

Г. Ц. Тумаркин

Разложение аналитических функций в ряд по рациональным дробям с заданным множеством полюсов

В работе [1] М. М. Джрбашян построил систему рациональных функций $\{M_n(z)\}$, являющуюся естественным обобщением хорошо известных полиномов Фабера. Было доказано, что при определенных ограничениях, налагаемых на односвязную область G , ограниченную жордановой спрямляемой кривой γ и на множество полюсов $\{a_j\}$, расположенных во внешности γ , любая аналитическая в G и непрерывная в $\bar{G}$ функция $f(z)$ разлагается в ряд вида

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n M_n(z),$$

равномерно сходящийся внутри области G . При этом ограничения, накладываемые на расположение полюсов, носили очень общий характер: последовательность комплексных чисел $\{a_j\}$, в которых располагаются полюса системы $\{M_n(z)\}$, должна удовлетворять лишь требованию

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{|\beta_j|}\right) = +\infty, \quad (1)$$

где

$$\beta_j = \psi(a_j).$$

Здесь $w = \psi(z)$ — конформно отображает область G — компоненту дополнения к γ , содержащую ∞ , на $|w| > 1$ ($\psi(\infty) = \infty$). В то же время условия, наложенные на область G , были довольно обременительными. Требовалось, чтобы граница γ области G была спрямляемой жордановой кривой такой, что функция $\varphi'(w)$ [производная функции $\varphi(w)$, осуществляющей конформное отображение области $|w| > 1$ на $(\bar{G}, (\varphi(\infty) = \infty))$] принадлежала классу H_2 , т. е.

$$\lim_{r \rightarrow 1+0} \int_0^{2\pi} |\varphi'(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty.$$

Заметим, что для произвольной жордановой спрямляемой кривой γ можно утверждать лишь, что $\varphi'(w) \in H_2$.

Целью настоящей работы является: во-первых, показать, что несколько модифицируя определение системы $\{M_n(z)\}$, предложенное М. М. Джрбашяном, можно получить систему $\{M_n^*(z)\}$ рациональных дробей с полюсами в тех же точках $\{z_j\}$, образующую базис в значительно более широком, чем это было у М. М. Джрбашяна, пространстве аналитических функций уже в произвольной области, ограниченной жордановой спрямляемой кривой γ ; во-вторых, установить необходимость выполнения условия (1) для возможности разложения в ряд любой функции из рассматриваемого класса.

Последнее непосредственно следует из приводимых в работе необходимых и достаточных условий, которым должна удовлетворять аналитическая в области G функция $f(z)$, разлагающаяся в ряд рациональных дробей, когда для заданных полюсов не выполняется условие (1). Получающиеся результаты распространяются на произвольные конечно-связные области со спрямляемой границей. Перенесение цитированных результатов М. М. Джрбашяна на многосвязные области G было сделано Г. С. Кочаряном [2] в предположениях об области G и функции $f(z)$, аналогичных тем, которые фигурировали в [1]. Наши результаты носят в этом отношении, как и в односвязном случае, гораздо более общий характер. В заключение делаются некоторые замечания, касающиеся поведения на границе области G рядов рациональных дробей, получающихся в результате разложения функции $f(z)$.

Остановимся теперь более подробно на полученных в настоящей работе результатах.

В теореме 1 показывается, что для всякой аналитической в области функции, представимой интегралом типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (2)$$

где $g(\zeta) \in L_2(\gamma)$, т. е. $\int_{\gamma} |g(\zeta)|^2 ds < \infty$, составленный для нее ряд

$\sum C_n M_n^*(z)$ по рациональным дробям с заранее заданными полюсами $\{z_j\}$, удовлетворяющими условию (1), будет равномерно сходиться внутри области G . Отсюда, в частности, следует возможность разложения в ряд по введенной системе рациональных дробей любой функции, входящей в класс $E_2(G)$.

Из приводимой далее теоремы 2 следует необходимость условия (1) для возможности разложения в рассматриваемый ряд любой функции класса $E_2(G)^*$.

* $f(z) \in E_p(G)$, если найдется последовательность замкнутых спрямляемых кривых $\gamma_n \subset G$, $\gamma_n \rightarrow \gamma$ при $n \rightarrow \infty$ такая, что

$$\int_{\gamma_n} |f(z)|^p ds < C < \infty, \quad n = 1, 2, \dots$$

В этой теореме рассматривается случай, когда точки, в которых находятся полюсы системы $\{M_n^*(z)\}$, не удовлетворяют условию (1).

В этом предположении устанавливается необходимое и достаточное условие для возможности разложения в рассматриваемый ряд функции $f(z)$, представимой интегралом типа Коши (2). Это условие заключается в том, что среди всевозможных представлений данной функции $f(z)$ в виде (2) существует такое, для которого функция $g(\zeta)$, фигурирующая в представлении (2), должна совпадать почти всюду на γ с угловыми граничными значениями некоторой мероморфной в G^- функции $f^*(z)$, обладающей свойством $f^*(z)B(z) \in E_2(G^-)$.

Здесь $B(z) = \exp \left\{ - \sum_{j=1}^{\infty} G(z, \alpha_j) \right\}$, где $G(z, \alpha_j)$ — комплексная функция

Грина области G^- .

Так как любое представление данной функции $f(z)$ интегралом типа Коши (2) получается прибавлением к функции $g(\zeta)$ граничных значений $g^*(\zeta)$ некоторой, аналитической в области G^- , функции класса $E_1(G^-)$, то отсюда немедленно следует следующее утверждение. Если условие (1) не выполняется, то необходимым условием для возможности разложения в ряд будет совпадение почти всюду на γ функции $g(\zeta)$ любого представления $f(z)$ в виде (2) с граничными значениями мероморфной функции $g^*(z)$ такой, что $g^*(z)B(z) \in E_1(G^-)$. Заметим, что для областей класса В. И. Смирнова сформулированное выше необходимое и достаточное условие будет иметь место уже для любого представления $f(z)$ в виде (2). Легко видеть, что только что указанными свойствами обладает лишь довольно узкий подкласс функций. Например, всякая функция вида $\frac{1}{z-a}$, где

$a \in G^-$ (причем $a \neq \alpha_j$, $j=1, 2, \dots$), представима интегралом Коши с $g(\zeta) = \frac{1}{\zeta-a}$. Но очевидно, что $\frac{1}{\zeta-a}$ в результате умножения на $B(z)$

не будет делаться граничным значением аналитической в области G^- функции и поэтому заведомо не удовлетворяет указанному только что требованию. В теореме 3 установленные для односвязной области результаты распространяются на произвольные конечносвязные области, ограниченные спрямляемыми кривыми.

