированного x из $[0, \infty)$, при $R \to \infty$*

$$\int_{C_R} \psi(\lambda, x) \int_0^{x} f(t)\, v(\lambda, t)\, dt\, d\lambda \to -\frac{i\pi}{2} f(x), \tag{3.7}$$

$$\int_{C_R} v(\lambda, x) \int_0^\infty f(t)\,\psi(\lambda, t)\,dt\,d\lambda \to -\frac{i\pi}{2} f(x).$$

Докажем только первую формулу, так как вторая доказывается аналогично.

Доказательство. Из определения $\psi(\lambda, x)$ и асимптотической формулы (1.1) следует

$$\int_{C_R} \psi(\lambda, x) \int_0^x f(t)\,v(\lambda, t)\,dt\,d\lambda = \int_{C_R} e(\lambda, x) \int_0^x f(t) \frac{\lambda v(\lambda, t)}{a(\lambda)}\,dt\,d\lambda =$$

$$= \int_{C_R} e^{i\lambda x} \int_0^x f(t) \frac{\lambda v(\lambda, t)}{a(\lambda)}\,dt\,d\lambda + \int_{C_R} O\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{i\lambda x} \int_0^x f(t) \frac{\lambda v(\lambda, t)}{a(\lambda)}\,dt\,d\lambda.$$

В первый интеграл правой части подставив (1.9), а во второй —(1.10), получим

$$\int_{C_R} \psi(\lambda, x) \int_0^x f(t)\,v(\lambda, t)\,dt\,d\lambda = -\int_{C_R} e^{i\lambda x} \int_0^x f(t) \sin \lambda t\,dt\,d\lambda +$$

$$+ \int_{C_R} e^{i\lambda x} \int_0^x f(t) \left[e^{-i\lambda t} O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + e^{i\lambda t} O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + e^{i\lambda t} \varphi(\lambda) \lambda + \right.$$

$$\left. + e^{i\lambda t} \varphi(\lambda) O(1) \right] dt\,d\lambda + \int_{C_R} O\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{i\lambda x} \int_0^x f(t) \left[e^{-i\lambda t} O(1) + \right.$$

$$\left. + e^{i\lambda t} O(1) + e^{i\lambda t} \varphi(\lambda) \lambda + e^{i\lambda t} \varphi(\lambda) O(1) \right] dt\,d\lambda.$$

Из предыдущих двух лемм и леммы Жордана следует, что последние два интеграла, при $R \to \infty$, стремятся к нулю.

Остается показать, что при $R \to \infty$

$$\int_{C_R} e^{i\lambda x} \int_0^x f(t) \sin \lambda t\,dt\,d\lambda \to \frac{i\pi}{2} f(x).$$

Пусть

$$f^*(t) = \begin{cases} f(t), & \text{для } 0 \leqslant t \leqslant x, \\ 0, & \text{для } t > x. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{C_R} e^{i\lambda x} \int_0^x f(t) \sin \lambda t\,dt\,d\lambda = \int_{C_R} e^{i\lambda x} \int_0^\infty f^*(t) \sin \lambda t\,dt\,d\lambda =$$

$$= \int_{-R}^{R} e^{i\lambda x} \int_{0}^{\infty} f^*(t) \sin \lambda t \, dt \, d\lambda = i \int_{-R}^{R} \sin \lambda x \int_{0}^{\infty} f^*(t) \sin \lambda t \, dt \, d\lambda \to$$

$$\to \frac{i\pi}{2} f^*(x) = \frac{i\pi}{2} f(x),$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Теорема разложения

Пусть L—контур, который для любого $R > 0$ на отрезке вещественной оси $[-R, R]$ совпадает с контуром L_R. Из теоремы Коши о вычетах и формул (3.7) следует, что при $R \to \infty$

$$\int_{L_R} \psi(\lambda, x) \int_{0}^{x} f(t) v(\lambda, t) \, dt \, d\lambda + \int_{L_R} v(\lambda, x) \int_{x}^{\infty} f(t) \psi(\lambda, t) \, dt \, d\lambda \to$$

$$\to -i\pi f(x) + 2\pi i \sum_{N} \operatorname{Res} B(\lambda), \tag{4.1}$$

где

$$B(\lambda) = \psi(\lambda, x) \int_{0}^{x} f(t) v(\lambda, t) \, dt + v(\lambda, x) \int_{0}^{\infty} f(t) \psi(\lambda, t) dt,$$

а N—множество всех полюсов $B(\lambda)$, расположенных над контуром L.

