ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIV, № 2, 1961 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

Г. Л. Лунц

О рядах типа Тейлора-Дирихле

В статье рассматриваются вопросы, связанные со сходимостью интегралов Стильтьеса вида

$$\int_0^\infty z^{\tau(t)} e^{-zt} dA(t). \tag{1}$$

В частности, определяются области сходимости рядов типа Тейлора-Дирихле

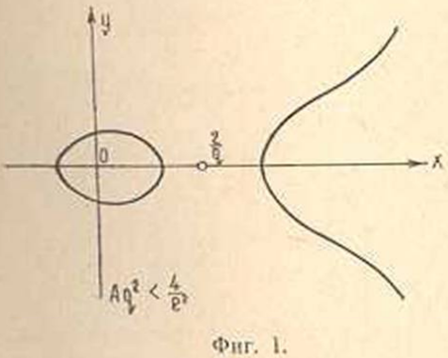
$$\sum_{n=1}^\infty a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z}, \tag{2}$$

где $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \uparrow \infty$, а m_n — натуральные числа или нули.

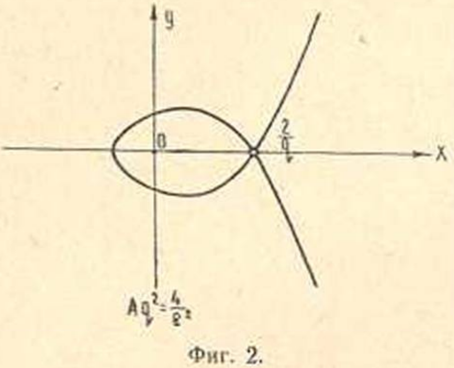
С помощью таких рядов могут выражаться решения некоторых линейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка и уравнений с бесконечным множеством запаздываний.

§ 1. Линии уровня модулей членов ряда (2)

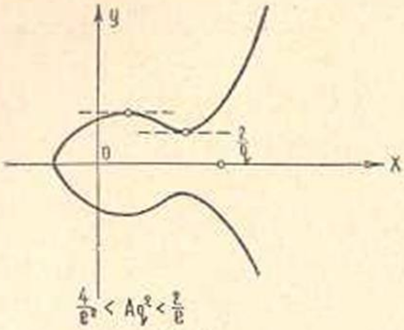
Линии уровня модулей членов ряда (2) имеют уравнения вида $x^2 + y^2 = Ae^{qx}$ $(A > 0,\ q > 0)$. Элементарное исследование показывает, что, в зависимости от значения величины Aq^2, эти линии имеют вид, показанный на фиг. 1—5.



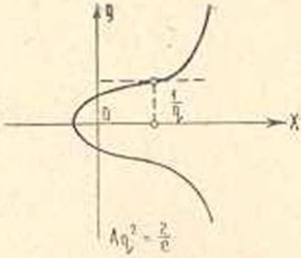
Фиг. 1.



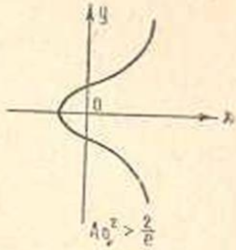
Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

§ 2. Область абсолютной сходимости интеграла (1)

Пусть $A(t)$—комплексная функция с ограниченной вариацией на всяком конечном отрезке действительной положительной полуоси; $\tau(t)$—неотрицательная функция действительного переменного; $z^{\tau(t)}$— какая либо ветвь функции $e^{\tau(t)\operatorname{Ln} z}$, однозначная в плоскости с соответствующим разрезом и

$$\alpha = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \int\limits_0^r |dA(t)|}{r}, \qquad \rho_1 = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{r}{\tau(r)}, \qquad \rho_2 = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{r}{\tau(r)}.$$

Пусть сначала $\int\limits_0^\infty |dA(t)| = \infty$ и, следовательно, $\alpha \geqslant 0$.

Тогда, если $|z| \geqslant 1$, при любом положительном ε для n достаточно большого

$$\int\limits_n^{n+1} |z^{\tau(t)} e^{-zt}\, dA(t)| < A|z|^{\frac{n+1}{\rho_1-\varepsilon}} e^{-xn} e^{(n+1)(\alpha+\varepsilon)} = Be^{-n\left(x-\alpha-\frac{\ln|z|}{\rho_1-\varepsilon}-\varepsilon\right)}$$

(A и B не зависят от n).