После того, как выяснена возможность разложения аналитических в области G функций класса E_2 в ряды по системе рациональных дробей с заранее заданными полюсами, удовлетворяющими условию (1), естественно поставить вопрос об исследовании граничных свойств получающихся рядов, точнее — вопрос: не будет ли иметь место сходимость в среднем частных сумм составленного ряда рациональных дробей к функции $f(\zeta)$ — граничным значениям функции $f(z)$? Однако, опираясь на ранее установленные нами результаты, мы показываем, что для области G , ограниченной произвольной спрямляе-

мой кривой, не являющейся областью, удовлетворяющей условию В. И. Смирнова, среди функций класса $E_2(G)$ имеются такие, для которых применение любого линейного перманентного метода суммирования к ряду рациональных дробей, соответствующему функции $f(z)$, приводит к ряду, частные суммы которого $S_n(z)$ не могут быть на γ даже равномерно ограничены ни в какой интегральной метрике

$$\int_{\gamma} |S_n(\zeta)|^p \rho(\zeta) ds, \text{ где } p > 0, \text{ а } \rho(\zeta) > 0 \text{ подчинено лишь требованию}$$

$$\int_{\gamma} \ln \rho(\zeta) |\psi'(\zeta)| d\zeta > -\infty \quad [w = \psi(z) \text{ — функция, обратная к } z = \varphi(w)].$$

В заключение делаются некоторые замечания по поводу коэффициентов и единственности разложений функций в рассматриваемые ряды.

§ 1. Разложение аналитических в односвязной области функций, представимых интегралом типа Коши, в ряд по рациональным дробям

Определим систему рациональных дробей $\{M_n^*(z)\}$ полюсами которых являются заданные числа $\{\alpha_j\}$. Для этого возьмем систему $\{\Phi_n(w)\}$ рациональных дробей, рассматривавшуюся Уолшем [3], с полюсами в точках $\{\beta_j\}$, $[\varphi(\beta_j) = \alpha_j]$

$$\Phi_n(w) = \frac{(1 - |\beta_n^*|^2)^{1/2}}{1 - \beta_n^* w} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{w - \beta_j^*}{1 - \beta_j^* w}, \quad \beta_j^* = \frac{1}{\bar{\beta}_j}. \quad (1.1)$$

Система $\{\Phi_n(e^{i\theta})\}$ будет ортогональной на $|w|=1$ (см. [3] и [4]). Рассмотрим функцию $\Phi_n[\psi(z)] \sqrt{\psi'(z)}$. Так как $\sqrt{\psi'(z)}$ — аналитическая в области G^- функция, причем $\psi'(z) \neq 0$, то функция $\Phi_n[\psi(z)] \sqrt{\psi'(z)}$ имеет полюсы только в полюсах функции $\Phi_n[\psi(z)]$, т. е. в точках $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Поэтому, сумма главных частей разложений функции $\Phi_n[\psi(z)] \sqrt{\psi'(z)}$ в окрестностях ее особых точек является рациональной функцией с полюсами в точках $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Получающиеся таким образом рациональные дроби образуют систему $\{M_n^*(z)\}$, в ряды по которой, как сейчас будет показано, могут быть разложены аналитические в области G функции $f(z)$, удовлетворяющие довольно общим условиям.

Прежде чем переходить к точной формулировке теоремы 1, заметим, что все отличие системы $\{M_n^*(z)\}$, рассматриваемой нами, от системы $\{M_n(z)\}$ М. М. Джрбашяна сводится к появлению дополнительного множителя $\sqrt{\psi'(z)}$ в определении функций $\Phi_n[\psi(z)] \times \sqrt{\psi'(z)}$, которого не было у функций, главные части которых приводили к системе $\{M_n(z)\}$ [см. [1], формула (3)]. Подобный прием умножения порождающей функции применялся в теории полиномов Фабера.

Теорема 1. Пусть G — произвольная область, ограниченная жордановой спрямляемой кривой γ и $\{z_j\}$ — последовательность комплексных чисел $z_j \in G$, удовлетворяющих условию (1). Пусть, далее, $\{M_n^*(z)\}$ $n=1, 2, \dots$ есть система рациональных дробей, которая получается, если взять главные части функций $\Phi_n[\psi(z)]/\sqrt{\psi'(z)}$. Здесь $\{\Phi_n(w)\}$ — ортогональная на $|w|=1$ система рациональных дробей с полюсами в точках $\{\beta_j\}$ $\beta_j = \psi(z_j)$, определенная формулой (1.1) $\{w = \psi(z)$ дает конформное отображение G на $|w| > 1$, $\psi(\infty) = \infty\}$. Тогда для произвольной аналитической внутри области G функции $f(z)$, представимой интегралом типа Коши-Лебега (2) с суммируемой в квадрате на γ функцией плотности $g(\zeta)$, имеет место разложение

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n M_n^*(z),$$

где

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(\zeta) \Phi_n[\psi(\zeta)] / \sqrt{\psi'(\zeta)} d\zeta, \quad (1.2)$$

а

$$\Phi_n^*(w) = \frac{(|\beta_n|^2 - 1)^{1/2} \prod_{j=1}^{n-1} (w - \beta_j)}{1 - \beta_n w}.$$

При этом, получающийся ряд будет абсолютно и равномерно сходиться внутри данной области G .

Доказательство. Возьмем какую-либо функцию $f(z)$, удовлетворяющую условию (2). Тогда будет существовать $\int_{\gamma} |g(\zeta)|^2 ds < \infty$.

Поэтому $\int_0^{2\pi} |g[\varphi(e^{i\theta})]|^2 |\varphi'(e^{i\theta})| d\theta < \infty$. Функцию $g[\varphi(e^{i\theta})] / \sqrt{\varphi'(e^{i\theta})}$,

суммируемую с квадратом на $|w|=1$, можно, как известно, представить в виде суммы граничных значений функций $F_i(w)$ и $F_e(w)$ аналитических и входящих в класс H_2 соответственно в $|w| < 1$ и $|w| > 1$ *

$$g[\varphi(e^{i\theta})] / \sqrt{\varphi'(e^{i\theta})} = F_i(e^{i\theta}) + F_e(e^{i\theta}). \quad (1.3)$$

Согласно теореме Уолша (см. [3]), функцию $F_i(e^{i\theta})$, являющуюся граничными значениями функции $F_i(w)$, входящей в класс H_2 в

* Если $F(e^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{ik\theta} \in L_2(0, 2\pi)$, то $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |C_k|^2 < \infty$. Полагая тогда

$$F_i(w) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k e^{ik\theta}, \quad F_e(w) = \sum_{k=-\infty}^{-1} C_k e^{ik\theta},$$

будем иметь $F_i(w) \in H_2$, так как для всех r ,

$$0 < r < 1, \quad \int_0^{2\pi} |F_i(re^{i\theta})|^2 d\theta < \sum_{k=0}^{\infty} |C_k|^2 r^{2k} < \infty. \quad \text{Аналогично и для } F_e(w).$$

$|w| < 1$, можно будет разложить в ряд по полной, в силу условия (1), ортогональной системе рациональных дробей с полюсами в точках $|\xi_j|$

$$F_i(e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \Phi_n(e^{i\theta}). \quad (1.4)$$

Здесь

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_i(e^{i\theta}) \overline{\Phi_n(e^{i\theta})} d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} F_i(\xi) \Phi_n^*(\xi) d\xi, \quad (1.5)$$

где $\Phi_n^*(w)$ определяется формулой (1.2).

Ряд (1.4) будет сходиться в метрике L_2 к $F_i(e^{i\theta})$.

Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} \left| F_i[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)} - \sum_{k=1}^n C_k \Phi_k[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)} \right|^2 ds = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| F_i(e^{i\theta}) - \sum_{k=1}^n C_k \Phi_k(e^{i\theta}) \right|^2 d\theta = 0. \end{aligned}$$

Откуда простые оценки покажут, что имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sum_{k=1}^n C_k \Phi_k[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F_i[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta \quad (1.6)$$

равномерно во всякой замкнутой подобласти $\bar{G}_1 \subset G$.

