

П. О. Галфаян

Изгиб полого прямоугольного стержня с тонким
усиливающим покрытием

Точное решение задачи об изгибе призматического стержня с усиливающим покрытием сводится к решению задачи об изгибе составного стержня [1, 2, 3, 4]. Функция напряжений при изгибе $F(x, y)$ должна удовлетворять уравнению Пуассона в каждой из областей D_1 и D_2 поперечного сечения D_0 , соответствующих основному материалу и материалу покрытия стержня, контурному условию на L_0 и двум условиям на линии раздела L_{12} областей D_1 и D_2 . Точное определение F , при решении конкретных задач, в большинстве случаев связано с математическими трудностями. Поэтому целесообразно воспользоваться малостью толщины покрытия по сравнению с поперечными размерами изгибаемого стержня и задачу определения F рассматривать в приближенной постановке. Этот вопрос освещен в работе [4], в которой показано, что с некоторым приближением функцию напряжений F можно определить только в области D_1 со смешанным контурным условием на L_2 или L_0 . В работе [4] показано, что это приближение эквивалентно предположению о линейности изменения F по малой толщине покрытия.

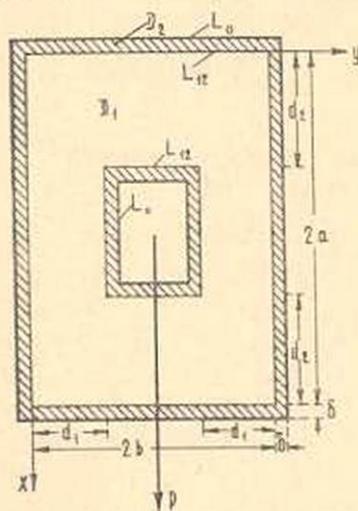
В настоящей статье рассмотрен изгиб поперечной силой призматического стержня прямоугольного поперечного сечения с прямоугольным симметричным вырезом. Боковая и внутренняя поверхности стержня предполагаются покрытыми тонкими усиливающими слоями постоянной толщины. Для определения функции напряжений использована ортонормированная система функций, исследованная в работах [7] и [8].

Рассматриваемая задача сведена к решению совокупности двух вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений. При трех отношениях размеров квадратного сечения, с оценкой погрешности приближения, решена совокупность бесконечных систем. Рассмотрены частные случаи, соответствующие двум значениям коэффициента Пуассона $\nu = 0,3$ и $\nu = 0$. Определены касательные напряжения в характерных точках сечения.

1. Координатная система и размеры поперечного сечения изгибаемого стержня показаны на фиг. 1. Области, соответствующие уси-

ливающим покрытию, заштрихованы. Один конец стержня заделан, а на его свободном конце, в центре тяжести сечения, приложена поперечная изгибающая сила P , направленная параллельно оси x .

Предположим, что коэффициенты Пуассона для основного материала и материала усиливающего покрытия одинаковы. Тогда при



Фиг. 1.

изгибе стержня, боковая поверхность которого свободна от внешних воздействий, можно положить

$$\tau_{xy} = \sigma_x = \sigma_y = 0. \quad (1.1)$$

Для осевой деформации ϵ_z и нормального напряжения σ_z принимаем следующие выражения [2, 3, 4]

$$\epsilon_z = \frac{1}{E_2} (A_0 x + B_0) (l - z), \quad (1.2)$$

$$\sigma_z^{(i)} = (A_i x + B_i) (l - z), \quad (1.3)$$

где l — длина стержня, E_2 — модуль упругости материала покрытия, а A_i и B_i ($i = 0, 1, 2$) — постоянные, подлежащие определению.

Рассматривая условия равновесия части стержня, заключенной между свободным концом $z = l$ и произвольным сечением $z = \text{const}$, будем иметь

$$\iint_{D_0} \sigma_z a x \, dy = 0, \quad \iint_{D_0} x \sigma_z \, dx \, dy = -M, \quad (1.4)$$

где $D_0 = D_1 + D_2$ — поперечное сечение изгибаемого стержня, M — изгибающий момент в сечении $z = \text{const}$ стержня

$$M = P \cdot (l - z). \quad (1.5)$$

Используя закон Гука, из условий (1.2) и (1.3) получим

$$A_0 = A_2, \quad B_0 = B_2 \quad \text{и} \quad A_2 = \frac{E_2}{E_1} A_1, \quad B_2 = \frac{E_2}{E_1} B_1. \quad (1.6)$$

Из (1.3), (1.4), (1.5) и (1.6) получим

$$A_1 = -\frac{3P}{4} \cdot \frac{1}{\lambda_2 - 3\lambda_1 a^2}, \quad B_1 = -a A_1, \quad (1.7)$$

где

$$\lambda_1 = a d_1 + b d_2 - d_1 d_2 + \mu [2(a + b) - (d_1 + d_2)],$$

$$\lambda_2 = 4a^3 d_1 + d_2 (b - d_1) (6a^2 - 3a d_2 + d_2^2) + \mu [2a^2 [4(a + b) - d_1] - 2d_2 [2a(b - d_1) + d_2(a + b + d_1)] + d_2^3 + 3\mu [a d_1 +$$

$$+d_2(2a + b - d_1 - d_2)] + \delta^2(6a + 2b - d_1 - 3d_2)].$$

Здесь $\mu = \frac{G_2}{G_1} \delta$, δ — толщина покрытия, G_1 и G_2 — модули сдвига основного материала и материала покрытия.

Перейдем теперь к определению касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} в соответствующих областях D_1 и D_2 .

Ввиду симметричности области поперечного сечения, достаточно найти функцию напряжений $F(x, y)$ только в одной четвертой части области сечения (фиг. 2).

Для распространения решения на всю область поперечного сечения на основании мембранной аналогии [10] требуется, чтобы на вертикальной оси симметрии функция $F(x, y)$ обратилась в нуль, а вдоль горизонтальной оси симметрии обратилась в нуль $\frac{\partial F}{\partial x}$.