Лемма. *Пусть M—множество всех полюсов $h(\lambda)$, расположенных над контуром L. Тогда*

$$\sum_{N} \operatorname{Res} B(\lambda) = \sum_{N} \operatorname{Res} \{V_f(\lambda) v(\lambda, x) m(\lambda)\} +$$

$$\sum_{N \cap M} \operatorname{Res} \left\{ V_f(\lambda) v(\lambda, x) \frac{\lambda}{h(\lambda)} \right\}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Из формул (1.4) и (1.5) следует, что разность

$$B(\lambda) - V_f(\lambda) v(\lambda, x) m(\lambda) - S_f(\lambda) s(\lambda, x) \frac{h(\lambda)}{\lambda}$$

является целой функцией, поэтому

$$\sum_{N} \operatorname{Res} B(\lambda) = \sum_{N} \operatorname{Res} \{V_f(\lambda) v(\lambda, x) m(\lambda)\} +$$

$$+ \sum_{N} \operatorname{Res} \left\{ S_f(\lambda) s(\lambda, x) \frac{h(\lambda)}{\lambda} \right\}. \tag{4.3}$$

Очевидно, что

$$\sum_{N} \operatorname{Res} \left\{ S_f(\lambda) s(\lambda, x) \frac{h(\lambda)}{\lambda} \right\} = \sum_{N \cap M} \operatorname{Res} \left\{ S_f(\lambda) s(\lambda, x) \frac{h(\lambda)}{\lambda} \right\}. \tag{4.4}$$

Из формул (1.4) и (1.7) следует, что разность

$$S_f(\lambda)\, s(\lambda, x)\frac{h(\lambda)}{\lambda} - V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\frac{\lambda}{h(\lambda)}$$

является регулярной на множестве M, а, следовательно, и на множестве $N \cap M$. Поэтому

$$\sum_{N \cap M} \operatorname{Res}\left\{S_f(\lambda)\, s(\lambda, x)\frac{h(\lambda)}{\lambda}\right\} = \sum_{N \cap M} \operatorname{Res}\left\{V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\frac{\lambda}{h(\lambda)}\right\}. \tag{4.5}$$

Из (4.3)—(4.5) следует утверждение (4.2) леммы.

Заметим, что N совпадает с множеством всех корней уравнения

$$p(\lambda)\, e'(\lambda, 0) - n(\lambda)\, e(\lambda, 0) = 0,$$

расположенных над контуром L, где $n(\lambda)$ и $p(\lambda)$ не имеют общих корней и $\dfrac{n(\lambda)}{p(\lambda)} \equiv h(\lambda)$.

Действительно. Из формул (1.4) и (1.5) следует, что разность

$$B(\lambda) - v(\lambda, x)\int_0^\infty f(t)\, \psi(\lambda, t)\, dt$$

является целой функцией, поэтому N есть множество всех полюсов функции

$$v(\lambda, x)\int_0^\infty f(t)\, \psi(\lambda, t)\, dt,$$

расположенных над контуром L, а

$$v(\lambda, x)\int_0^\infty f(t)\, \psi(\lambda, t)\, dt = \frac{\lambda v(\lambda, x)}{a(\lambda)}\int_0^\infty f(t)\, e(\lambda, t)\, dt =$$

$$= \frac{\lambda p(\lambda)\, c(\lambda, x) + n(\lambda)\, s(\lambda, x)}{p(\lambda)\, e'(\lambda, 0) - n(\lambda)\, e(\lambda, 0)}\int_0^\infty f(t)\, e(\lambda, t)\, dt.$$

Отсюда следует наше утверждение относительно множества N.