Примем теперь во внимание, что функция $F_e[\psi(z)] \sqrt{\psi'(z)}$ будет входить в класс E_2 в области G^- (т. к. $F_e(w) \in H_2$ в $\{w | |w| > 1\}$; это немедленно следует из определения класса E_2 (см., например, [5])).

Но функция $F_e[\psi(z)] \sqrt{\psi'(z)} \in E_2 \subset E_1$, как и всякая функция, принадлежащая классу E_1 во внешности γ и обращающаяся в 0 при $z = \infty^*$, будет представляться во внешности γ интегралом Коши. Поэтому, если брать z внутри γ , то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F_e[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta = 0, \quad z \in G. \quad (1.7)$$

Складывая (1.6) и (1.7) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n C_k \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi_k[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta =$$

* Так как $F_e(\infty) = 0$, что сразу следует из определения $F_e(w)$ (см. сноску на стр. 13), а $\psi'(\infty) \neq \infty$.

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F_i[\psi(\zeta)] + F_e[\psi(\zeta)]}{\zeta - z} \sqrt{\psi'(\zeta)} d\zeta.$$

Заметим, что интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi_k[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta$ определяет внут-

ри γ рациональную функцию, равную главной части мероморфной в области G^- функции $\Phi_k[\psi(z)] \sqrt{\psi'(z)}$ с полюсами в точках α_j , $j = 1, \dots, k$.

Действительно, если использовать введенное ранее обозначение $M_k^*(z)$ для только что описанной рациональной дроби, то разность $\Phi_k[\psi(z)] \sqrt{\psi'(z)} - M_k^*(z)$ не будет иметь полюсов во внешности γ , а при $z = \infty$ имеет нуль по крайней мере 1-го порядка. Нетрудно видеть, что эта функция будет входить в класс $E_2(G^-)$ *. Но тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi_k[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)} - M_k^*(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0, \quad z \in G.$$

Откуда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi_k[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{M_k^*(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = M_k^*(z). \quad (1.8)$$

Учитывая далее равенство

$$[F_i[\psi(\zeta)] + F_e[\psi(\zeta)]] \sqrt{\psi'(\zeta)} = g(\zeta), \quad (1.9)$$

вытекающее из (1.3), а также возможность, согласно условию, представить внутри γ функцию $f(z)$ интегралом типа Коши (2), получим из (1.6), (1.7), (1.9) и (1.8)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n C_k M_k^*(z) = f(z), \quad z \in G.$$

Причем ряд стоящий слева будет сходиться равномерно внутри G .

Для завершения доказательства теоремы осталось лишь установить справедливость формулы (1.2) для коэффициентов ряда (1.2). Из (1.5) имеем

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F_i[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)} \Phi_n^*[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)} d\zeta. \quad (1.10)$$

Если теперь сложить (1.10) с равенством

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F_e[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)} \Phi_n^*[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)} d\zeta, \quad (1.11)$$

* Этим свойством обладает, как уже указывалось, функция $\sqrt{\psi'(z)}$, а функция $\Phi_k[\psi(z)]$ будет заведомо ограничена вблизи γ . Поэтому произведение $\Phi_k[\psi(z)] \cdot \sqrt{\psi'(z)}$ будет входить в класс $E_2(G^-)$.

то, принимая во внимание (1.9), получим формулу (1.2) для C_n . Равенство (1.11) будет справедливо, ибо функции $F_e[\psi(z)]\sqrt{\psi'(z)}$ и $\sqrt{\psi'(z)}$, как уже отмечалось, входят в класс $E_2(G^-)$, а функция $\Phi_n^*[\psi(z)]$ будет аналитична и заведомо ограничена в области G^- , что видно из определения (1.2) функции $\Phi_n^*(w)$. Это позволяет сразу установить, что произведение $F_e[\psi(z)]\sqrt{\psi'(z)}\Phi_n^*[\psi(z)]\sqrt{\psi'(z)}$ входит в класс $E_1(G^-)$. Поэтому эта функция представима в области G^- интегралом Коши по своим граничным значениям. Убедимся теперь, что рассматриваемая нами функция имеет в ∞ нуль по крайней мере второго порядка. Действительно, ранее уже указывалось, что функция $F_e[\psi(z)]$ имеет при $z = \infty$ нуль по крайней мере 1-го порядка. Точно такое же положение будет и для функции $\Phi_n^*[\psi(z)]$, что сразу следует из (1.2).

Приравняв нулю коэффициент при $\frac{1}{z}$ в тейлоровском разложении в окрестности $z = \infty$, получим (1.11), что и требовалось доказать.

Так как всякая функция $f(z) \in E_2(G)$ представляется интегралом Коши через свои граничные значения

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

причем $\int_{\gamma} |f(\zeta)|^2 ds < \infty$, то из теоремы 1 немедленно вытекает:

Следствие. Для всякой аналитической в области G функции $f(z)$, входящей в класс E_2 , составленный для нее ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n M_n^(z)$, где*

$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) \Phi_n^*[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)} d\zeta$, *будет равномерно сходиться внутри области G .*

Мы сейчас покажем, что для произвольных областей со спрямляемыми границами, результат, установленный в теореме 1, является более общим по сравнению с результатом, содержащимся в следствии. В самом деле, если область G не удовлетворяет условию В. И. Смирнова, то из того, что аналитическая в G функция $f(z)$ представима интегралом типа Коши-Лебега (2) с суммируемой в квадрате на γ функцией $f(\zeta)$ [даже более того с ограниченной на γ функцией $f(\zeta)$] не следует вхождение функции $f(z)$ в $E_2(G)$. Отсюда видно, что результат, установленный в теореме 1, не может быть непосредственно выведен из результата, сформулированного в следствии. Действительно, рассмотрим функцию

$$\tilde{f}(z) = \psi'(z) \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + \psi(z)}{e^{i\theta} - \psi(z)} \ln |\varphi'(e^{i\theta})| d\theta. \quad (1.12)$$

Нами показано (см. [5], гл. III), что функция $\tilde{f}(z)$, входящая в класс $E_1(G)$ и имеющая угловые граничные значения по модулю равные 1 почти всюду на γ , не может входить ни в один из классов $E_p(G)$, $p > 1$. Из сказанного про функцию (1.12) следует, что она может быть взята в качестве примера функции $f(z)$ с описанными свойствами [за $g(\zeta)$ можно в данном случае принять $\tilde{f}(\zeta)$ — угловые граничные значения $\tilde{f}(z)$].

§ 2. Необходимые и достаточные условия для возможности разложения аналитической функции в ряд рациональных дробей в случае, когда заданные полюсы удовлетворяют условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{|\varphi(z_j)|}\right) < \infty.$$

Теорема 2. Пусть $f(z)$ аналитична в области G и представляема интегралом типа Коши (2).

Пусть, далее, полюсы системы рациональных дробей $\{M_n^*(z)\}$ таковы, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{|\varphi(z_j)|}\right) < \infty. \quad (2.1)$$

Для того чтобы ряд (1.2), составленный для $f(z)$ по системе $\{M_n^*(z)\}$, равномерно сходил к ней внутри G , необходимо и достаточно, чтобы среди различных представлений функции $f(z)$ интегралом типа Коши (2) нашлось такое, что функция $g(\zeta)$, фигурирующая в представлении (2), совпадала почти всюду на γ с угловыми граничными значениями некоторой мероморфной в области G^- функции $f^*(z)$ ограниченного вида, обладающей свойством $f^*(z)B(z) \in E_0(G^-)$.