Функция напряжений $F(x, y)$, при решении задач об изгибе стержня с тонким усиливающим покрытием, как известно [3, 4], удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta F = -\frac{\nu}{1+\nu} A_1 \cdot (y-b) \quad (1.8)$$

внутри области сечения и условию

$$F + \mu \frac{\partial F}{\partial n} = - \int \left(A_1 \frac{x^2}{2} + B_1 x \right) dy + C \quad (1.9)$$

на контуре области.

Здесь ν — коэффициент Пуассона, A_1 и B_1 — известные постоянные (1.7), C — постоянная интегрирования.

Касательные напряжения в области D_1 определяются формулами

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} + A_1 \frac{x^2}{2} + B_1 x, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x} \quad (1.10)$$

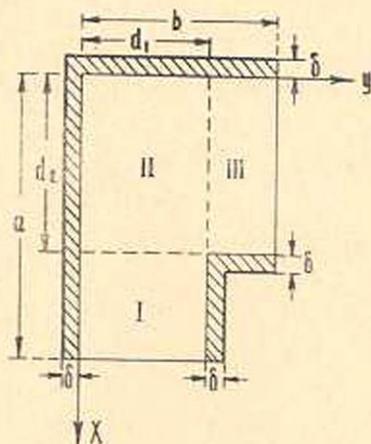
В области D_2 , соответствующей тонкому покрытию, касательное напряжение постоянно по направлению нормали n , направлено параллельно касательной l и определяется формулой

$$\tau_{xz}^* = \frac{C_0 - F}{\delta} + A_2 \frac{x^2}{2} + B_2 x. \quad (1.11)$$

Функцию $F(x, y)$ будем искать в виде

$$F(x, y) = \begin{cases} F_1(x, y) + S_1(y) & \text{в области I,} \\ F_2(x, y) & \text{в области II,} \\ F_3(x, y) + S_3(x, y) & \text{в области III,} \end{cases} \quad (1.12)$$

где



Фиг. 2.

$$S_1(y) = \frac{y + \mu}{d_1 + 2\mu} C_0, \quad S_3(x, y) = \frac{x + \mu}{d_2 + 2\mu} (C_0 + y r_0), \quad (1.13)$$

$$r_0 = - \left(A_1 \frac{d_2^2}{2} + B_1 d_2 \right) = \frac{d_2}{2} (2a - d_2) A_1,$$

C_0 — значение C на внутреннем контуре.

На основании (1.8), (1.9) и (1.12), для определения F_1 , F_2 и F_3 получаем следующие условия

$$\Delta F_i = - \frac{\nu}{1 + \nu} A_1 (y - b) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.14)$$

$$F_1(x, 0) - \mu \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad F_1(x, d_1) + \mu \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big|_{y=d_1} = 0, \quad (1.15)$$

$$F_2(x, 0) - \mu \frac{\partial F_2}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad F_2(0, y) - \mu \frac{\partial F_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (1.16)$$

$$F_3(0, y) - \mu \frac{\partial F_3}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad F_3(d_2, y) + \mu \frac{\partial F_3}{\partial x} \Big|_{x=d_2} = 0, \quad (1.17)$$

$$F_2(d_2, y) = F_1(d_2, y) + S_1(y), \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} \Big|_{x=d_2} = \frac{\partial F_1}{\partial x} \Big|_{x=d_2}, \quad (1.18)$$

$$F_2(x, d_1) = F_3(x, d_1) + S_3(x, d_1), \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} \Big|_{y=d_1} = \frac{\partial F_3}{\partial y} \Big|_{y=d_1} + \frac{\partial S_3}{\partial y} \Big|_{y=d_1}, \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0, \quad F_3(x, b) + S_3(x, b) = 0. \quad (1.20)$$

Условия (1.20) выражают симметричность функции $F(x, y)$ относительно осей симметрии области прямоугольного сечения стержня.

Функции F_1 , F_2 и F_3 представим в виде рядов

$$F_1(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \frac{\sin \beta_k y + \mu \beta_k \cos \beta_k y}{M_k}, \quad (1.21)$$

$$F_2(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) \frac{\sin \beta_k y + \mu \beta_k \cos \beta_k y}{M_k}, \quad (1.22)$$

$$F_3(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(y) \frac{\sin \alpha_k x + \mu \alpha_k \cos \alpha_k x}{N_k}, \quad (1.23)$$

где

$$M_k = \sqrt{\mu + \frac{d_1}{2} (1 + \mu^2 \beta_k^2)}, \quad N_k = \sqrt{\mu + \frac{d_2}{2} (1 + \mu^2 \alpha_k^2)}, \quad (1.24)$$

α_k и β_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) являются корнями трансцендентных уравнений

$$1 - \mu^2 \alpha_k^2 + 2\mu \alpha_k \operatorname{ctg} d_2 \alpha_k = 0, \quad (1.25)$$

$$1 - \mu^2 \beta_k^2 + 2\mu \beta_k \operatorname{ctg} d_1 \beta_k = 0.$$

Последовательности $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$, при k стремящемся к бесконечности, стремятся к последовательностям $\left[\frac{k\pi}{d_2} \right]$ и $\left[\frac{k\pi}{d_1} \right]$ [7, 8].

Системы функций

$$\frac{\sin \beta_k y + \mu \beta_k \cos \beta_k y}{M_k} \quad \text{и} \quad \frac{\sin \alpha_k x + \mu \alpha_k \cos \alpha_k x}{N_k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.26)$$

в интервалах $0 < y < d_1$ и $0 < x < d_2$ являются ортонормированными.

