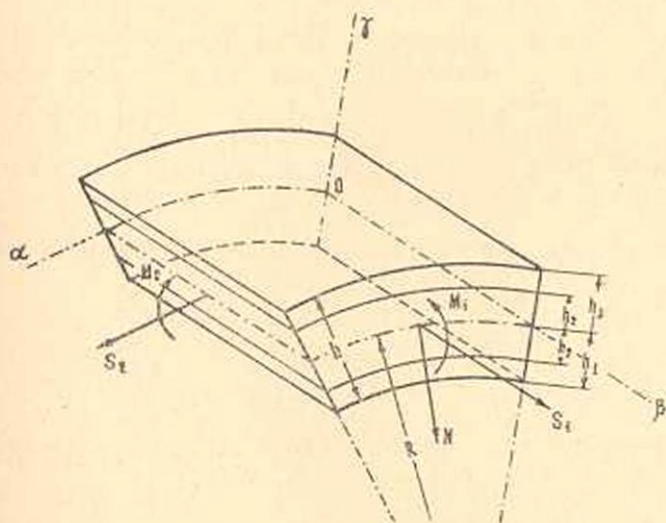


С. А. Амбарцумян

Об осесимметричной задаче трехслойной цилиндрической оболочки, составленной из нелинейно-упругих материалов

Рассматривается трехслойная круговая цилиндрическая оболочка, составленная из нелинейно-упругих слоев, симметрично расположенных относительно срединной поверхности радиуса R (фиг. 1).



Фиг. 1.

Принимается, что срединная поверхность отнесена к ортогональной системе координат α, β , совпадающей с линиями кривизны поверхности, т. е. с прямолинейными образующими ($\beta = \text{const}$) и с направляющими дугами ($\alpha = \text{const}$). Принимается также, что прямолинейная координата γ направлена по внутренней нормали срединной поверхности. Граничные условия осесимметричны, и оболочка несет лишь нормально приложенную осесимметричную нагрузку z .

В основу кладутся следующие гипотезы и предположения:

а) Гипотеза недеформируемых нормалей, данная для всего пакета оболочки в целом;

б) Несжимаемость материала каждого слоя оболочки;

$$S_2 = Bz_2 - 2b_2 \sum_{s=0}^{k_2} C_{k_2}^s \left(\frac{4}{3}\right)^s \varepsilon_2^{2(k_2-s)+1} \chi_1^{2s} \frac{h_2^{2s+1}}{2s+1} -$$

$$- 2b_1 \sum_{s=0}^{k_1} C_{k_1}^s \left(\frac{4}{3}\right)^s \varepsilon_2^{2(k_1-s)+1} \chi_1^{2s} \frac{h_1^{2s+1} - h_2^{2s+1}}{2s+1}, \quad (7)$$

$$M_1 = -Dz_1 + \frac{8}{3} b_2 \sum_{s=0}^{k_2} C_{k_2}^s \left(\frac{4}{3}\right)^s \varepsilon_2^{2(k_2-s)+1} \frac{h_2^{2s+3}}{2s+3} +$$

$$+ \frac{8}{3} b_1 \sum_{s=0}^{k_1} C_{k_1}^s \left(\frac{4}{3}\right)^s \varepsilon_2^{2(k_1-s)+1} \chi_1^{2s+1} \frac{h_1^{2s+3} - h_2^{2s+3}}{2s+3}, \quad (8)$$

$$M_2 = \frac{1}{2} M_1, \quad (9)$$

где

$$B = 2[a_2 h_2 + a_1(h_1 - h_2)], \quad (10)$$

$$D = \frac{8}{9} [a_2 h_2^3 + a_1(h_1^3 - h_2^3)], \quad (11)$$

$$C_{k_i}^s = \frac{k_i!}{s!(k_i - s)!}. \quad (12)$$

Дифференциальные уравнения равновесия элемента оболочки имеют вид [1, 2, 3]

$$\frac{dN}{dx} + \frac{1}{R} S_2 + Z = 0, \quad N = \frac{dM_1}{dx},$$

или, после исключения N ,

$$\frac{d^2 M_1}{dx^2} + \frac{1}{R} S_2 + Z = 0. \quad (13)$$

Подставляя значения S_2 и M_1 соответственно из (7) и (8) в (13), при этом учитывая (4), получим нелинейное разрешающее уравнение относительно искомой функции w

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{B}{D} \frac{w}{R^2} - \frac{8}{3} \frac{1}{D} \frac{d^2}{dx^2} \left[b_2 \sum_{s=0}^{k_2} C_{k_2}^s \left(\frac{4}{3}\right)^s \times \right.$$

$$\times \left(-\frac{w}{R} \right)^{2(k_2-s)} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^{2s+1} \frac{h_2^{2s+3}}{2s+3} + b_1 \sum_{s=0}^{k_1} C_{k_1}^s \left(\frac{4}{3}\right)^s \times$$

$$\times \left(-\frac{w}{R} \right)^{2(k_1-s)} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^{2s+1} \frac{h_1^{2s+3} - h_2^{2s+3}}{2s+3} \Big] +$$