Здесь $B(z)$ — пересаживаемое при помощи конформного отображения $w = \psi(z)$ в область G^- , сходящееся в силу (2.1) произведение Бляшке $b(z)$ с нулями в точках $\varphi(z_j)$, или, что то же самое, $B(z) = \exp \left\{ - \sum_{j=1}^{\infty} G(z, z_j) \right\}$, где $G(z, z_j)$ — комплексная функция Грина области G^- с полюсом в точке z_j .

Доказательство. Докажем вначале достаточность. Сохраняем обозначения, использованные при доказательстве теоремы 1.

В силу условия теоремы, функцию $f(z)$ можно представить интегралом типа Коши (2) так, что $g[\varphi(e^{i\theta})]/\varphi'(e^{i\theta})$ будет совпадать почти всюду на $|\varphi| = 1$ с угловыми граничными значениями меро-

морфной в $|\omega| > 1$ функции $f^e[\varphi(\omega)]\sqrt{\varphi'(\omega)}$, которая после умножения на $b(\omega)$ (произведение Бляшке с нулями в точках $\varphi(\alpha_j)$, $j=1, 2, \dots$) становится функцией класса H_2 . Но тогда подобным же свойством будет обладать и функция $F_l(e^{i\theta})$, ибо по определению $F_e(\omega) \in H_2$ в $|\omega| > 1$, а $F_l(e^{i\theta}) = g[\varphi(e^{i\theta})]\sqrt{\varphi'(e^{i\theta})} - F_e(e^{i\theta})$. Мероморфную в $|\omega| > 1$ функцию, угловыми граничными значениями которой является функция $F_l(e^{i\theta})$, будем в дальнейшем также обозначать $F_l(\omega)$. Так как по условию $f^e(\infty) = 0$, а $F_e(\infty) = 0$, то $F_l(\infty) = 0$.

Покажем теперь, что ряд Фурье функции $F_l(e^{i\theta})$ по ортогональной системе $\{\varphi_n(e^{i\theta})\}$ (которая в рассматриваемом случае не является полной в пространстве граничных значений аналитических функций класса H_2) будет сходиться в метрике L_2 к $F_l(e^{i\theta})$. Для этого, очевидно, достаточно установить, что $F_l(e^{i\theta})$ принадлежит замыканию линейной оболочки системы $\left\{\frac{1}{e^{i\theta} - \beta_j}\right\}$, где $\beta_j = \varphi(\alpha_j)$.

Возьмем в пространстве L_2 какой-либо линейный функционал $y(F)$, обращающийся в нуль на функциях рассматриваемой системы. Тогда мы можем написать

$$y\left(\frac{1}{e^{i\theta} - \beta_j}\right) = \int_0^{2\pi} \frac{q(\theta) d\theta}{e^{i\theta} - \beta_j} = 0, \quad \text{где } q(\theta) \in L_2. \quad (2.2)$$

Мы сейчас покажем, что отсюда следует равенство этого функционала нулю на функции $F_l(e^{i\theta})$. Действительно, рассмотрим интеграл типа Коши-Лебега

$$Q(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} |q(\theta) e^{-i\theta}|}{e^{i\theta} - \omega} d\theta. \quad (2.3)$$

Определенные интегралом типа Коши-Лебега (2.3) аналитические внутри и вне $|\omega| = 1$ функции $Q^i(\omega)$ и $Q^e(\omega)$ принадлежат, соответственно в областях $|\omega| < 1$ и $|\omega| > 1$, классам H_2 . Причем $Q^e(\infty) = 0$, и почти для всех θ , $0 < \theta < 2\pi$, имеем

$$q(\theta) e^{-i\theta} = Q^i(e^{i\theta}) - Q^e(e^{i\theta})^*. \quad (2.4)$$

Рассмотрим теперь интеграл $\int_0^{2\pi} F_l(e^{i\theta}) q(\theta) d\theta$, выражающий интересующее нас значение взятого функционала. Учитывая (2.4), получаем

$$\int_0^{2\pi} F_l(e^{i\theta}) q(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} F_l(e^{i\theta}) Q^i(e^{i\theta}) d\theta - \int_0^{2\pi} e^{i\theta} F_l(e^{i\theta}) Q^e(e^{i\theta}) d\theta. \quad (2.5)$$

* См. примечание на стр. 13.

Функция $F_l(w) Q^l(w)$ как произведение двух аналитических внутри круга $|w| < 1$ функций, входящих в класс H_2 , будет функцией класса H_1 . Поэтому

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta} F_l(e^{i\theta}) Q^l(e^{i\theta}) d\theta = 0. \quad (2.6)$$

Заметим теперь, что второй интеграл в правой части равенства (2.5) также равен нулю.

Действительно, как уже отмечалось в самом начале, произведение $F_l(e^{i\theta}) b(e^{i\theta})$ является граничным значением аналитической в $|w| > 1$ функции класса H_2 . Но из равенства (2.2) и (2.3) следует, что $Q^j(\beta_j) = 0$ $j=1, 2, \dots$. Поэтому частное $\frac{Q^j(w)}{b(w)}$ будет аналитической в $|w| > 1$ функцией, входящей, так же как и $Q^j(w)$, в класс H_2 в $|w| > 1$ (см., напр., [5], гл II). Тогда функция

$$F_l(e^{i\theta}) Q^j(e^{i\theta}) = F_l(e^{i\theta}) b(e^{i\theta}) \frac{Q^j(e^{i\theta})}{b(e^{i\theta})},$$

как произведение граничных значений функций класса H_2 , является граничными значениями функции класса H_1 .

Ранее отмечалось, что $Q^j(\infty) = 0$ и $F_l(\infty) = 0$. Поэтому функция $F_l(e^{i\theta}) Q^j(e^{i\theta})$ будет граничными значениями аналитической в $|w| > 1$ функции, представимой интегралом Коши и имеющей в ∞ нуль по крайней мере второго порядка. Приравнявая нулю коэффициент при $\frac{1}{w^2}$ в тейлоровском разложении этой функции в окрестности бесконечно удаленной точки, получаем

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta} F_l(e^{i\theta}) Q^j(e^{i\theta}) d\theta = 0. \quad (2.7)$$

Из равенств (2.6) и (2.7) следует, что $\int_0^{2\pi} F_l(e^{i\theta}) q(\theta) d\theta = 0$. Это доказывает принадлежность функции $F_l(e^{i\theta})$ замыканию линейной оболочки системы $\left\{ \frac{1}{e^{i\theta} - \beta_j} \right\}$, $j=1, 2, \dots$ и возможность, в силу этого, представить $F_l(e^{i\theta})$ в виде суммы ряда Фурье по ортогональной системе $\{\Phi_n(e^{i\theta})\}$. Далее, для завершения доказательства, надо повторить соответствующие рассуждения из теоремы 1.