Разложим функции $S_1(y)$ и $x + \mu$ в ряды по функциям (1.26) в интервалах $0 < y < d_1$ и $0 < x < d_2$.

$$S_1(y) = C_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\beta_k M_k} \cdot \frac{\sin \beta_k y + \mu \beta_k \cos \beta_k y}{M_k}, \quad (1.27)$$

$$x + \mu = (d_2 + 2\mu) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha_k N_k} \cdot \frac{\sin \alpha_k x + \mu \alpha_k \cos \alpha_k x}{N_k}.$$

2. Подставляя (1.21) и (1.23) в (1.14) и используя условия (1.18)–(1.20), находим функции $f_k(x)$ и $\psi_k(y)$. Используя полученные значения функций $f_k(x)$ и $\psi_k(y)$, в силу (1.21) и (1.23), получим

$$F_1(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[B_k \frac{\operatorname{ch}(x-a)\beta_k}{\operatorname{ch} a \beta_k} + \frac{g_k}{\beta_k^2} \right] \frac{\sin \beta_k y + \mu \beta_k \cos \beta_k y}{M_k}, \quad (2.1)$$

$$F_2(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[E_k \frac{\operatorname{sh}(y-b)\alpha_k}{\operatorname{ch} b \alpha_k} - \frac{(-1)^k}{\alpha_k N_k} (C_0 + b r_0) \frac{\operatorname{ch} \alpha_k y}{\operatorname{ch} b \alpha_k} + \frac{h_k}{\alpha_k^2} (y-b) \right] \frac{\sin \alpha_k x + \mu \alpha_k \cos \alpha_k x}{N_k}. \quad (2.2)$$

Здесь B_k и E_k постоянные интегрирования, которые должны быть определены из условий (1.18) и (1.19), а

$$g_k = -\frac{\nu}{1+\nu} \cdot \frac{A_1}{\beta_k M_k} [b + \mu + (-1)^k (b - d_1 - \mu)],$$

$$h_k = \frac{\nu}{1+\nu} \cdot \frac{1 + (-1)^k}{\alpha_k N_k} A_1.$$

Для определения $\varphi_k(x)$ используем метод Г. А. Гринберга [11]. Из (1.22) имеем

$$\varphi_k(x) = \int_0^{d_1} F_2(x, y) \frac{\sin \beta_k y + \mu \beta_k \cos \beta_k y}{M_k} dy. \quad (2.3)$$

Умножив уравнение (1.14) на первую систему функций (1.26) и проинтегрировав его по y от нуля до d_1 , используя условия (1.16), (1.19), (1.25), (1.27), (2.2) и значения (2.3), для функции $\varphi_k(x)$ получим

$$\begin{aligned} \varphi_k''(x) - \beta_k^2 \varphi_k(x) = & -g_k - \frac{\sin d_1 \beta_k + \mu \beta_k \cos d_1 \beta_k}{\mu M_k} \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ E_p [\mu \alpha_p - \right. \\ & \left. - \operatorname{th}(b - d_1) \alpha_p] \frac{\operatorname{ch}(b - d_1) \alpha_p}{\operatorname{ch} b \alpha_p} + (-1)^p \frac{C_0 + (d_1 + \mu) r_0}{\alpha_p N_p} - \right. \\ & \left. - \frac{(-1)^p}{\alpha_p N_p} (C_0 + b r_0) (1 + \mu \alpha_p \operatorname{th} d_1 \alpha_p) \frac{\operatorname{ch} d_1 \alpha_p}{\operatorname{ch} b \alpha_p} - \right. \\ & \left. - \frac{h_p}{\alpha_p^2} (b - d_1 - \mu) \right\} \frac{\sin \alpha_p x + \mu \alpha_p \cos \alpha_p x}{N_p}. \quad (2.4) \end{aligned}$$

Решив уравнение (2.4) и удовлетворив граничным условиям для $\varphi_k(x)$ получим следующее выражение

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) = & C_k \left[\operatorname{sh}(x - d_2) \beta_k + \frac{\mu \beta_k + \operatorname{th} d_2 \beta_k}{1 + \mu \beta_k \operatorname{th} d_2 \beta_k} \operatorname{ch}(x - d_2) \beta_k \right] + \\ & + \frac{g_k}{\beta_k^2} \left[1 - \frac{\operatorname{ch}(x - d_2) \beta_k}{\operatorname{ch} d_2 \beta_k + \mu \beta_k \operatorname{sh} d_2 \beta_k} \right] + \frac{\sin d_1 \beta_k + \mu \beta_k \cos d_1 \beta_k}{\mu M_k} \times \\ & \times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_p^2 + \beta_k^2} \left\{ E_p [\mu \alpha_p - \operatorname{th}(b - d_1) \alpha_p] \frac{\operatorname{ch}(b - d_1) \alpha_p}{\operatorname{ch} b \alpha_p} + \right. \\ & \left. + (-1)^p \frac{C_0 + (d_1 + \mu) r_0}{\alpha_p N_p} - \frac{(-1)^p}{\alpha_p N_p} (C_0 + b r_0) \frac{\operatorname{ch} d_1 \alpha_p}{\operatorname{ch} b \alpha_p} \times \right. \\ & \left. \times (1 + \mu \alpha_p \operatorname{th} d_1 \alpha_p) - \frac{h_p}{\alpha_p^2} (b - d_1 - \mu) \right\} \frac{\sin \alpha_p x + \mu \alpha_p \cos \alpha_p x}{N_p}, \quad (2.5) \end{aligned}$$

где C_k — постоянные интегрирования, которые должны быть определены из условия (1.18).

На основании (1.22) и (2.5) получим

$$\begin{aligned} F_2(x, y) = & \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^k \alpha_k}{N_k} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_p^2 + \alpha_k^2} \left[C_p \frac{(1 + \mu \beta_p^2) \operatorname{th} d_2 \beta_p + 2\mu \beta_p}{1 + \mu \beta_p \operatorname{th} d_2 \beta_p} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{g_p}{\beta_p^2} \left[1 + \frac{1 + (-1)^k}{\alpha_k^2} \beta_k^2 - \frac{1}{\operatorname{ch} d_2 \beta_p + \mu \beta_p \operatorname{sh} d_2 \beta_p} \right] \right\} \frac{\sin \beta_p y + \mu \beta_p \cos \beta_p y}{M_p} + \\ & + \left\{ E_k [\mu \alpha_k - \operatorname{th}(b - d_1) \alpha_k] \frac{\operatorname{ch}(b - d_1) \alpha_k}{\operatorname{ch} b \alpha_k} + (-1)^k \frac{C_0 + (d_1 + \mu) r_0}{\alpha_k N_k} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{(-1)^k}{\alpha_k N_k} (C_0 + br_0) (1 + \mu \alpha_k \operatorname{th} d_1 \alpha_k) \frac{\operatorname{ch} d_1 \alpha_k}{\operatorname{ch} b \alpha_k} - \frac{h_k}{\alpha_k^2} (b - d_1 - \mu) \left\{ \times \right. \\
 & \left. \times \frac{\operatorname{sh} \alpha_k y + \mu \alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k y}{(1 + \mu^2 \alpha_k^2) \operatorname{sh} d_1 \alpha_k + 2 \mu \alpha_k \operatorname{ch} d_1 \alpha_k} \right\} \frac{\operatorname{in} \alpha_k x + \mu \alpha_k \operatorname{cos} \alpha_k x}{N_k}. \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