Если точка z такова, что $\ln|z| < (x-\alpha)\rho_1$, то-есть $|z| < e^{\rho_1(x-\alpha)}$, то при достаточно малом ε будет справедливо неравенство

$$x-\alpha-\frac{\ln|z|}{\rho_1-\varepsilon}-\varepsilon > \delta > 0,$$

а так как ряд с общим членом $e^{-n\delta}$ сходится, то интеграл (1) сходится абсолютно в области G_1: $|z| \geqslant 1$, $|z| < e^{\rho_1(x-\alpha)}$.

Если $|z| \leqslant 1$, то

$$\left|\int\limits_n^{n+1} |z^{\tau(t)} e^{-zt}\, dA(t)\right| < C|z|^{\frac{n}{\rho_2+\varepsilon}} e^{-xn} e^{(n+1)\alpha+\varepsilon},$$

откуда нетрудно заключить, что интеграл (1) сходится абсолютно также и в облаcи G_2: $|z| \leqslant 1$, $|z| < e^{\rho_2(x-\alpha)}$. Если $\rho_1 = 0$, то область G_1

пустая, если $\rho_2 = \infty$, то область G_2 превращается в сегмент $|z| \leqslant 1$, $x > \alpha$ (если $\alpha \geqslant 1$, то область G_2, при $\rho_2 = \infty$, пустая).

Из определения числа α следует, что, как мало бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такая последовательность $\{r_i\}$ $(r_i \uparrow \infty)$, что

$$\int_0^{r_i} |dA(t)| > e^{r_i(\alpha - \varepsilon)}.$$

Отсюда при $|z| \geqslant 1$ и $x \geqslant 0$ имеем

$$\int_0^{r_i} |z^{\tau(t)} e^{-zt} dA(t)| > e^{-xr_i} e^{r_i(\alpha - \varepsilon)}$$

и, следовательно, интеграл (1) не сходится абсолютно ни в одной точке области $|z| \geqslant 1$, $0 \leqslant x < \alpha$. Если $x \leqslant 0$, $|z| \geqslant 1$, то

$$\int_0^{r_i} |z^{\tau(t)} e^{-zt} dA(t)| > e^{r_i(\alpha - \varepsilon)}$$

и поэтому, в случае $\alpha > 0$, интеграл (1) не сходится абсолютно в области $|z| \geqslant 1$, $x \leqslant 0$. При $\alpha = 0$, $|z| \geqslant 1$, $x < 0$ равенство

$$\int_0^{\infty} |z^{\tau(t)} e^{-zt} dA(t)| = \infty$$

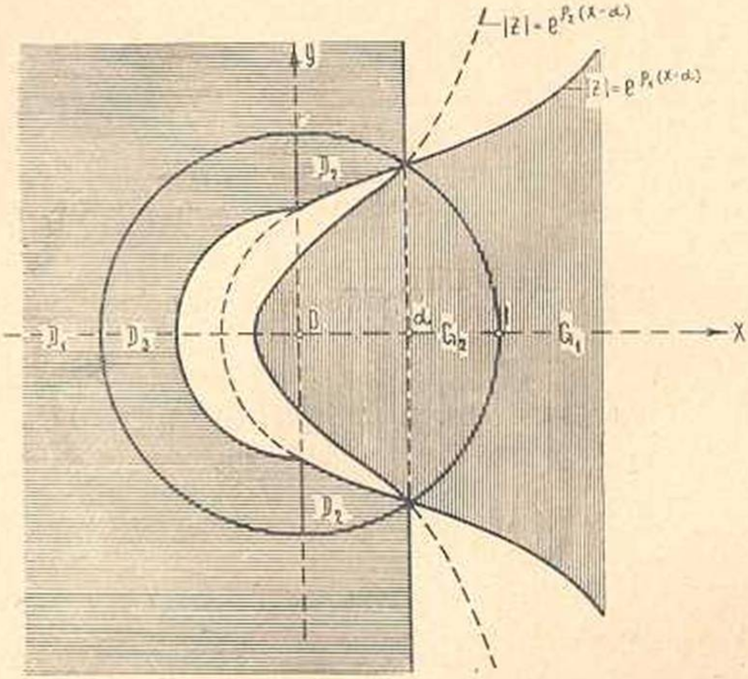
очевидно. Таким образом, интеграл (1) не сходится абсолютно в области D_1: $|z| \geqslant 1$, $x < \alpha$. Если $|z| \leqslant 1$, то сначала подберем к $\varepsilon > 0$ такое A, чтобы $\tau(r) < \frac{r}{\rho_1 - \varepsilon}$ при $r \geqslant A$. В силу определения числа α, к заданным ε и A можно подобрать такую последовательность $\{r_i\}$ $(r_i \uparrow \infty)$, что