Теорема. *Пусть в задаче (A)—(B): $q(x)$—комплекснозначная и суммируемая на полуоси $[0, \infty)$ функция, $h(\lambda)$—четная и мероморфная во всей λ—плоскости функция, удовлетворяющая условию* $\mathrm{I}\lambda - h(\lambda) \to \infty$, при $\lambda \to \infty$, $\mathrm{I}\lambda \geqslant 0$.

Тогда любую $f(x)$ из K можно представить в виде

$$f(x) = \frac{i}{\pi}\int_L V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, m(\lambda)\, d\lambda + 2\sum_N \operatorname{Res}\{V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, m(\lambda)\} +$$

$$+ 2\sum_{N \cap M} \operatorname{Res}\left\{V_f(\lambda) v(\lambda, x)\frac{\lambda}{h(\lambda)}\right\} + \sum_P \operatorname{Res}\left\{V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\frac{\lambda}{h(\lambda)}\right\}, \tag{4.6}$$

где L—контур, который для любого $R>0$ на отрезке вещественной оси $[-R, R]$ совпадает с контуром L_R; N—множество всех корней уравнения $p(\lambda)e'(\lambda, 0)-n(\lambda)e(\lambda, 0)=0$, расположенных над контуром L; M—множество всех полюсов $h(\lambda)$, расположенных над контуром L; P—множество всех полюсов $\frac{h(\lambda)}{\lambda}$, лежащих на вещественной оси.

Доказательство. Перейдя к пределу в формуле (2.1) при $R\to\infty$ и учитывая формулу (4.1), получим

$$\int_L V_f(\lambda)\,v(\lambda, x)\,m(\lambda)\,d\lambda=-i\pi f(x)+2\pi i\sum_N \operatorname{Res} B(\lambda)+$$

$$+\sum_P \operatorname{Res}\left\{V_f(\lambda)\,v(\lambda, x)\,\frac{\lambda}{h(\lambda)}\right\},$$

откуда

$$f(x)=-\frac{1}{i\pi}\int_L V_f(\lambda)\,v(\lambda, x)\,m(\lambda)\,d\lambda+2\sum_N \operatorname{Res} B(\lambda)+$$

$$+\sum_P \operatorname{Res}\left\{V_f(\lambda)\,v(\lambda, x)\,\frac{\lambda}{h(\lambda)}\right\}.$$

Подставив сюда (4.2) получим (4.6). Теорема доказана.

В частности, если $h(\lambda)$ и $m(\lambda)$ не имеют особенностей на вещественной оси, формулу (4.6) можно написать в виде

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_f(\lambda)\,v(\lambda, x)\frac{\lambda^2 d\lambda}{a(\lambda)\,a(-\lambda)}+2\sum_N \operatorname{Res}\{V_f(\lambda)\,v(\lambda, x)\,m(\lambda)\}+$$

$$+2\sum_{N\cap M} \operatorname{Res}\left\{V_f(\lambda)\,v(\lambda, x)\,\frac{\lambda}{h(\lambda)}\right\}. \tag{4.7}$$

Действительно, в этом случае контур L совпадает с вещественной осью, а на вещественной оси, как следует из формулы (1.2),

$$\frac{m(\lambda)+m(-\lambda)}{2}=-\frac{i\lambda^2}{a(\lambda)\,a(-\lambda)}. \tag{4.8}$$

Пользуясь нечетностью функции $\frac{m(\lambda)-m(-\lambda)}{2}$ и формулой (4.8) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} V_f(\lambda)\,v(\lambda, x)\,m(\lambda)\,d\lambda=-i\int_{-\infty}^{\infty} V_f(\lambda)\,v(\lambda, x)\,\frac{\lambda^2 d\lambda}{a(\lambda)\,a(-\lambda)},$$

а ввиду четности функции $V_f(\lambda)\,v(\lambda, x)\,\frac{\lambda^2}{a(\lambda)\,a(-\lambda)}$ —

$$\int_{-\infty}^{\infty} V_f(\lambda)\,v(\lambda, x)\,\frac{\lambda^2 d\lambda}{a(\lambda)\,a(-\lambda)}=2\int_0^\infty V_f(\lambda)\,v(\lambda, x)\,\frac{\lambda^2 d\lambda}{a(\lambda)\,a(-\lambda)}.$$