Здесь использована сумма ряда [13]

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\operatorname{sin} d_1 \beta_k + \mu \beta_k \operatorname{cos} d_1 \beta_k) (\operatorname{sin} \beta_k y + \mu \beta_k \operatorname{cos} \beta_k y)}{(\beta_k^2 + \alpha_p^2) M_k^2} = \\
 & = \mu \frac{\operatorname{sh} \alpha_p y + \mu \alpha_p \operatorname{ch} \alpha_p y}{(1 + \mu^2 \alpha_p^2) \operatorname{sh} d_1 \alpha_p + 2 \mu \alpha_p \operatorname{ch} d_1 \alpha_p}. \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

Справедливость (2.7) проверяется разложением правой части в ряд по функциям (1.26).

Используя условия (1.18) и (1.19) и принимая во внимание (1.13), (2.1), (2.2), (2.5) и (2.6), получаем совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений

$$X_k = \sum_{p=0}^{\infty} a_{kp} Y_p + a_k, \quad Y_k = \sum_{p=0}^{\infty} b_{kp} X_p + b_k, \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (2.8)$$

где

$$a_{kp} = |1 - \mu \beta_k \operatorname{th} (a - d_2) \beta_k| \frac{m_k \alpha_p^2}{(\alpha_p^2 + \beta_k^2) N_p^2}, \quad (2.9)$$

$$b_{kp} = |(1 + \mu^2 \alpha_k^2) \operatorname{th} d_1 \alpha_k + 2 \mu \alpha_k| \frac{n_k \beta_p^2}{(\beta_p^2 + \alpha_k^2) M_p}, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}
 a_k = & - \frac{m_k}{\beta_k} \operatorname{th} (a - d_2) \beta_k \left\{ C_0 \left[1 - \beta_k [\mu \beta_k - \operatorname{cth} (a - d_2) \beta_k] \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_p^2 + \beta_k^2) N_p^2} \left[1 - (1 + \mu \alpha_p \operatorname{th} d_1 \alpha_p) \frac{\operatorname{ch} d_1 \alpha_p}{\operatorname{ch} b \alpha_p} \right] \right\} + \right. \\
 & + \frac{(-1)^k}{\beta_k} \cdot \frac{g_k M_k}{\operatorname{ch} d_2 \beta_k + \mu \beta_k \operatorname{sh} d_2 \beta_k} - \beta_k [\mu \beta_k - \operatorname{cth} (a - d_2) \beta_k] \times \\
 & \left. \times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_p^2 + \beta_k^2) N_p^2} \left[r_0 \left(d_1 + \mu - b \frac{\operatorname{ch} d_1 \alpha_p + \mu \alpha_p \operatorname{sh} d_1 \alpha_p}{\operatorname{ch} b \alpha_p} \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - (-1)^p \frac{h_p N_p}{\alpha_p} (b - d_1 - \mu) \right] \right\}, \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_k = & - \frac{n_k}{\alpha_k} \left\{ C_0 (1 + \mu \alpha_k \operatorname{th} d_1 \alpha_k - \operatorname{sch} b \alpha_k \cdot \operatorname{sch} d_1 \alpha_k) + \right. \\
 & \left. + (1 + \mu \alpha_k \operatorname{th} d_1 \alpha_k) \left[r_0 d_1 - (-1)^k \frac{h_k N_k}{\alpha_k} (b - d_1) \right] - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\operatorname{sch} \beta x_k \cdot \operatorname{sch} d_1 x_k}{b} - \frac{\mu x_k + \operatorname{th} d_1 x_k}{x_k} \left[r_0 + (-1)^k \frac{h_k N_k}{x_k} \right] - \\
 & - x_k \left[(1 + \mu^2 x_k^2) \operatorname{th} d_1 x_k + 2\mu x_k \right] \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p G_p}{\beta_p (\beta_p^2 + x_k^2) M_p} \left[1 + \right. \\
 & \left. + \frac{1 + (-1)^k \beta_p^2}{x_k^2} - \frac{1}{\operatorname{ch} d_2 \beta_p + \mu \beta_p \operatorname{sh} d_2 \beta_p} \right] \Bigg\}, \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

$$m_k = - \frac{1}{\beta_k} \cdot \frac{(1 + \mu^2 \beta_k^2) \operatorname{th} d_2 \beta_k + 2\mu \beta_k}{1 + \operatorname{th} d_2 \beta_k \cdot \operatorname{th} (a - d_2) \beta_k + \mu \beta_k [\operatorname{th} d_2 \beta_k + \operatorname{th} (a - d_2) \beta_k]}, \quad (2.13)$$

$$n_k = - \frac{1}{x_k} \cdot \frac{1 - \mu x_k \operatorname{cth} (b - d_1) x_k}{1 + \operatorname{th} d_1 x_k \cdot \operatorname{cth} (b - d_1) x_k + \mu x_k [\operatorname{th} d_1 x_k + \operatorname{cth} (b - d_1) x_k]}. \quad (2.14)$$