$$\int_A^{r_i} |dA(t)| > e^{r_i(\alpha - \varepsilon)}.$$

Тогда, при $x \geqslant 0$, будем иметь

$$\int_A^{r_i} |z^{\tau(t)} e^{-zt} dA(t)| > |z|^{\frac{r_i}{\rho_1 - \varepsilon}} e^{-xr_i} e^{r_i(\alpha - \varepsilon)} = e^{r_i\left(\alpha - x + \frac{\ln|z|}{\rho_1 - \varepsilon} - \varepsilon\right)}.$$

Отсюда очевидно, что интеграл (1) не сходится абсолютно в области D_2: $|z| \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $|z| > e^{\rho_1(x-\alpha)}$. Столь же простые выкладки показывают, что интеграл (1) не сходится абсолютно в области D_3: $e^{-\rho_1\alpha} < |z| \leqslant 1$, $x \leqslant 0$ (эта область пустая при $\alpha = 0$). На фиг. 6 показаны области G_1, G_2, D_1, D_2, D_3 в случае $0 < \alpha < 1$ и когда кривые $|z| = e^{\rho_1(x-\alpha)}$,



Фиг. 6.

$|z| = e^{\rho_2(x-\alpha)}$ принадлежат к виду, соответствующему фиг. 3—5.

Если

$$\int_0^\infty |dA(t)| < \infty,$$

то, обозначив

$$\alpha' = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \int\limits_r^\infty |dA(t)|}{r} \qquad (\alpha' \leqslant 0),$$

можно с помощью несложных оценок доказать, что интеграл (1) сходится абсолютно в областях $G_1' : |z| \geqslant 1$, $|z| < e^{\rho_1(x-\alpha')}$ и $G_2' : |z| \leqslant 1$, $|z| < e^{\rho_2(x-\alpha')}$ и не сходится абсолютно в области $D : |z| \geqslant 1$, $x \leqslant 0$, $|z| > e^{\rho_1(x-\alpha')}$. В случае $\alpha' = -\infty$ интеграл (1) сходится абсолютно во всей плоскости.

Нетрудно также доказать, что во всех случаях интеграл (1) сходится равномерно в любой конечной части области абсолютной сходимости и является функцией, аналитической в области абсолютной сходимости (на римановой поверхности или на плоскости вне соответствующего разреза).

Если выбрать функцию $A(t)$ так, что $A(t) = 0$ в интервале $[0, \lambda_1)$ и $A(t) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ в интервале $[\lambda_n, \lambda_{n+1})$ $(n = 1, 2, \cdots)$, то интеграл (1) превратится в ряд (2), причем

$$m_n = \tau(\lambda_n), \quad \rho_1 = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{m_n}, \quad \rho_2 = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{m_n},$$

$$\alpha = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln \sum_{k=1}^{n} |a_k|}{\lambda_n}, \qquad \alpha' = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln \sum_{k=n}^{\infty} |a_k|}{\lambda_n}.$$

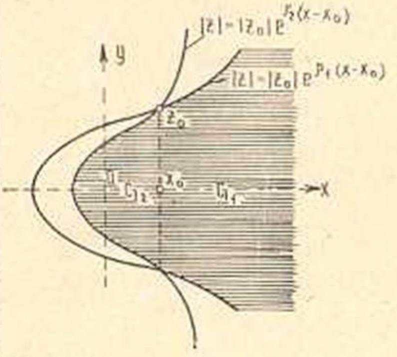
§ 3. Теорема Абеля для ряда (2)

Очевидно, что если ряд (2) сходится абсолютно в некоторой точке $z_0 = x_0 + iy_0$, то он сходится абсолютно во всякой точке z, в которой начиная с некоторого n выполнено неравенство

$$|z|^{m_n} e^{-\lambda_n x} \leqslant |z_0|^{m_n} e^{-\lambda_n x_0} \quad \text{или} \quad |z| \leqslant |z_0| e^{\frac{\lambda_n}{m_n}(x-x_0)}.$$

Из определения чисел ρ_1 и ρ_2 получаем отсюда следующую теорему.