Переходим к доказательству необходимости. Пусть известно, что для функции $f(z)$ ряд (1.2) сходится к $f(z)$ равномерно внутри

6. Заметим прежде всего, что для любой функции $f(z)$, представимой интегралом Коши (2), ряд из квадратов абсолютных величин коэффициентов должен сходиться

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 < \infty, \quad C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(\zeta) \Phi_n^*[\psi(\zeta)] \overline{\psi'(\zeta)} d\zeta.$$

В самом деле, функция $g[\varphi(e^{i\theta})] \overline{\varphi'(e^{i\theta})} \in L_2(0, 2\pi)$, так как $g(\zeta) \in L_2(\gamma)$, причем, ввиду (1.2), числа C_n можно рассматривать как коэффициенты Фурье разложения функции $g[\varphi(e^{i\theta})] \overline{\varphi'(e^{i\theta})}$ в ряд по системе $|\Phi_n(e^{i\theta})|$, ибо из (1.2) и (1.11) следует

$$\begin{aligned} C_n &= \int_0^{2\pi} g[\varphi(e^{i\theta})] \overline{\varphi'(e^{i\theta})} \Phi_n^*(e^{i\theta}) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} F_1(e^{i\theta}) \Phi_n^*(e^{i\theta}) d\theta = \int_0^{2\pi} F_1(e^{i\theta}) \overline{\Phi_n(e^{i\theta})} d\theta. \end{aligned}$$

Составим теперь ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \Phi_n(e^{i\theta})$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2$ сходится,

а $\int_0^{2\pi} |\Phi_n(e^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi$, то частные суммы $S_n(e^{i\theta})$ рассматриваемого ряда будут сходиться в среднем на $|w|=1$. Обозначим сумму этого ряда через $S(e^{i\theta})$. Из сказанного имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |S(e^{i\theta}) - S_n(e^{i\theta})|^2 d\theta = 0. \quad (2.8)$$

Функции $S_n(z)$ представляют из себя рациональные дроби с полюсами в точках $\beta_1, \dots, \beta_n$ $[\beta_j = \varphi(\alpha_j)]$. Поэтому $S_n(e^{i\theta})$ можно, конечно, считать граничными значениями класса H_2 . Тогда равенство (2.8) позволяет сразу заключить, что $S(e^{i\theta})$ также является граничными значениями некоторой аналитической в круге $|w| < 1$ функции $S^*(z)$, входящей в класс H_2 , к которой будет сходиться равномерно внутри $|w| < 1$ ряд $\sum C_n \Phi_n(z)$. Это заключение можно сразу сделать, опираясь на доказанное нами дополнение к теореме Хинчина-Островского о связи предела граничных значений с граничными значениями предельной функции (см. [5]). То же самое можно легко доказать непосредственно.

Рассмотрим для этого неравенство

$$\int_0^{2\pi} |S_{n+p}(e^{i\theta}) - S_n(e^{i\theta})|^2 d\theta < \varepsilon, \quad (2.9)$$

которое имеет место при $n \geq N(z)$ и любом $p \geq 1$. Учитывая, что для всякой аналитической в $|w| < 1$ функции $F(w)$ класса H_2

$$\int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \int_0^{2\pi} |F(e^{i\theta})|^2 d\theta, \quad 0 < r < 1$$

опираясь на (2.9), получаем неравенство

$$\int_0^{2\pi} |S_{n+p}(re^{i\theta}) - S_n(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \varepsilon, \quad (2.10)$$

$$0 < r < 1, \quad n \geq N(z), \quad p \geq 1.$$

Элементарные оценки позволяют установить, используя (2.9) или (2.10), равномерную сходимость внутри $|w| < 1$ последовательности $|S_n(z)|$ к некоторой функции $S^*(z)$. Переходя к пределу в неравенстве (2.10) вначале при фиксированном r , $0 < r < 1$ и $p \rightarrow \infty$, имеем

$$\int_0^{2\pi} |S^*(re^{i\theta}) - S_n(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \varepsilon. \quad (2.11)$$

Отсюда уже видно, что $S^*(z) \in H_2$ в $|w| < 1$. Теперь достаточно в (2.11) r устремить к единице, чтобы получить неравенство

$$\int_0^{2\pi} |S^*(e^{i\theta}) - S_n(e^{i\theta})|^2 d\theta \leq \varepsilon, \quad n \geq N(z). \quad (2.12)$$

Сравнивая (2.8) и (2.12) устанавливаем почти всюду на $|w| = 1$ следующее равенство, доказывающее наше утверждение

$$S^*(e^{i\theta}) = S(e^{i\theta}).$$

Повторяя далее рассуждение, применявшееся при доказательстве теоремы 1, мы установим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n/M_n^*(z)$ будет равномерно сходиться внутри G к функции, которая может быть представлена интегралом типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{S[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta.$$

Мы докажем теперь, что функция $S[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)}$ является угловыми граничными значениями мероморфной в области G^- функции, обладающей следующим свойством: произведение этой функции на функцию $B(z)$, описанную в условии теоремы, является аналитической в области G^- функцией, входящей в класс $E_2(G^-)$. Отсюда будет следовать утверждение теоремы.

Нужное нам заключение о свойствах функции $S[\psi(\zeta)] \sqrt{\psi'(\zeta)}$

вытекает из того, что $S(e^{i\theta})$ является не только, как отмечалось ранее, угловыми граничными значениями аналитической в $|w| < 1$ функции, но совпадает кроме того почти всюду на $|w| = 1$ также и с угловыми граничными значениями мероморфной в $|w| > 1$ функции, которая после умножения на $b(w)$ становится в $|w| > 1$ аналитической функцией класса H_2 . Для доказательства этого факта достаточно заметить, что из (2.8) вытекает

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |S(e^{i\theta}) b(e^{i\theta}) - S_n(e^{i\theta}) b(e^{i\theta})|^2 d\theta = 0.$$

причем $S_n(e^{i\theta}) b(e^{i\theta})$ можно рассматривать как граничные значения функций $S_n(w) b(w)$ аналитических и ограниченных в $|w| > 1$, $n = 1, 2, \dots$

Применяя к последовательности $\{S_n(w) b(w)\}$ рассуждения, аналогичные использованным для последовательности $\{S_n(w)\}$, получаем, что $S(e^{i\theta}) b(e^{i\theta})$ есть граничные значения аналитической в $|w| > 1$ функции класса H_2 , обращающейся в 0 при $w = \infty$ [подобным свойством обладали все функции $S_n(w) b(w)$]. Отсюда немедленно выведем нужное нам заключение о свойствах функции $S[\psi(\zeta)] V \overline{\psi'(\zeta)}$.

Отмеченное в условии теоремы специальное представление функции $f(z)$ интегралом типа Коши сразу получается, если взять функцию $g^*(\zeta) = S[\psi(\zeta)] V \overline{\psi'(\zeta)}$. Тем самым наша теорема полностью доказана.

Сделаем некоторые замечания в связи с доказанной теоремой.

1. В случае, когда G — произвольная область, в формулировке теоремы 2 нельзя утверждать про любое (а не только про специальное) представление интегралом типа Коши (2) функции $f(z)$, раскладывающейся в ряд рациональных дробей (1.2), что $g(\zeta)$ является угловыми граничными значениями мероморфной в G^- функции $\tilde{g}(z)$, для которой $g(z) B(z) \in E_2(G^-)$. Действительно, пусть область G^- не удовлетворяет условию В. И. Смирнова. Тогда, имея одно представление (2) функции $f(z)$ с описанным свойством, мы добавим к $g(\zeta)$ какую-либо функцию $\tilde{g}(\zeta) \in L_2(\gamma)$, которая является угловыми граничными значениями функции $\tilde{g}(z) \in E_1(G^-)$, такой, что $\tilde{g}(z) \in E_2(G^-)$. Пример функции с подобными свойствами был приведен выше*. Тогда интеграл типа Коши с функцией плотности $g(\zeta) + \tilde{g}(\zeta)$ будет внутри области G изображать ту же самую функцию $f(z)$. Но, очевидно, функция $g(\zeta) + \tilde{g}(\zeta)$ уже не будет обладать требуемым свойством.