Коэффициенты C_k , E_k и B_k через X_k и Y_k определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
 C_k &= \frac{(-1)^k \beta_k}{M_k} \cdot \frac{1 + \mu \beta_k \operatorname{th} d_2 \beta_k}{(1 + \mu^2 \beta_k^2) \operatorname{th} d_2 \beta_k + 2\mu \beta_k} \cdot X_k, \\
 E_k &= \frac{(-1)^k x_k}{N_k} \cdot \frac{\operatorname{ch} \beta x_k}{\operatorname{sh} (b - d_1) x_k} \cdot \frac{Y_k}{1 - \mu x_k \operatorname{cth} (b - d_1) x_k}, \\
 B_k &= - \frac{(-1)^k}{M_k} \cdot \frac{\operatorname{ch} a \beta_k}{\operatorname{sh} (a - d_2) \beta_k} \left\{ \frac{(1 + \mu \beta_k \operatorname{th} d_2 \beta_k) \beta_k}{(1 + \mu^2 \beta_k^2) \operatorname{th} d_2 \beta_k + 2\mu \beta_k} \cdot X_k + \right. \\
 & + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x_p^2}{(x_p^2 + \beta_k^2) N_p^2} \cdot Y_p + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(x_p^2 + \beta_k^2) N_p^2} \left[(-1)^p \frac{h_p N_p}{x_p} (b - \right. \\
 & - d_1 - \mu) - C_0 \left(1 - \frac{\operatorname{ch} d_1 x_p + \mu x_p \operatorname{sh} d_1 x_p}{\operatorname{ch} b x_p} \right) - \\
 & \left. - r_0 \left(d_1 + \mu - b \frac{\operatorname{ch} d_1 x_p + \mu x_p \operatorname{sh} d_1 x_p}{\operatorname{ch} b x_p} \right) \right] \Bigg\}. \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

Для определения C_0 пользуемся теоремой о циркуляции касательного напряжения при изгибе [4, 9]

$$\int_{L_0} \frac{\partial F}{\partial n} ds + 2 \left[G_1 \vartheta + \frac{\nu}{1 + \nu} A_1 \cdot (y_0 - b) \right] \Omega_0 = 0, \quad (2.16)$$

где L_0 — внутренний контур сечения, Ω_0 — площадь, ограниченная этим контуром, y_0 — координата центра тяжести области Ω_0 , а ϑ — степень кручения изгибаемого стержня.

Так как изгиб стержня не сопровождается кручением, $\vartheta = 0$ и кроме того, вследствие симметрии, $y_0 = b$. Соотношение (2.16) примет вид

$$\int_{L_0} \frac{\partial F}{\partial n} ds = 0. \quad (2.17)$$

Подставив в (2.17) значение

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dx}{ds} \quad (2.18)$$

и произведя некоторые преобразования, соотношение (2.17) приведем к виду

$$\int_{d_1}^a \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} \right)_{y=d_1} dx + \int_{d_1}^b \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \right)_{x=d_1} dy = -\frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 - d_1^2}{d_2 + 2\mu} r_0 - \left(\frac{a - d_2}{d_1 + 2\mu} + \frac{b - d_1}{d_2 + 2\mu} \right) C_0. \quad (2.19)$$

Используя условия (2.1), (2.2), (2.15) и (2.19), получим выражение, определяющее значение C_0 через искомые величины X_k и Y_k

$$\begin{aligned} C_0 = \frac{1}{I} & \left\{ \frac{1}{2} \frac{b^2 - d_1^2}{d_2 + 2\mu} r_0 - (a - d_2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k g_k}{\beta_k M_k} + \right. \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{N_k^2} \left[\frac{\operatorname{cth}(b - d_1) \alpha_k - \operatorname{csch}(b - d_1) \alpha_k}{1 - \mu \alpha_k \operatorname{cth}(b - d_1) \alpha_k} \cdot \alpha_k Y_k + \right. \\ & + \left. \frac{(-1)^k}{2} \cdot \frac{h_k N_k}{\alpha_k} (b - d_1)^2 + \frac{b r_0}{\alpha_k} \left(\operatorname{th} b \alpha_k - \frac{\operatorname{sh} d_1 \alpha_k}{\operatorname{ch} b \alpha_k} \right) \right] + \\ & + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{M_p} \left\{ \frac{(1 + \mu \beta_k^2 \operatorname{th} d_2 \beta_k) \cdot \beta_k}{(1 + \mu \beta_k^2) \operatorname{th} d_2 \beta_k + 2\mu \beta_k} X_k + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\alpha_p^2}{(\alpha_p^2 + \beta_k^2) N_p^2} Y_p + \right. \\ & + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_p^2 + \beta_k^2) N_p^2} \left[(-1)^p \frac{h_p N_p}{\alpha_p} (b - d_1 - \mu) - \right. \\ & \left. \left. - r_0 \left(d_1 + \mu - b \frac{\operatorname{ch} d_1 \alpha_p + \mu \alpha_p \operatorname{sh} d_1 \alpha_p}{\operatorname{ch} b \alpha_p} \right) \right] \right\}, \quad (2.20) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} l = & -\frac{a - d_1}{d_1 + 2\mu} - \frac{b - d_1}{d_2 + 2\mu} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k N_k} \left(\operatorname{th} b \alpha_k - \frac{\operatorname{sh} d_1 \alpha_k}{\operatorname{ch} b \alpha_k} \right) + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{M_k} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_p^2 + \beta_k^2) N_p^2} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} d_1 \alpha_p + \mu \alpha_p \operatorname{sh} d_1 \alpha_p}{\operatorname{ch} b \alpha_p} \right). \end{aligned}$$

Докажем, что совокупность бесконечных систем (2.8) при условии $\mu > \frac{2}{\pi} d_1$ вполне регулярна. Действительно, используя сумму

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\alpha_p^2}{(\alpha_p^2 + \beta_k^2) N_p^2} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\mu \beta_k + \operatorname{th} d_2 \beta_k}{(1 + \mu^2 \beta_k^2) \operatorname{th} d_2 \beta_k + 2\mu \beta_k}$$

получаемую из (2.7), находим

$$\sum_{p=0}^{\infty} |a_{kp}| = \frac{1}{\mu \beta_k} \cdot \frac{|1 - \mu \beta_k \operatorname{th} (a - d_2) \beta_k| (\mu \beta_k + \operatorname{th} d_2 \beta_k)}{1 + \operatorname{th} d_2 \beta_k \cdot \operatorname{th} (a - d_2) \beta_k + \mu \beta_k [\operatorname{th} d_2 \beta_k + \operatorname{th} (a - d_2) \beta_k]} < \\ < \frac{\operatorname{th} (a - d_2) \beta_k}{1 + \operatorname{th} (a - d_2) \beta_k} = 1 - \vartheta, \quad \vartheta = \frac{1}{1 + \operatorname{th} (a - d_2) \beta_k} > 0. \quad (2.21)$$

Здесь использованы неравенства

$$|1 - \mu \beta_k \operatorname{th} (a - d_2) \beta_k| < \mu \beta_k \operatorname{th} (a - d_2) \beta_k, \quad (2.22)$$

$$1 + \mu \beta_k \operatorname{th} d_2 \beta_k < \mu \beta_k + \operatorname{th} d_2 \beta_k. \quad (2.23)$$

Неравенство (2.23) доказывается при помощи неравенства $\mu \beta_k > 1$, которое следует из уравнений (1.25) при условии $\mu > \frac{2}{\pi} d_1$.