Теорема. *Из абсолютной сходимости ряд (2) в точке z_0 следует его абсолютная сходимость в областях $G_1 : x \geqslant x_0$, $|z| < |z_0| e^{\rho_1(x-x_0)}$ и $G_2 : x \leqslant x_0$, $|z| < |z_0| e^{\rho_2(x-x_0)}$.*



Фиг. 7.

На фиг. 7 показаны области G_1 и G_2 в случае, когда кривые $|z| = |z_0| e^{\rho_1(x-x_0)}$ и $|z| = |z_0| e^{\rho_2(x-x_0)}$ принадлежат к виду, соответствующему фиг. 3—5, а на фиг. 8 а), б)—в случае, когда эти кривые соответствуют фиг. 1.

Если $\rho_2 = \infty$, то из абсолютной сходимости ряда (2) в точке z_0 следует его абсолютная сходимость в области $x \geqslant x_0$, $|z| < |z_0| e^{\rho_1(x-x_0)}$ (фиг. 9 а), б)).

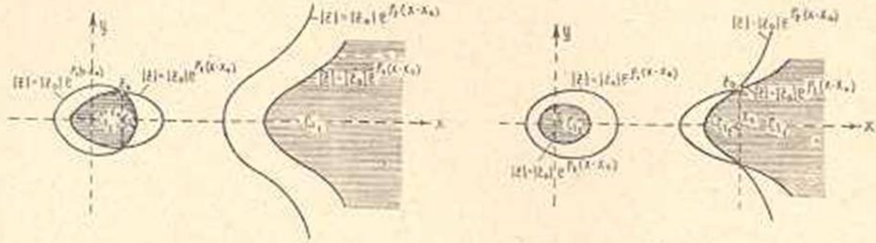
Если последовательность $\{\lambda_n\}$ такова, что $\ln n = o(\lambda_n)$, то доказанная теорема остается справедливой и в том случае, когда в точке z_0 ряд (2) сходится неабсолютно или даже когда в точке z_0 члены ряда (2) ограничены по модулю.

Для доказательства запишем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z}| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n z_0^{m_n} e^{-\lambda_n z_0}| \times$$

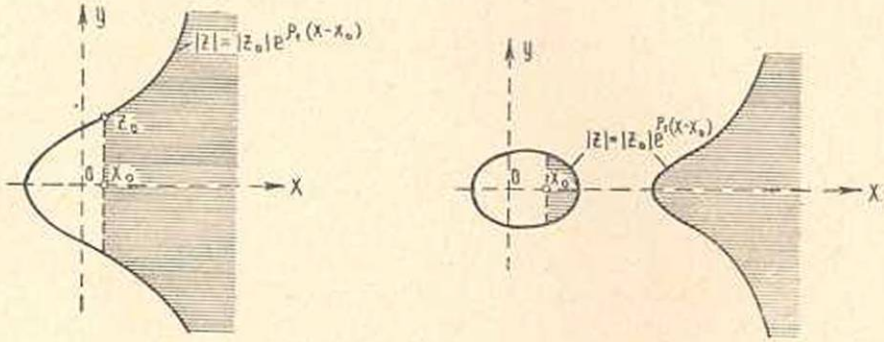
$$\times \left|\frac{z}{z_0}\right|^{m_n} e^{-\lambda_n(x-x_0)} < A \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^{m_n} e^{-\lambda_n(x-x_0)},$$

где A—постоянная. Отсюда видно, что найдутся точки, сколь угодно близкие к точке $z_0 = x_0 + iy_0$, в которых ряд (2) сходится абсолютно.



а б

Фиг. 8.



а б

Фиг. 9.