Приведем теперь необходимое условие, непосредственно вытекающее из теоремы 2 для возможности разложения функции $f(z)$ в

* Условие $\tilde{g}(\infty) = 0$ легко обеспечить, умножая на $\frac{1}{z}$.

рассматриваемый ряд рациональных дробей, относящееся уже к произвольному представлению функции $f(z)$ интегралом типа Коши.

Теорема 3. Для возможности разложения функции $f(z)$, представимой интегралом типа Коши (2), в ряд рациональных дробей при рассматриваемых в теореме 2 условиях, необходимо чтобы функция $g(\zeta)$ совпадала почти всюду на γ с угловыми граничными значениями мероморфной в G^- функции $g(z)$ такой, что $g(z)B(z) \in E_1(G^-)$.

Доказательство. Для доказательства заметим, что согласно теореме 2 найдется функция $g^*(\zeta)$ такая, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g^*(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \text{где} \quad \int_{\gamma} |g^*(\zeta)|^2 ds < \infty,$$

причем $g^*(\zeta)B(\zeta)$ является граничными значениями функции, входящей в класс $E_2(G^-)$. Так как по условию функция $f(z)$ допускает внутри области G представление интегралом типа Коши (2), то разность $g(\zeta) - g^*(\zeta)$ должна являться угловыми граничными значениями аналитической в области G^- функции класса $E_1(G^-)$. Отсюда сразу следует заключение теоремы.

Можно, однако, отметить очень важный случай, когда указанным свойством обладают уже все представления данной функции.

Теорема 4. Пусть область G удовлетворяет условию В. И. Смирнова. Тогда для того, чтобы функция $f(z)$, представимая интегралом типа Коши (2), раскладывалась в ряд рациональных дробей, полюса которых удовлетворяют условию (2.1), необходимо и достаточно, чтобы функция $g(\zeta)B(\zeta)$ являлась (почти всюду на γ) угловыми граничными значениями аналитической в области G^- функции класса E_2 .

Доказательство следует немедленно из доказательства теоремы 2, ибо теперь про разность $\tilde{\Phi}(\zeta) = g(\zeta) - S[\psi(\zeta)] \times V\overline{\psi'(\zeta)}$ можно утверждать, что это есть угловые граничные значения функции $\tilde{\Phi}(z) \in E_2(G^-)$. В самом деле, утверждение $\tilde{\Phi}(z) \in E_1(G)$ следует из того, что интеграл типа Коши с функцией $\tilde{\Phi}(\zeta)$ равен тождественно нулю внутри G . Но для областей G^- класса В. И. Смирнова известно, что если граничные значения функции $\tilde{\Phi}(z)$ класса E_1 суммируемы на γ в какой-то степени $p > 1$, то $\tilde{\Phi}(z) \in E_p$.

§ 3. Разложение аналитических функций в многосвязных областях в ряды рациональных дробей с заданными полюсами

Результаты, доказанные выше для односвязных областей, легко распространяются на многосвязные области.

Пусть G — многосвязная область с границей Γ , состоящей из m замкнутых жордановых спрямляемых кривых $\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}$, причем считаем, что γ_0 содержит $\gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}$ внутри себя.

Обозначим через $w = \psi_k(z)$ функцию, осуществляющую конформное отображение области G_k — компоненты дополнения G , ограниченной кривой γ_k , либо на $|w| > 1$, если $k=0$ ($\psi_0(\infty) = \infty$), либо на $|w| < 1$, если $k=1, \dots, m-1$. Пусть в каждой из областей G_k задана последовательность точек $\{\alpha_{kj}\}$ $j=1, 2, \dots$, $k=0, 1, \dots, m-1$, в которых могут располагаться полюса дробей. Построим, аналогично тому, как это было сделано для односвязного случая, систему рациональных дробей $\{M_{kn}^*(z)\}$, полюсами которых будут заданные числа. Система $\{M_{kn}^*(z)\}$ строится в точности так же, как и раньше. При построении системы $\{M_{kn}^*(z)\}$, $n=1, 2, \dots$, где k — какое-либо число ($1 \leq k \leq m-1$), надо будет отправляться от ортогональной системы рациональных дробей $\{\Phi_{kn}^*(w)\}$ с полюсами в последовательности точек $\{\beta_{kj}\}$, $\beta_{kj} = \psi_k(\alpha_{kj})$, лежащих внутри $|w| < 1$. Такая система имеет вид

$$\Phi_{kn}^*(w) = \frac{(1 - |\beta_{kn}|^2)^{1/2}}{1 - \bar{\beta}_{kn}w} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{w - \beta_{kj}}{1 - \bar{\beta}_{kj}w}, \quad n=1, 2, \dots, \beta_{kj} = \frac{1}{\bar{\beta}_{kj}}. \quad (3.1)$$

Для определения $M_{kn}^*(z)$ мы рассматриваем затем, подобно тому, как это делалось ранее, сумму главных частей разложений функций $\Phi_{kn}^*[\psi_k(z)] \sqrt{\psi_k'(z)}$ в окрестности ее полюсов. Получающиеся рациональные дроби обозначаем $M_{kn}^*(z)$. Повторяя проводившиеся выше рассуждения, можно установить следующее. Пусть для рассматриваемого $k \geq 1$ заданные точки $\{\alpha_{kj}\}$ таковы, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |\beta_{kj}|)$ расходится. Тогда для любой аналитической во внешности γ_k функции $f_k(z)$, представимой интегралом типа Коши-Лебега

$$f_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{g(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad \text{где} \quad \int_{\gamma_k} |g(\zeta)|^2 ds < \infty, \quad (3.2)$$

составленный для функции $f_k(z)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_{kn} M_{kn}^*(z)$ будет равномерно сходиться к ней в любой замкнутой подобласти внешности G_k^- кривой γ_k

$$f_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{kn} M_{kn}^*(z), \quad \text{где} \quad C_{kn} = \int_{\gamma_k} g(\zeta) \bar{\Phi}_{kn}^*[\psi_k(\zeta)] \sqrt{\psi_k'(\zeta)} d\zeta, \quad (3.3)$$

$$\bar{\Phi}_{kn}^*(w) = \frac{(1 - |\beta_{kn}|^2)^{1/2}}{1 - \bar{\beta}_{kn}w} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{w - \beta_{kj}}{1 - \bar{\beta}_{kj}w}.$$

Если же при некотором $k \geq 1$ окажется, что $\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |\beta_{kj}|) < \infty$, то для равномерной сходимости внутри G_k^- ряда (3.3), составленного

для функции $f_k(z)$, представимой интегралом типа Коши (3.2), необходимо и достаточно, чтобы существовало такое представление (3.2), в котором $g(\zeta)$ являлась угловыми граничными значениями мероморфной в G_k функции $g_k(z)$ ограниченного вида, для которой произведение $g_k(z)B_k(z)$ входило бы в класс $E_2(G_k)$. Здесь $B_k(z) = b_k[\psi_k(z)]$, а $b_k(w)$ — произведение Бляшке с нулями в точках $\{z_j\}$, $j = 1, 2, \dots$. [Если G_k — область В. И. Смирнова, то подобным свойством обладает функция $g(\zeta)$ в любом представлении $f_k(z)$ в виде (3.2)].

