

М. М. Манукян

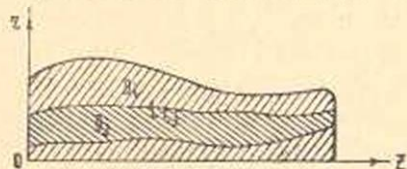
Кручение составных валов переменного сечения в условиях установившейся ползучести

В работе К. С. Чобаняна [1] рассматривается задача о кручении круглых стержней переменного сечения, составленных из различных упругих материалов, спаянных по боковым поверхностям.

В настоящей заметке дается решение задачи об установившейся ползучести скручиваемых круглых составных стержней переменного сечения.

§ 1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим тело вращения, которое состоит из различных материалов, расположенных симметрично относительно оси вращения. Область осевого сечения этого тела, которое в дальнейшем будем называть составным стержнем переменного сечения, состоит из ряда областей $D_1, D_2, \dots, D_n$, соответствующих различным материалам, из которых составлено данное тело. Отнесем составной стержень переменного сечения к цилиндрической системе координат r, θ, z , направим ось z вдоль оси стержня (фиг. 1).



Фиг. 1.

Пусть составной круглый стержень переменного сечения в условиях установившейся ползучести находится только под действием скручивающих внешних усилий, симметрично распределенных относительно оси вращения.

Предположим, что материал i -го слоя скручиваемого стержня следует законам теории установившейся ползучести в наиболее общей форме, а именно—интенсивность скорости деформации Γ является некоторой функцией интенсивности касательных напряжений T

$$\Gamma = f_i(T) T, \quad T = f_i^*(\Gamma) \Gamma, \quad (1.1)$$

где $f_i(T)$ или $f_i^*(\Gamma)$ —некоторая функция, характеризующая материал i -го слоя стержня.

Уравнение равновесия будет тождественно удовлетворено, если, как обычно, касательные напряжения $\tau_{r\theta}^{(i)}$ и $\tau_{\theta z}^{(i)}$ представить через одну функцию $\Phi(r, z)$, называемую функцией напряжений, в виде

$$\tau_{r\theta}^{(i)} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z}, \quad \tau_{\theta z}^{(i)} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r}. \quad (1.2)$$

Здесь через $\Phi_i(r, z)$ обозначена функция $\Phi(r, z)$ в области D_i .

Дифференциальное уравнение для функции напряжений $\Phi(r, z)$ будет [2]

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r^3} f_i(T_i) \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r^3} f_i(T_i) \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \right] = 0. \quad (1.3)$$

Если обозначить интенсивность усилия, действующего на поверхности составного стержня, через $p(s)$, где s —длина дуги контура осевого сечения, отсчитываемая от произвольно выбранной на контуре точки, то контурное условие будет [1]

$$\Phi_i(r, s) = - \int_0^s r^2 p(s) ds + C_0, \quad (1.4)$$

где C_0 —постоянная интегрирования.

Условия непрерывности на линиях раздела L_{ij} можно представить в следующем виде [1]

$$\Phi_i - \Phi_j = C_{ij} \quad \text{на } L_{ij}, \quad (1.5)$$

$$f_i(T_i) \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu} = f_j(T_j) \frac{\partial \Phi_j}{\partial \nu} \quad \text{на } L_{ij}. \quad (1.6)$$

Если линия раздела L_{ij} пересекается с контуром L_0 , то постоянная C_{ij} будет нулем, а если линия раздела целиком лежит внутри контура L_0 , то функция Φ в области, ограниченной L_{ij} , будет определяться с точностью до постоянной C_{ij} , которая не влияет на величины напряжений. Поэтому все постоянные C_{ij} можно принять равными нулю.

На оси сплошного вала напряжения равны нулю, поэтому функция Φ на оси z должна быть постоянной

$$\Phi = \text{const} \quad \text{при } r=0. \quad (1.7)$$

Таким образом, при установившейся ползучести скручиваемых симметричных составных стержней переменного сечения, функция напряжений $\Phi(r, z)$ в каждой из областей D_i осевого сечения вала должна удовлетворять уравнению (1.3), контурному условию (1.4), условию (1.7) на оси z и условиям (1.5), (1.6) на линиях раздела L_{ij} .