Действительно, если $y_0 \neq 0$ и точка $z^* = x^* + iy^*$ такова, что $|z^*| = |z_0|$ и $x^* = x_0 + \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число, то в точке z^* ряд (2) мажорируется рядом $A\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \varepsilon}$, который сходится ввиду условия $\ln n = o(\lambda_n)$. Так как области G_1^* и G_2^*, соответствующие точке z^*, сколь угодно близки к областям G_1 и G_2, то утверждение доказано.

Аналогичное утверждение справедливо и в случае, когда $\ln n = o(m_n)$.

§ 4. Сходимость ряда (2) в некоторых частных случаях

Теорема. *Если выполнено условие*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0, \tag{3}$$

то ряд (2) сходится абсолютно в областях $G_1: |z| \geqslant 1$, $|z| < e^{p_1(x-k)}$ *и* $G_2: |z| \leqslant 1$, $|z| < e^{p_2(x-k)}$ *и расходится в областях* $D_1: |z| \geqslant 1$, $|z| > e^{p_2(x-k)}$ *и* $D_2: |z| \leqslant 1$, $|z| > e^{p_1(x-k)}$, *где*

$$k = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n}.$$

Доказательство. В силу определения числа k при достаточно большом n имеем

$$\left|a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z}\right| < e^{\lambda_n(k+\varepsilon)} |z|^{m_n} e^{-\lambda_n x} = e^{\lambda_n(k-x+\varepsilon)+m_n \ln|z|},$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало. Но $\frac{\lambda_n}{\rho_2+\varepsilon} < m_n < \frac{\lambda_n}{\rho_1-\varepsilon}$ при достаточно большом n, поэтому в случае $|z| \geqslant 1$ получим

$$\left|a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z}\right| < e^{-\lambda_n\left(x-k-\frac{\ln|z|}{\rho_1-\varepsilon}-\varepsilon\right)},$$

а в случае $|z| \leqslant 1$

$$\left|a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z}\right| < e^{-\lambda_n\left(x-k-\frac{\ln|z|}{\rho_2+\varepsilon}-\varepsilon\right)},$$

откуда следует абсолютная сходимость ряда (2) в областях G_1 и G_2 $\left(\text{ряд } \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \eta}\right.$, в силу условия (3), сходится при любом положительном $\left.\eta\right)$. Из определения числа k следует также, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такая бесконечная последовательность индексов $\{n_p\}$, что

$$\left|a_{n_p} z^{m_{n_p}} e^{-\lambda_{n_p} z}\right| > e^{\lambda_{n_p}(k-\varepsilon)+m_{n_p}\ln|z|-\lambda_{n_p}x}.$$

Следовательно, в случае $|z| \geqslant 1$, при достаточно большом p, будем иметь

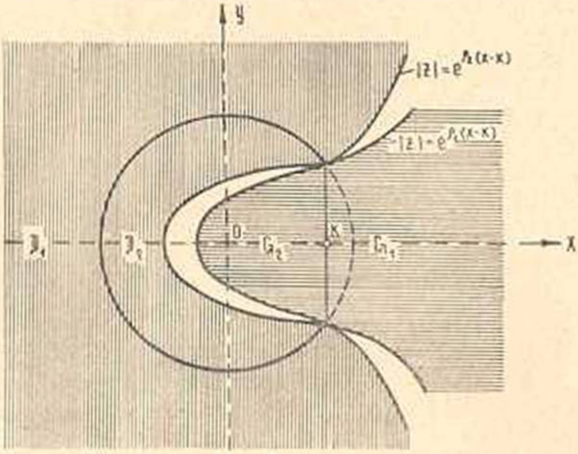
$$\left|a_{n_p} z^{m_{n_p}} e^{-\lambda_{n_p} z}\right| > e^{-\lambda_{n_p}\left(x-k-\frac{\ln|z|}{\rho_2+\varepsilon}+\varepsilon\right)} > 1,$$

если $|z| > e^{\rho_2(x-k)}$ и ε достаточно мало, а в случае $|z| \leqslant 1$—аналогично

$$\left|a_{n_p} z^{m_{n_p}} e^{-\lambda_{n_p} z}\right| > e^{-\lambda_{n_p}\left(x-k-\frac{\ln|z|}{\rho_1-\varepsilon}+\varepsilon\right)} > 1,$$

если $|z| > e^{\rho_1(x-k)}$. Этим теорема доказана. Для случаев, соответствующих фиг. 3—5 области G_1, G_2, D_1, D_2 указаны на фиг. 10 (для $|k| < 1$).