Пусть теперь в многосвязной области G с границей $\Gamma = \bigcup_{k=0}^{m-1} \gamma_k$ дана аналитическая функция $f(z)$, представимая интегралом типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad \text{где} \quad \int_{\Gamma} |g(\zeta)|^2 ds < \infty. \quad (3.4)$$

Разбивая интеграл (3.4) на сумму интегралов типа Коши, взятых по кривым γ_k , $k = 0, \dots, m-1$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} f_k(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{g(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

и применяя к $f_0(z)$ установленные ранее результаты, а для $f_k(z)$ $k=1, \dots, m-1$, сделанные только что замечания, получаем:

Теорема 5. Пусть G — произвольная конечно-связная область, ограниченная жордановым спрямляемым контуром Γ , состоящим из m кривых $\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}$, причем γ_0 содержит $\gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}$ внутри себя. Пусть далее в каждой компоненте G_k дополнения области G задана последовательность точек $\{z_{kn}\}$ и $\{M_{kn}(z)\}$ — последовательность рациональных дробей с полюсами в точках $\{z_{kn}\}$, построенная по указанному выше правилу. Тогда, чтобы для любой аналитической в области G функции $f(z)$, представимой интегралом типа Коши (3.4) с суммируемой в квадрате функцией плотности, составленный для $f(z)$ ряд по системе $\{M_{kn}(z)\}$ равномерно сходил к $f(z)$ внутри G

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} C_{kn} M_{kn}(z), \quad (3.5)$$

где C_{kn} определяются при $k=1, \dots, m-1$, $n=1, 2, \dots$, по формулам (3.3), а при $k=0$ по формулам (1.2), необходимо и достаточно выполнение условий

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{|\psi_0(z_{0n})|}\right) = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\psi_k(z_{kn})|) = \infty \quad k=1, \dots, m-1. \quad (3.6)$$

Если условия (3.6) не выполняются, то не все функции, представимые интегралами типа Коши (3.4) могут быть разложены в ряд

(3.5). Необходимые и достаточные условия для возможности разложения даются в следующей теореме:

Теорема 6. Пусть сходится хотя бы один из рядов (3.6). Тогда для того, чтобы функцию $f(z)$, представимую интегралом типа Коши-Лебега (3.4), можно было разложить в ряд (3.5), необходимо и достаточно, чтобы среди ее представлений (3.4) существовало такое, в котором на каждом контуре γ_k , $k = 0, \dots, m-1$, ограничивающем компоненту дополнения G_k , где соответствующий ряд (3.6) сходится, функция $g(\zeta)$ совпадала почти всюду с угловыми граничными значениями мероморфной в G_k функции $g_k(z)$ ограниченного вида. Причем произведение $g_k(z)B_k(z)$ обязано входить в класс $E_2(G_k)$.

Здесь $B_k(z) = b_k[\psi_k(z)]$, где $b_k(w)$ — произведение Бляшке с нулями $\psi_k(z_{kj})$, $j = 1, \dots$. На контурах γ_k , ограничивающих компоненты дополнения, содержащие внутри себя точки z_{kj} , для которых соответствующий ряд в (3.6) расходится, никаких дополнительных условий на функцию $g(\zeta)$ не накладывается, кроме оговоренного вначале требования $\int_{\gamma_k} |g(\zeta)|^2 ds < \infty$.

Сделаем дополнительные замечания в связи с приведенной теоремой. Опираясь на теорему 4, доказываемся

Теорема 7. Пусть G_k — области класса В. И. Смирнова. Тогда установленное в теореме 6 свойство $g(\zeta)$ будет иметь место для любого представления данной функции $f(z)$ в виде (3.4), а не только для специального.

Для произвольной области G , для которой компоненты G_k не являются областями В. И. Смирнова, можно дать необходимое условие возможности разложения функции $f(z)$ в ряд, относящееся уже к любому представлению $f(z)$ в виде (3.4). Соответствующее распространение теоремы 3, имевшей место для односвязного случая, получается немедленно. И мы тогда имеем

Теорема 8. Пусть функцию $f(z)$, представимую интегралом типа Коши (3.4), можно разложить в ряд (3.5). Тогда на каждом из контуров γ_k , являющихся границами компоненты G_k дополнения G со сходящимся рядом из (3.6), функция $g(\zeta)$ совпадает с угловыми граничными значениями мероморфной в G_k функции $g_k(z)$ ограниченного вида, для которой произведение $g_k(z)B_k(z)$ является аналитической в G_k функцией класса E_1 .

§ 4. Исследование сходимости рядов по рациональным дробям на границе области

В предыдущих параграфах были приведены результаты, касающиеся сходимости, внутри области, рядов по построенной системе рациональных дробей с полюсами в заданных точках. Естественно после этого поставить вопрос о том, не будут ли получающиеся ряды

сходиться не только внутри области, но также и на границе? Однако мы сейчас покажем, что для произвольных односвязных областей (не являющихся областями В. И. Смирнова) даже среди функций $f(z)$ класса E_2 существуют такие, что соответствующие им ряды

$\sum_{n=1}^{\infty} C_n M_n^*(\zeta)$ не будут сходиться в среднем на границе γ области G .

Более того, какой бы перманентный метод суммирования мы не применили к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} C_n M_n^*(\zeta)$, частные суммы $\tau_n(\zeta)$ получающегося ряда не могут быть равномерно ограничены в среднем в какой-либо интегральной метрике с весом $\rho(\zeta) > 0$, подчиненным лишь требованию

$$\int_{\gamma} \ln \rho(\zeta) |\psi'(\zeta)| d\zeta > -\infty.$$

При доказательстве только что сформулированного результата мы будем опираться на следующую теорему, ранее установленную нами (см. [6], теорема 10).

Теорема 9. Пусть для функции $f(z)$ существует последовательность $\{f_n(z)\}$, равномерно сходящаяся к $f(z)$ внутри G и такая, что $\int_{\gamma} |f_n(\zeta)|^p \rho(\zeta) ds \leq C < \infty$, $n=1, 2, \dots$, $p > 0$, где все $f_n(z)$

$n=1, 2, \dots$ входят в класс D в области G , а $\rho(\zeta)$ удовлетворяет условию

$$\int_{\gamma} \ln \rho(\zeta) |\psi'(\zeta)| d\zeta > -\infty. \quad (4.1)$$

Тогда и $f(z)$ входит в класс D в области G .

В работе [6] эта теорема была сформулирована в предположении, что все $f_n(z)$ многочлены. Однако, приведенное там доказательство годится и для общего случая.

Непосредственным следствием указанной сейчас теоремы является следующая теорема, из которой в качестве следствия мы сумеем вывести упомянутый выше результат.

Теорема 10. Предположим, что выполняется условие (1) для полюсов α_j . И пусть функция $f(z)$, представляемая интегралом типа Коши, такова, что частные суммы $\tau_n(z)$ ряда, полученного применением какого-либо перманентного метода суммирования к

ряду $\sum_{n=1}^{\infty} C_n M_n^*(z)$, обладают свойством $\int_{\gamma} |\tau_n(\zeta)|^p \rho(\zeta) ds \leq C$, $n=1, 2, \dots$,

где для $\rho(\zeta)$ выполняется условие (4.1). Тогда $f(z)$ входит в класс D в области G .