В случае, когда

$$|1 - \mu \beta_k \operatorname{th} (a - d_2) \beta_k| < 1$$

имеем

$$\sum_{p=0}^{\infty} |a_{kp}| < \frac{1}{\mu \beta_k [1 + \operatorname{th} (a - d_2) \beta_k]} = 1 - \vartheta_1, \quad (2.24)$$

$$\vartheta_1 = 1 - \frac{1}{\mu \beta_k [1 + \operatorname{th} (a - d_2) \beta_k]} < 1.$$

Согласно (2.10) и (2.14) точно такие же оценки получим для суммы абсолютных значений коэффициентов второй системы (2.8). Таким образом, на основании (2.21) и (2.24), совокупность бесконечных систем (2.8) при условии $\mu > \frac{2}{\pi} d_1$ вполне регулярна [12]. Ограниченность свободных членов (2.11) и (2.12) вместе с вполне регулярностью бесконечных систем (2.8) позволяет определить искомые коэффициенты с любой степенью точности и дать оценку погрешности приближенного решения.

3. Рассмотрим квадратное сечение с симметричным квадратным вырезом

$$a = b \quad \text{и} \quad d_1 = d_2 = d. \quad (3.1)$$

Для толщины усиливающего покрытия и механических характеристик материалов примем

$$\delta = 0,1 \cdot d, \quad G_1 = 8 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2, \quad G_2 = 8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2. \quad (3.2)$$

Тогда $\mu = d$.

На основании (1.12), (1.13), (2.1), (2.2), (2.6), (2.15), (3.1) и (3.2) для функции напряжений будем иметь

$$\begin{aligned}
 F_1(x, y) = & \frac{C_0}{3d}(y+d) + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{g_k}{\alpha_k^2} - \frac{(-1)^k}{N_k} \cdot \frac{\operatorname{ch}(x-a)\alpha_k}{\operatorname{sh}(a-d)\alpha_k} \times \right. \\
 & \times \left. \left\{ \frac{(1+d\alpha_k \operatorname{th} d\alpha_k) \cdot \alpha_k}{(1+d^2\alpha_k^2) \operatorname{th} d\alpha_k + 2d\alpha_k} X_k + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\alpha_p^2}{(\alpha_p^2 + \alpha_k^2) N_p^2} Y_p - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_p^2 + \alpha_k^2) N_p^2} \left[C_0 \left(1 - \frac{\operatorname{ch} d\alpha_p + d\alpha_p \operatorname{sh} d\alpha_p}{\operatorname{ch} a\alpha_p} \right) - (-1)^p \frac{h_p N_p}{\alpha_p} (a-2d) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + r_0 \left(2d - a \frac{\operatorname{ch} d\alpha_p + d\alpha_p \operatorname{sh} d\alpha_p}{\operatorname{ch} a\alpha_p} \right) \right] \right\} \frac{\sin \alpha_k y + d\alpha_k \cos \alpha_k y}{N_k}, \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

где $d \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq d$;

$$\begin{aligned}
 F_2(x, y) = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha_k}{N_k} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_p^2 + \alpha_k^2} \left[\frac{(-1)^p \alpha_p}{N_p} X_p + \frac{g_p}{\alpha_p^2} \left[1 + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1 + (-1)^k}{\alpha_k^2} \alpha_p^2 - \frac{1}{\operatorname{ch} d\alpha_p + d\alpha_p \operatorname{sh} d\alpha_p} \right] \right\} \frac{\sin \alpha_p y + d\alpha_p \cos \alpha_p y}{N_p} - \\
 & - \left[Y_k + (-1)^k \frac{h_k N_k}{\alpha_k^3} (a-2d) + \frac{C_0 + ar_0}{\alpha_k^2} \cdot \frac{\operatorname{ch} d\alpha_k + d\alpha_k \operatorname{sh} d\alpha_k}{\operatorname{ch} a\alpha_k} - \right. \\
 & \left. - \frac{C_0 + 2dr_0}{\alpha_k^2} \right] \frac{\operatorname{sh} \alpha_k y + d\alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k y}{(1+d^2\alpha_k^2) \operatorname{sh} d\alpha_k + 2d\alpha_k \operatorname{ch} d\alpha_k} \frac{\sin \alpha_k x + d\alpha_k \cos \alpha_k x}{N_k}, \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

где $0 \leq x < d$, $0 \leq y \leq d$;

$$\begin{aligned}
 F_3(x, y) = & \frac{x+d}{3d} (C_0 + r_0 y) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha_k}{N_k} \left[(-1)^k \frac{h_k N_k}{\alpha_k^3} (y-a) + \right. \\
 & \left. + \frac{\operatorname{sh}(y-a)\alpha_k}{\operatorname{sh}(a-d)\alpha_k - d\alpha_k \operatorname{ch}(a-d)\alpha_k} Y_k - \frac{C_0 + ar_0}{\alpha_k^2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \alpha_k y}{\operatorname{ch} a\alpha_k} \right] \times \\
 & \times \frac{\sin \alpha_k x + d\alpha_k \cos \alpha_k x}{N_k}. \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

где $0 \leq x \leq d$, $d \leq y \leq a$.