Объединая эти формулы, получим

$$\frac{i}{\pi}\int_{L} V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, m(\lambda)\, d\lambda = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, \frac{\lambda^2 d\lambda}{a(\lambda)\, a(-\lambda)}. \tag{4.9}$$

Подставив (4.9) в (4.6) и учтя, что множество P пусто, получим формулу (4.7), т. е. то, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Формула (4.7) доказана для $f(x)$ из K, но с помощью предельного перехода ее можно распространить на все те функции $f(x)$, для которых $f''(x) - q(x) f(x) \in L^2_{(0, \infty)}$.

Замечание 2. При $h(\lambda) \equiv \text{const}$ из формулы (4.7) получим

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, \frac{\lambda^2 d\lambda}{a(\lambda)\, a(-\lambda)} +$$

$$+ 2\sum_{N} \operatorname{Res}\left[V_f(\lambda)\, v(\lambda, x)\, m(\lambda)\right], \tag{4.10}$$

где N—множество всех корней уравнения $a(\lambda) = 0$, лежащих в $I\lambda > 0$.

В случае, когда $(1 + x^2)\, q(x)$—комплекснозначная функция, суммируемая на полуоси $[0, \infty)$, формула (4.10), доказана М. А. Наймарком [1] и Б. Я. Левиным [3].

В заключение выражаю глубокую благодарность профессору Владимиру Александровичу Марченко, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Харьковский государственный университет Поступила 23 VII 1960

Ռ. Ս. Օհանյան

ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆ ԸՍՏ ՄԻ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ԵՎ ՄԻԱՑՎԱԾ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ, ՈՐԸ ՏՐՎԱԾ Է ՈՉ ԻՆՔՆԱՀԱՄԱԼՈՒԾ ՍԻՆԳՈՒԼՅԱՐ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՕՊԵՐԱՏՈՐՈՎ ԵՎ λ-ԻՑ ԿԱԽՎԱԾ ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը.

Թ ե ո ր ե մ ա — Դիցուք (A)—(B) *խնդրում* $q(x)$*-ը կոմպլեքս արժեքներ ընդունող մի ֆունկցիա է, որը բավարարում է* (1) *պայմանին։*

$h(\lambda)$*-ն զույգ և մերոմորֆ ֆունկցիա է ամբողջ* λ*-հարթության վրա, որը բավարարում է* (2) *պայմանին։*

Այդ դեպքում ամեն մի $f(x)$ *ֆունկցիայի համար, որը ֆինիտ է և ունի հանրագումարելի ածանցյալ՝ տեղի ունի* (4.6) *բանաձևը։*

Մասնավոր դեպքում, երբ $(1 + x^2)\, q(x)$ *ֆունկցիան հանրագումարելի է* $[0, \infty)$ *կիսաառանցքի վրա,* $h(\lambda) \equiv \text{const}$, $m(\lambda)$*-ն չունի եզակիություններ*

իրական առանցքի վրա—(4.6) բանաձևը ապացուցել են Մ. Ա. Նայմարկը [1] Բ. Յա. Լևինը [3]։

Ապացույցի մեթոդը նման է Կոշիի մեթոդին և տարբերվում է [1, 2, 3, 4] աշխատություններում օգտագործված մեթոդներից։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Наймарк М. А.* О разложении по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов второго порядка. „ДАН СССР", **89**, № 2, 1953, 213—216.
2. *Наймарк М. А.* Исследование спектра и разложения по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка на полуоси. „Труды Матем. о-ва", № 3, 1954, 181—270.
3. *Левин Б. Я.* Преобразование типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка. „ДАН СССР", **106**, 1956, 187—190.
4. *Штраус А. В.* О разложении по собственным функциям одной краевой задачи второго порядка на полуоси. „Известия АН СССР, сер. матем.", **20**, 1956, 783—792.