В случае полого вала, на внутренней поверхности должно выполняться условие (1.4), где $p(s)$ —скручивающее внешнее усилие, действующее на этой поверхности.

Пусть между интенсивностями касательных напряжений и скоростью сдвига имеет место степенной закон зависимости вида

$$T_i = K_i \Gamma_i^{\mu_i}, \quad (1.8)$$

где K_i, μ_i — некоторые физические константы, определяемые из опыта, причем $0 < \mu_i < 1$.

Тогда уравнение (1.3) и условие (1.6) примут следующий вид [2]

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r^{\frac{2+\mu_i}{\mu_i}}} \left[\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1-\mu_i}{2\mu_i}} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \right\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{r^{\frac{2+\mu_i}{\mu_i}}} \left[\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1-\mu_i}{2\mu_i}} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \right\} = 0, \quad (1.9)$$

$$K_i - \frac{1}{r^{\frac{2+\mu_i}{\mu_i}}} \frac{1}{2(1-\mu_i)} \left[\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1-\mu_i}{2\mu_i}} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} =$$

$$= K_j - \frac{1}{r^{\frac{2+\mu_j}{\mu_j}}} \frac{1}{2(1-\mu_j)} \left[\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1-\mu_j}{2\mu_j}} \frac{\partial \Phi_j}{\partial r} \quad \text{на } L_{ij}. \quad (1.10)$$

Как пример решения этой задачи, рассмотрим кручение цилиндрического и круглого конического стержней.

§ 2. Кручение конического стержня

Рассмотрим задачу о кручении составного круглого конического стержня с углом раствора 2γ . Направим ось z цилиндрических координат $r\theta z$ по оси конического стержня, а центр координат поместим в вершине конуса (фиг. 2).

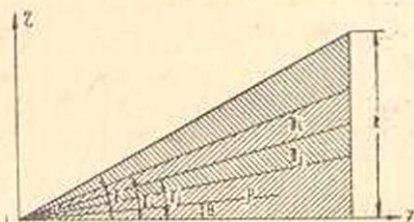
В этом случае, для решения задачи удобно перейти к сферическим полярным координатам. Возьмем сферическую систему координат $\rho\theta\varphi$, центр которой находится в вершине конуса. Полагая

$$r = \rho \sin \theta, \quad z = \rho \cos \theta, \quad (2.1)$$

для компонентов касательных напряжений в сферических координатах будем иметь формулы

$$\tau_{\theta\varphi}^{(i)} = - \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho},$$

$$\tau_{\varphi r}^{(i)} = \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta}. \quad (2.2)$$



Фиг. 2.

Допустим, что боковая поверхность стержня свободна от внешних сил. Тогда контурное условие (1.4) примет вид [1]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 0. \quad (2.3)$$

При решении этой задачи примем, что связь между интенсивностью касательных напряжений и скоростью сдвига выражается степенной зависимостью

$$T_i = K_i \Gamma_i^p. \quad (2.4)$$

Решение задачи о кручении конического стержня ищем, принимая компоненты напряжения $\tau_{\rho\varphi}^{(i)}$ и $\tau_{\theta\varphi}^{(i)}$ в виде [3]

$$\tau_{\rho\varphi}^{(i)} = \tau_{\rho\varphi}^{(i)}(\rho, \theta), \quad \tau_{\theta\varphi}^{(i)} = 0, \quad (2.5)$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho} = 0, \quad \Phi_i = \Phi_i(\theta). \quad (2.6)$$

Тогда уравнение (1.9) в сферических координатах примет вид

$$\frac{d^2 \Phi_i}{d\theta^2} - (2 + \mu) \operatorname{ctg} \theta \cdot \frac{d\Phi_i}{d\theta} = 0. \quad (2.7)$$

Отсюда найдем

$$\frac{d\Phi_i}{d\theta} = C_i (\sin \theta)^{2+\mu}, \quad (2.8)$$

где C_i — постоянные интегрирования. Пользуясь условием (1.7), можно окончательно написать

$$\Phi_i = C_i \int_{\gamma_{i-1}}^{\theta} (\sin \beta)^{2+\mu} d\beta \quad (\gamma_0 = 0). \quad (2.9)$$

Здесь, на оси вала, вместо постоянной взят нуль, что не влияет на общность решения.