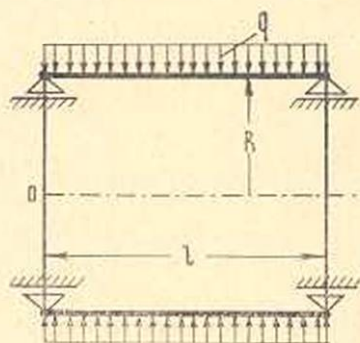
$$+ \frac{2}{R} \cdot \frac{1}{D} \left[b_2 \sum_{s=0}^{k_2} C_{k_2}^s \left(\frac{4}{3}\right)^s \left(-\frac{w}{R} \right)^{2(k_2-s)+1} \times \right.$$

$$\times \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^{2s} \frac{h_2^{2s+1}}{2s+1} + b_1 \sum_{s=0}^{k_1} C_{k_1}^s \left(\frac{4}{3} \right)^s \times \\ \times \left(-\frac{w}{R} \right)^{2(k_1-s)+1} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^{2s} \frac{h_1^{2s+1} - h_2^{2s+1}}{2s+1} \Big| = \frac{Z}{D} \quad (14)$$

Граничные условия ничем не отличаются от обычных [1, 2, 3].

Таким образом, задача осесимметричной деформации трехслойной нелинейно-упругой цилиндрической оболочки, при отсутствии осевой силы S_z , сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения (14), при заданных граничных условиях.

Для иллюстрации рассмотрим свободно опертую по торцам трехслойную цилиндрическую оболочку, находящуюся под действием равномерно распределенной нагрузки с интенсивностью q (фиг. 2).



Фиг. 2.

Пусть для рассматриваемой оболочки имеем

$$h_1 = h_3 = h/2, \quad a_1 = a_3 = 10^6 \text{ кг/см}^2, \\ b_1 = b_3 = 0, \quad h_2 = h/4, \quad a_2 = 10^6 \text{ кг/см}^2, \\ b_2 = 10^{11} \text{ кг/см}^2, \quad m_2 = 3,$$

$l = R = 100 h$ (l — длина оболочки), т. е. рассматривается оболочка, которая собрана из линейно-упругих несущих слоев и нелинейно-упругого заполнителя.

В этом случае разрешающее уравнение (14) существенно упрощается и принимает следующий вид

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{B}{D} \frac{w}{R^2} - \frac{8}{9} \frac{h_2^3}{R^3} \frac{b}{D} \frac{d^2}{dx^2} \left[w^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + \right. \\ \left. + \frac{4}{s} h_2^2 R^2 \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^3 \right] - 2 \frac{h_2}{R^4} \frac{b}{D} \left[w^2 + \right. \\ \left. + \frac{4}{9} h_2^2 R^2 w \cdot \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 \right] = \frac{q}{D} \quad (15)$$

Уравнение (15) решаем методом Бубнова-Галеркина [4]. Решение, которое удовлетворяет условиям свободного опирания по торцам, в первом приближении, представляется в виде

$$w = C \cdot \sin \frac{\pi x}{l} \quad (16)$$

Произведя известные [4] преобразования, для определения C получим следующее кубическое уравнение

$$C \left(\frac{\pi^4}{2l^3} + \frac{Bl}{2DR^2} \right) - C^3 \frac{h_2}{D} \left(\frac{2\pi^4 h_2^3}{3R^2 l^3} + \frac{4\pi^8 h_2^5}{15l^5} + \frac{3lh_2}{4R^4} \right) = \frac{2ql}{D\pi} \quad (17)$$

или подставляя значения упругих постоянных, при этом учитывая (10) и (11), получим

$$450,5 \left(\frac{C}{h} \right) - 1688,4 \left(\frac{C}{h} \right)^3 = 5,73 q. \quad (18)$$

В нижеследующей таблице приведены результаты некоторых численных подсчетов. Для наглядности, в третьей строке таблицы даны результаты решения рассмотренной задачи, когда все слои линейно-упруги.

C/h	0.0	0.1	0.2	0.3
q	0.0	7.57	13.37	15.63
q линейная	0.0	7.86	15.72	23.58

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 16 XI 1960

Ս. Ս. Համբարձումյան

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՒՁԳԱԿԱՆ ՆՅՈՒԹԵՐԻՑ ԿԱԶՄՎԱԾ ԵՌԱՇԵՐՏ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՄԻ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Այս նոթում քննարկված է եզրերով ազատ հենված, եռաշերտ զլանալին թաղանթի խնդրի լուծումը, երբ թաղանթը կազմված է ոչ զծալին առաձգական նյութերից: Դիտարկվում է ալն դեպքը, երբ թաղանթը բեռնավորված է մակերևութին ուղղահայաց հավասարաչափ բաշխված ուժերով:

Ստացված ոչ զծալին չորրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումը լուծված է Բուրնոլի-Գալլորկինի մեթոդով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, М., 1948.
2. Амбарцумян С. А. Расчет слоистых оболочек вращения. «ДАН АрмССР», 11, № 2, 1949.
3. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, М.—Л., 1947.
4. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. Гостехиздат, М., 1956.