Легко видеть, что если $k = -\infty$, то ряд (2) сходится абсолютно во всей плоскости. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{m_n} = \infty$, то ряд сходится абсолютно в полуплоскости $x > k$ и расходится в полуплоскости $x < k$ (за исключением, быть может, точки $z = 0$), то есть ведет себя как ряд Дирихле (см. [1]); если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{m_n} = 0$, то ряд (2) сходится абсолютно в круге $|z| < 1$ и расходится вне этого круга, то есть ведет себя как ряд Тейлора; если же $\rho_2 = \infty$, то ряд (2) сходится абсолютно в об-



Фиг. 10.

ластях $|z|\geqslant 1$, $|z|<e^{\rho_1(x-k)}$ и $|z|\leqslant 1$, $x>k$ и расходится в областях $|z|\geqslant 1$, $x<k$ и $|z|\leqslant 1$, $|z|>e^{\rho_1(x-k)}$.

Из результатов предыдущего параграфа следует, что, *в случае когда выполнено условие (3), существует область,* состоящая не обязательно из одной связной компоненты (см. фиг. 1), *внутри которой ряд (2) сходится абсолютно и вне которой он расходится* (точки, в которых ряд сходится неабсолютно, могут находиться только на границе этой области, так как было доказано, что в любой окрестности такой точки имеются точки абсолютной сходимости, а вместе с ними и кусок области абсолютной сходимости). Таким образом, в этом отношении, при выполнении условия (3), ряд (2) ведет себя так же как ряд Тейлора и как ряд Дирихле в аналогичном случае (см. [1]). Отсюда очевидно, что участвующие в формулировке теоремы неравенства не определяют, вообще говоря (если $\rho_1\neq\rho_2$), точно область абсолютной сходимости и область расходимости ряда (2) при выполнении условия (3). Однако эти неравенства не могут быть улучшены. Действительно, задав произвольно действительные числа k, $\rho_1>0$, $\rho_2>0$, построим три ряда вида (2) следующим образом. Первые два ряда подберем так, чтобы для каждого из них $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{\ln|a_n|}{\lambda_n}=-\infty$; кроме того для первого ряда выберем последовательность $\{m_n\}$ так, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lambda_n}{m_n}=\rho_1$ (например, $m_n=[\lambda_n]\rho_1$), а для второго ряда—так, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lambda_n}{m_n}=\rho_2$. Третий ряд построим так, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln|a_n|}{\lambda_n}=k$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lambda_n}{m_n}=\rho$, где ρ—любое число, промежуточное между ρ_1 и ρ_2. Для ряда, являющегося суммой построенных рядов будем иметь

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|a_n|}{\lambda_n}=k,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\lambda_n}{m_n}=\rho_1,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\lambda_n}{m_n}=\rho_2$$

и в то же время ряд будет сходиться абсолютно в области $|z|<e^{\rho(x-k)}$ и расходиться в области $|z|>e^{\rho(x-k)}$, так как первый и второй ряды сходятся абсолютно во всей плоскости.

Если вместо условия (3) выполнено усливие

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{m_n}=0, \tag{4}$$

то имеет место следующее утверждение. *Ряд (2) сходится абсолютно в областях* $x\geqslant 0$, $|z|<e^{\rho_1 x-\varkappa}$ *и* $x\leqslant 0$, $|z|<e^{\rho_2 x-\varkappa}$ *и расходится в областях* $x\geqslant 0$, $|z|>e^{\rho_2 x-\varkappa}$ *и* $x\leqslant 0$, $|z|>e^{\rho_1 x-\varkappa}$, *где*

$$\varkappa=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|a_n|}{m_n}.$$

Доказательство основано на простых оценках и мы его опускаем.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{m_n}=0$, то при выполнении условия (4) ряд (2) сходится абсолютно в круге $|z|<e^{-\varkappa}$ и расходится вне его; если же $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{m_n}=\infty$, то ряд сходится абсолютно в полуплоскости $x>0$ и расходится в полуплоскости $x<0$. Заметим, что если одновременно выполнены условия (3) и (4), то можно объединить соответствующие области абсолютной сходимости и расходимости.