Решая трансцендентное уравнение (1.25) методом касательных, для его корней с точностью до 10^{-3} будем иметь

$$\begin{aligned}
 d\alpha_0 = 1,312; \quad d\alpha_1 = 3,670; \quad d\alpha_2 = 6,579; \quad d\alpha_3 = 9,627; \\
 d\alpha_4 = 12,72; \quad d\alpha_k = k\pi \quad (k=5, 6, 7, \dots).
 \end{aligned}$$

Обозначим значения неизвестных X_k и Y_k с избытком через X_k^+ , Y_k^+ , а с недостатком через X_k^- , Y_k^- . Пользуясь теорией вполне регулярных систем [12], для X_k и Y_k при трех отношениях $\frac{a}{d}$ и

двух значениях коэффициента Пуассона ($\nu = 0,3$; $\nu = 0$) получим оценки, которые зависят от C_0 . Используя эти значения X_k , Y_k с избытком и с недостатком и учитывая (3.1) и (3.2), при помощи (2.20) получим следующие оценки для C_0 :

$$C_0^- = 23,119 \cdot 10^{-3} \frac{P}{d} < C_0 < 23,120 \cdot 10^{-3} \frac{P}{d} = C_0^+ \text{ при}$$

$$\frac{a}{d} = 1,1 \text{ и } \nu = 0,3,$$

$$C_0^- = 29,362 \cdot 10^{-3} \frac{P}{d} < C_0 < 29,364 \cdot 10^{-3} \frac{P}{d} = C_0^+ \text{ при}$$

$$\frac{a}{d} = 1,5 \text{ и } \nu = 0,3,$$

$$C_0^- = 3,1765 \cdot 10^{-3} \frac{P}{d} < C_0 < 3,1766 \cdot 10^{-3} \frac{P}{d} = C_0^+ \text{ при}$$

$$\frac{a}{d} = 10 \text{ и } \nu = 0,3,$$

$$C_0^- = 31,854 \cdot 10^{-3} \frac{P}{d} < C_0 < 31,855 \cdot 10^{-3} \frac{P}{d} = C_0^+ \text{ при}$$

$$\frac{a}{d} = 1,1 \text{ и } \nu = 0,$$

$$C_0^- = 26,113 \cdot 10^{-3} \frac{P}{d} < C_0 < 26,115 \cdot 10^{-3} \frac{P}{d} = C_0^+ \text{ при}$$

$$\frac{a}{d} = 1,5 \text{ и } \nu = 0,$$

$$C_0^- = 2,9429 \cdot 10^{-3} \frac{P}{d} < C_0 < 2,9443 \cdot 10^{-3} \frac{P}{d} = C_0^+ \text{ при}$$

$$\frac{a}{d} = 10 \text{ и } \nu = 0.$$

Используя эти значения C_0 , окончательно для X_k и Y_k получим значения, которые приведены в таблице 1.

Внося найденное значение функции напряжений $F(x, y)$ в формулы (1.10) и (1.11) и пользуясь данными таблицы 1, определим с избытком и недостатком значения напряжения τ_{xz} в трех характерных точках при трех отношениях размеров поперечного сечения. Эти значения напряжения приведены в таблице 2. Заметим, что в рассмотренных точках значения напряжения τ_{xz} с избытком и с недостатком с точностью до пяти знаков совпадают друг с другом.

Из непрерывности перемещений на контакте следует, что

$$\tau_{xz}^* = 10 \cdot \tau_{xz} \text{ при } y=0 \text{ и } y=d,$$

а из условия равновесия элемента линии раздела L_{12} следует, что

$$\tau_{xz}^* = \tau_{xz} \text{ при } x=0 \text{ и } x=d.$$

Для сравнения в последнем столбце таблицы 2 приведены значения касательных напряжений τ_{xz} на нейтральной оси $x = a$ при $\nu = 0,3$, вычисленные по формуле (9.2) работы [5].

Таблица 1

$\frac{a}{d}$	$\nu = 0,3$			$\nu = 0$		
	1,1	1,5	10	1,1	1,5	10
$10^6 \frac{X_0^+}{\rho d}$	6,7888	16,277	2,1278	2,7407	13,591	1,9318
X_0^-	6,7748	16,272	2,1276	2,7239	13,586	1,9316
X_1^+	2,0213	6,1478	0,49216	3,0323	5,8494	0,45303
X_1^-	2,0189	6,1276	0,49135	3,0298	5,8302	0,45231
X_2^+	1,6092	3,9269	0,24783	2,6801	3,7775	0,22747
X_2^-	1,5949	3,8934	0,24657	2,6644	3,7458	0,22634
X_3^+	1,5404	3,0361	0,16828	2,3991	2,9243	0,15412
X_3^-	1,5172	2,9938	0,16671	2,3740	2,8843	0,15271
Y_0^+	-6,2974	-2,2660	-0,12140	-6,9292	-1,1130	-0,11375
Y_0^-	-6,3055	-2,2775	-0,12159	-6,9414	-1,1240	-0,11391
Y_1^+	4,2577	2,8124	0,01919	2,4607	2,4951	0,01039
Y_1^-	4,2446	2,7896	0,01821	2,4429	2,4732	0,00949
Y_2^+	4,1645	2,6556	0,05618	3,0767	2,4434	0,04759
Y_2^-	4,1364	2,6194	0,05456	3,0391	2,4088	0,04611
Y_3^+	3,0872	2,4302	0,06482	2,4826	2,2402	0,05655
Y_3^-	3,0547	2,3837	0,06272	2,4390	2,1957	0,05464

Значения $\frac{d^2}{\rho} \tau_{xz}(x, y)$

Таблица 2

x, y	$\frac{a}{d}$	$\nu = 0,3$	$\nu = 0$	τ_{xz}
$a, 0$	1,1	0,06292	0,07743	0,36449
	1,5	0,04855	0,04433	0,25380
	10	0,006201	0,006013	0,02957
$a, \frac{d}{2}$	1,1	0,05978	0,07555	0,32481
	1,5	0,04846	0,04354	0,24165
	10	0,006088	0,006013	0,02931
a, d	1,1	0,11513	0,10607	0,39920
	1,5	0,05861	0,05998	0,25110
	10	0,005982	0,006013	0,02905

Сопоставляя первый и третий столбцы таблицы 2, замечаем, что, благодаря усиливающему покрытию, напряжение в приведенных характеристических точках уменьшается более, чем в три раза, при одной и той же изгибающей силе P . Например, в случае $\frac{a}{d} = 1,1$ максимальное касательное напряжение уменьшается примерно в 3,5 раза, в случае $\frac{a}{d} = 1,5$ — уменьшается в 4,3 раза, а когда $\frac{a}{d} = 10$ — уменьшается примерно в пять раз.