Остается определить постоянные интегрирования $C_1, C_2, \dots, C_n$. Для этого воспользуемся условием (1.10) и выражением крутящего момента.

Условие (1.10) в сферических координатах при условии (2.6) примет следующий вид

$$K_i^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{d\Phi_i}{d\theta} \right)^{\frac{1}{p}} = K_j^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{d\Phi_j}{d\theta} \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{на } L_{ij}. \quad (2.10)$$

Подставляя значение Φ из (2.9) в (2.10), получим

$$\left(\frac{C_i}{K_i} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{C_j}{K_j} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.11)$$

Приравняв главный момент усилий, действующих в любом сечении конуса сферической поверхности $\rho = \text{const}$, заданному значению крутящего момента M в вершине, будем иметь

$$M = 2\pi \sum_{i=1}^n C_i \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} (\sin \theta)^{2+\mu_i} d\theta \quad (\gamma_0 = 0). \quad (2.12)$$

(2.11) и (2.12) составляют систему n уравнений, из которых можно определить $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Нетрудно видеть, что решение (2.9) удовлетворяет всем условиям, т. е. контурному условию (2.3), условию (1.7) на оси и условиям (1.5) и (1.10) на линиях раздела L_{ij} .

Подставляя значение Φ из (2.9) в (2.2) получим выражения компонентов касательных напряжений в сферических координатах

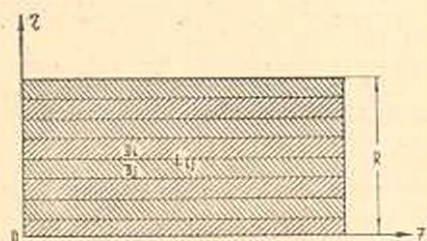
$$\begin{aligned} \tau_{\theta\varphi}^{(i)} &= 0, \\ \tau_{r\varphi}^{(i)} &= C_i \frac{(\sin \theta)^{\mu_i}}{\rho^3}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

§ 3. Кручение круглого стержня

Рассмотрим задачу о кручении составного круглого стержня, когда торцы стержня нагружены. Направим ось z цилиндрических координат r, θ, z по оси стержня, а центр координат поместим в центре одного основания цилиндра (фиг. 3).

Связь между интенсивностью касательных напряжений и скоростью сдвига примем в виде (1.8).

Пусть боковая поверхность стержня не нагружена, а на торцах действуют касательные напряжения, распределенные по степенному закону вида



Фиг. 3.

$$p_i = -\tau_{\theta z}^{(i)} = -A_i r^{\mu_i}, \quad (3.1)$$

где A_i — неизвестны.

В этом случае ищем решение уравнения (1.9) в виде

$$\Phi_i = \Phi_i(r). \quad (3.2)$$

Тогда уравнение (1.9) примет следующий вид

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^{\frac{2+\mu_i}{\mu_i}}} \left(\frac{d\Phi_i}{dr} \right)^{\mu_i} \right] = 0. \quad (3.3)$$

Интегрируя это уравнение и пользуясь условием (1.7), получим

$$\Phi_i(r) = \frac{B_i}{3+\mu_i} r^{3+\mu_i}, \quad (r_{i-1} \leq r \leq r_i, \quad i=1, 2, \dots, n) \quad (3.4)$$

где B_i — постоянные интегрирования. Здесь, на оси вала, вместо постоянной взят нуль, что не влияет на общность решения.