Полученные результаты можно распространить на случай, когда $\{\lambda_n\}$—последовательность комплексных чисел ($|\lambda_n|\uparrow\infty$), методом, примененным автором для обобщенных рядов Дирихле (см. [2]).

Московский институт
химического машиностроения

Поступила 29 XI 1960

Գ. Լ. Լունց

ԹԵՅԼՈՐ-ԴԻՐԻԽԼԵԻ ՏԻՊԻ ՇԱՐՔԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Դիտարկվում է Ստիլտեսի

$$\int_0^\infty z^{\tau(t)}e^{-zt}\,dA(t) \tag{1}$$

տեսքի ինտեգրալը, որը $A(t)$*-ի համապատասխան ընտրության դեպքում բերվում է Թեյլոր-Դիրիխլեի տիպի*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^{m_n}e^{-\lambda_n z} \tag{2}$$

շարքի ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_n \uparrow \infty$, m_n-ը ամբողջ թվեր են)։

Որոշվում է այն տիրույթը, որտեղ (1) ինտեգրալը (համապատասխանաբար (2) շարքը) բացարձակ զուգամետ է և այն տիրույթը, որտեղ նա բացարձակ զուգամետ չէ։ (2) շարքի համար ապացուցվում է Աբելի տիպի թեորեմ։

Հայտնի է, որ Դիրիխլեի շարքի համար բացարձակ զուգամիտության տիրույթի և տարամիտության տիրույթի հետ մեկտեղ կարող է գոյություն ունենալ ոչ բացարձակ զուգամիտության տիրույթ (շերտ կամ կիսահարթություն), սակայն այն դեպքում, երբ $\ln n = o(\lambda_n)$, Դիրիխլեի շարքը իրեն պահում է այնպես, ինչպես Թեյլորի շարքը, և նրա համար գոյություն ունի այնպիսի տիրույթ (կիսահարթություն), որի ներսում նա բացարձակ զուգամետ է և որից դուրս՝ տարամետ։ Համանման պնդում ապացուցվում է Թեյլոր-Դիրիխլեի տիպի (2) շարքի համար այն դեպքում,

երբ $$\ln n = o(\lambda_n), \qquad (3)$$

կամ $$\ln n = o(m_n)։ \qquad (4)$$

Ապացուցվում է թեորեմ, որը հաստատում է, որ (3) դեպքում (2) շարքը բացարձակ զուգամետ է $G_1: |z| \geqslant 1,\ |z| < e^{\rho_1(x-k)}$ և $G_2: |z| \leqslant 1,\ |z| < e^{\rho_2(x-k)}$ տիրույթներում և տարամետ՝ $D_1: |z| \geqslant 1,\ |z| > e^{\rho_1(x-k)}$ և $D_2: |z| \leqslant 1,\ |z| > e^{\rho_2(x-k)}$ տիրույթներում, որտեղ

$$\rho_1 = \underline{\lim}_{n \to \infty} \frac{\lambda_n}{m_n}, \qquad \rho_2 = \overline{\lim}_{n \to \infty} \frac{\lambda_n}{m_n}, \qquad k = \overline{\lim}_{n \to \infty} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n}։$$

Եթե $\rho_1 \neq \rho_2$, ապա G_1, G_2, D_1, D_2 տիրույթները իրենց եզրերի հետ միասին չեն ծածկում ամբողջ հարթությունը և այդ պատճառով (2) շարքի բացարձակ զուգամիտության տիրույթը (3) դեպքում, ընդհանրապես ասած, չի համընկնում $G_1 + G_2$-ի հետ։ Սակայն ապացուցվում է, որ թեորեմայի մեջ պարունակվող արդյունքը ρ_1 և ρ_2 մեծությունների տերմիններով չի կարող բարելավվել։

G_1, G_2, D_1, D_2 տիրույթներին համանման տիրույթները կառուցվում են նաև (4) դեպքում $\left(\text{այստեղ } k \text{ մեծության փոխարեն մտցվում է } \varkappa = \overline{\lim}_{n \to \infty} \frac{\ln |a_n|}{m_n} \text{ մեծությունը}\right)$։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bernstein V.* Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet. Paris, 1933.

2. *Лунц Г. Л.* О некоторых обобщениях рядов Дирихле. „Математ. сб.", **10** (52), № 1—2, стр. 33—50, 1942.