Из таблицы 2 видно, что касательные напряжения в рассматриваемых точках убывают с увеличением отношения $\frac{a}{d}$, при одной и той же изгибающей силе P , вместе с этим падает роль коэффициента Пуассона. Например, в случае $\frac{a}{d} = 1,1$ максимальные касательные напряжения при $\nu = 0,3$ и $\nu = 0$ отличаются друг от друга на 8%, когда $\frac{a}{d} = 1,5$, эта разница доходит до 2%, а когда $\frac{a}{d} = 10$, то отличие составляет десятые доли процента.

Сравнивая эти результаты с результатами, приведенными в [6], замечаем, что, как в двухсвязных областях без усиливающего покрытия и ослабленных симметричным отверстием, так и в стержне с усиливающим покрытием и симметричным отверстием, с увеличением отверстия (т. е. когда стержень становится тонкостенным) уменьшается роль коэффициента Пуассона. Полученные результаты все же говорят о том, что для профилей с отверстием коэффициент Пуассона, даже для его максимального значения ($\nu = 0,5$), играет значительную роль и практически им можно пренебречь.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 28 IX 1960

Պ. 2. Գալֆայան

ՈՒԺԵՂԱՑՆՈՂ ԲԱՐԱԿ ԾԱԾԿՈՒՅՅՈՎ ՍՆԱՄԵՋ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՁՈՂԻ ԾՈՒՄԱՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Ի. Մ.

Ուժեղացնող բարակ ծածկույթով ձողի ծոման խնդրի ճշգրիտ լուծումը համարվեց է բաղադրյալ ձողի ծոման խնդրի լուծմանը [1—4]: Լարունների $F(x, y)$ ֆունկցիան D_1 և D_2 տիրույթների ներքին կեանքում պետք է բավարարի համապատասխան աջ մասով Պուասոնի հավասարմանը, եզրագծի վրա՝ եզրային պայմանին և երկու տիրույթների բաժանման գծի վրա՝ կոնտակտի երկու պայմաններին: Այսպիսի դրվածքով լարունների F ֆունկցիան ճիշտ որոշելը կոնկրետ խնդիրների լուծելիս, մեծ մասամբ կապված է մաթեմատիկական դժվարությունների հետ: Այդ պատճառով նպատակահարմար է,

կնկրով ձողի հատվածքի չափումների նկատմամբ ուժեղացնող ծածկույթի հաստության փոքրությամբ, լարումների F ֆունկցիան որոշել խնդրի մտադիր զրկածքով: Այդ հարցը լուսարանված է [4] աշխատության մեջ, որտեղ ցույց է տրված, որ որոշակի մասափորություններ լարումների F ֆունկցիան կարելի է որոշել միայն հիմնական նյութին համապատասխանող D_1 տիրույթում (1.9) խտոր կգրային պայմանով: Մասափորությունն այն է, որ ծածկույթին համապատասխանող D_2 տիրույթում լարումների F ֆունկցիան ըստ ծածկույթի հաստության փոփոխվում է գծային օրենքով, որը մեխանիկորեն համարժեք է այն ընդունելությունը, որ ծածկույթում շոշափող լարումները ըստ ծածկույթի հաստության չեն փոփոխվում, այսինքն մնում են հաստատուն:

Ներկա հոդվածում դիտարկվում է սիմետրիկ ուղղանկյուն անցքով ուղղանկյուն լաֆնական հատվածք ունեցող պրիզմաձև ձողի լաֆնական ուժով ծռված խնդիրը: Ձողի արտաքին և ներքին մակերևույթները ծածկված են ուժեղացնող բարակ ծածկույթով:

Լարումների ֆունկցիան ներկայացված է [7, 8] աշխատություններում ստանալով որիստորմալ ֆունկցիաների սխեմով: Խնդրի լուծումը բերվում է գծային հավասարումների երկու անվերջ սխեմների լրիվ սեզուլար համախմբի լուծմամբ:

Ձողի լարումների վերջնական հաշվումը կատարված է քառակուսի կարգվածքի համար: Ձողի լաֆնական հատվածքի մի քանի ընտրոշ կետերում հաշվված են լարումները, կախված հատվածքի լաֆնական չափերից և Պուասոնի գործակցից: Ստացված թվային արդյունքները համեմատված են [5] և [6] աշխատություններում ստացված արդյունքների հետ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Муслишвили Н. Н. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М.—Л., 1954.
2. Чобанян К. С. Об изгибе составного стержня. Доклады АН АрмССР*, 23, № 3, 1956.
3. Чобанян К. С. Общая задача изгиба стержня, составленного из различных материалов. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук*, 11, № 5, 1958.
4. Арутюнян Н. Х., Чобанян К. С. Изгиб призматических стержней, составленных из различных материалов, с учетом ползучести. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук*, 10, № 5, 1957.
5. Абрамян Б. Л. Кручение и изгиб призматических стержней с полой прямоугольным сечением. ПММ*, 12, вып. 3, 1950.
6. Шерман Д. И. Изгиб поперечной силой эллиптического бруса, ослабленного продольно круговой цилиндрической полостью. Инженерный сборник*, 17, 1953.
7. Чобанян К. С., Галфаян П. О. Кручение полого прямоугольного стержня с тонким усиливающим покрытием. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук*, 12, № 6, 1959.
8. Галфаян П. О. Изгиб прямоугольного стержня с тонким усиливающим покрытием. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук*, 13, № 2, 1960.
9. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. ОГИЗ—Гостехиздат, М.—Л., 1947.
10. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, М.—Л., 1934.
11. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, М.—Л., 1948.
12. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. ОНТИ, М., 1941.
13. Левитан Б. М. Разложение по собственным функциям. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
- 5 Известия АН, серия физ.-мат. наук, № 1