Остается определить постоянные интегрирования $B_1, B_2, \dots, B_n$.

Для этого воспользуемся условием (1.10), которое в данном случае примет вид

$$K_i^{-\frac{1}{\mu_i}} \frac{1}{r^{\frac{1}{2(1-\mu_i)}}} \left(\frac{d\Phi_i}{dr} \right)^{\frac{1}{\mu_i}} = \\ = K_j^{-\frac{1}{\mu_j}} \frac{1}{r^{\frac{1}{2(1-\mu_j)}}} \left(\frac{d\Phi_j}{dr} \right)^{\frac{1}{\mu_j}} \quad \text{на } L_{ij}. \quad (3.5)$$

Подставляя значения $\frac{d\Phi_i}{dr}$ из (3.4) в (3.5) получим

$$\left(\frac{B_i}{K_i} \right)^{\frac{1}{\mu_i}} = \left(\frac{B_j}{K_j} \right)^{\frac{1}{\mu_j}}. \quad (3.6)$$

Из (1.2), (3.1) и (3.4) следует, что

$$A_i = B_i. \quad (3.7)$$

С другой стороны, из выражения крутящего момента имеем

$$M = 2\pi \sum_{i=1}^n B_i \frac{1}{3 + \mu_i} r_i^{3+\mu_i} \frac{r_i}{r_{i-1}}, \quad (3.8)$$

где $r_0 = 0$, $r_n = R$, R — радиус круга.

(3.6) и (3.8) составляют n уравнений, из которых можно определить неизвестные $B_1, B_2, \dots, B_n$. Тогда $A_1, A_2, \dots, A_n$ определим из (3.7).

Нетрудно видеть, что решение (3.4) удовлетворяет всем условиям, т. е. контурному условию (3.1), условию (1.7) на оси z и условиям (1.5) и (1.10) на линиях раздела L_{ij} .

Подставляя значение Φ_i из (3.3) в (1.2), получим выражения компонентов касательных напряжений в цилиндрических координатах

$$\tau_{r\theta}^{(i)} = 0, \\ \tau_{rz}^{(i)} = B_i r^{\mu_i}. \quad (3.9)$$

Մ. Մ. Մանուկյան

ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՀԱՏՈՒՅՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ԼԻՍԵՌՆԵՐԻ
ՈԼՈՐՈՒՄԸ ՀԱՍՏԱՏՎԱԾ ՍՈՂՔԻ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկվում է կողմնային մակերևութներով իրար հետ զոդված և առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ դասավորված տարրեր նյութերից կազմված փոփոխական տրամագծով կլոր լիսեռի ոլորման խնդիրը, երբ ակց նյութերը գտնվում են հաստատված սողքի պայմաններում և արտաքին ուժերը առանցքի նկատմամբ ունեն սիմետրիկ դասավորություն:

Այս խնդրի լուծման ժամանակ ընդունվում է, որ սողքի գեֆորմացիայի արագության և լարվածության ինտենսիվությունների միջև գոյություն ունի աստիճանային կապ:

Քննարկվող խնդրի լուծումը բերվում է լարումների ֆունկցիայի որոնմանը, որը լիսեռի առանցքային հատույթի լուրաքանչյուր D_i տիրույթում բավարարում է (1.9) հավասարմանը, (1.4) եզրային պայմանին, (1.7) առանցքային պայմանին, իսկ տիրույթների բաժանման L_{ij} դժերի վրա՝ (1.5) և (1.10) պայմաններին:

Աշխատության վերջում, որպես կիրառություն տրվում է հետևյալ երկու խնդիրների ճշգրիտ լուծումը՝ 1. Կոնական բաղադրյալ ձողի ոլորումը 2. Կլոր բաղադրյալ ձողի ոլորումը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Чобанян К. С. Кручение составного вала переменного диаметра. Доклады АН Армянской ССР, 27 № 3, 1958, 139—144.
2. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, М., 1960.
3. Соколовский В. В. Теория пластичности. Гостехиздат, М.—Л., 1950.