Доказательство немедленно сводится к предыдущей теореме. Действительно, последовательность $\{\tau_n(z)\}$ в силу перманентности

рассматриваемого метода суммирования, будет сходиться к функции

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n M_n^*(z). \text{ Остается заметить, что } M_n^*(z), \text{ как функции аналитические в замкнутой области } \bar{G}, \text{ входят, очевидно, в класс } D \text{ и, применив теорему 9, сразу можно получить нужное заключение.}$$

Теорему 10 можно, конечно, применять в частности к функциям $f(z)$, входящим в области G в класс E_2 . Здесь представляет интерес рассмотрение случая, когда область G не является областью В. И. Смирнова. Ибо в областях, удовлетворяющих условию В. И. Смирнова, всякая функция $f(z)$ из класса E_2 входит в класс D . В то же время, если область G не удовлетворяет условию В. И. Смирнова, то существуют функции $f(z)$ такие, что $f(z) \in E_2(G)$, но $f(z) \notin D(G)$ (см., напр., [4]). Учитывая это, мы получаем на основании теоремы 10 следующую теорему.

Теорема 11. Если область G не удовлетворяет условию В. И. Смирнова, то существуют аналитические в G функции $f(z)$, принадлежащие классу E_2 , для которых соответствующий ряд (1.2) таков, что применение к нему любого перманентного метода суммирования приводит к ряду, последовательность $\{\sigma_n(\zeta)\}$ частных сумм которого не может быть ограничена ни в какой интегральной метрике с весом $\rho(\zeta)$, удовлетворяющим лишь условию (4.1).

Приведем сейчас теорему, в которой дается достаточное условие, при выполнении которого будет иметь место сходимость в среднем на границе ряда $\sum_{n=1}^{\infty} C_n M_n^*(\zeta)$ для любой функции из рассматриваемого класса.

Теорема 12. Пусть область G такова, что любой интеграл типа Коши-Лебега $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, где $\int_{\gamma} |g(\zeta)|^2 ds < \infty$, изображает внутри G аналитическую функцию $f(z)$ класса E_2 . Тогда, составленный для функции $f(z)$, представимой интегралом типа Коши (2), ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n M_n^*(z)$ по системе рациональных дробей с полюсами, удовлетворяющими условию (1), будет сходиться на γ в метрике L_2 к $f(\zeta)$ — угловым граничным значениям $f(z)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} \left| f(\zeta) - \sum_{k=1}^n C_k M_k^*(\zeta) \right|^2 ds = 0.$$

Доказательство этой теоремы немедленно следует из наших недавних результатов, касающихся интегралов типа Коши, которые будут приведены в другой статье.

В заключение сделаем некоторые замечания, касающиеся коэффициентов C_n и единственности разложения функций в ряды рациональных дробей с заданным множеством полюсов. Из доказанных ранее теорем следует, что для любой функции $f(z)$ представимой интегралом типа Коши (2), ряд из квадратов модулей коэффициентов

будет сходящимся: $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 < \infty$. В самом деле, ведь C_n — это ко-

эффициенты Фурье по ортогональной системе $\{\Phi_n(\xi)\}$ для функции $F_1(\xi)$ с суммируемым квадратом модуля на $|\xi| = 1$. Естественно теперь поставить вопрос о том, имеет ли место в нашем случае теорема Фишера-Рисса, т. е. будет ли для произвольной последовательности

$\{C_n\}$, удовлетворяющей условию $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 < \infty$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n M_n^*(z)$ равно-

мерно сходиться внутри G к функции $f(z)$, изображаемой интегралом типа Коши (2)? Просматривая еще раз приведенные выше доказательства теорем, нетрудно видеть, что это действительно так. И мы получаем таким образом следующую теорему, аналогичную теореме Фишера-Рисса.

Теорема 12. Для всякой аналитической в области G функции $f(z)$, представимой интегралом типа Коши (2), коэффициенты, определяемые по формулам (1.2), удовлетворяют условию $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 < \infty$. Справедливо также и обратное: по всякой последовательности $\{C_n\}$, для которой выполняется условие $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 < \infty$, мож-

но составить ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n M_n^*(z)$, который окажется равномерно сходящимся к некоторой функции $f(z)$, представимой интегралом типа Коши (2). При этом, если точки z_j таковы, что $\sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{|z_j|}\right) < \infty$, то для функции $g(\zeta)$ имеют место заключения теорем 3 и 4.

Из сформулированной сейчас теоремы вытекает следующее замечание о единственности разложения.

Возьмем любую функцию $f(z)$, представимую интегралом типа Коши (2). Тогда кроме ряда $\sum_{n=1}^{\infty} C_n M_n^*(z)$ с коэффициентами, определяемыми по формулам (1.2), не может существовать сходящегося к

$f(z)$ внутри G ряда $\sum_{n=1}^{\infty} C_n M_n(z)$, для коэффициентов которого будет

сходиться ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 < \infty$, при условии, чтобы хотя бы при одном

n , $n=1, 2, \dots$, имело место $C_n \neq 0$.

Московский Геологоразведочный институт
им. С. Орджоникидзе

Поступила 12 X 1960

Գ. Յ. Տումարկին

ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՎԵՐԱԾՈՒՄԸ ՇԱՐՔԻ՝ ԸՍՏ ԲԵՎԵՌՆԵՐԻ ՏՐՎԱԾ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ՌԱՑԻՈՆԱԼ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Մ. Մ. Զորաշչյանը [1] աշխատության մեջ կառուցել է սահմանափակ ֆունկցիաների $|M_n(z)|$ սխեմներ, որը հանդիսանում է Ֆաբերի լավ հալտնի պրինցիպների բնական ընդհանրացումը: Ապացուցվել էր, որ ժորդանյան ուղղիկ γ կորով սահմանափակված G միակապ տիրույթի վրա և γ -ի արտաքինում դասավորված բևեռների $\{z_j\}$ բազմության վրա զրվող որոշակի սահմանափակումների դեպքում G -ում անալիտիկ և G -ում անընդհատ ամեն մի $f(z)$ ֆունկցիա վեր է ածվում

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n M_n(z)$$

տեսքի շարքի, որը հավասարաչափ զուգամիավում է G տիրույթի ներսում: Ընդ մինչև բևեռների դասավորության վրա զրվող սահմանափակումները կրում էին շատ ընդհանուր բնույթ. $\{z_j\}$ կոմպլեքս թվերի հաջորդականությունը, որի վրա դասավորվում են $|M_n(z)|$ սխեմների բևեռները, պետք է բավարարի միայն հետևյալ պահանջին՝

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{|z_j|}\right) = \pm \infty, \quad (1)$$

որտեղ $z_j = \psi(z_j)$:

Այստեղ $\omega = \psi(z)$ -ը կոմֆորմ կերպով արտապատկերում է ∞ պարունակող $\bar{G} - \gamma$ -ի լրացման կոմպոնենտ տիրույթը — $|\omega| > 1$ -ի վրա ($\psi(\infty) = \infty$):

Միևնույն ժամանակ G տիրույթի վրա զրված պայմանները ավելի էին, քան պետք էր սպասել: Պահանջվում էր, որպեսզի G տիրույթի γ սահմանը լինի ժորդանյան ափսիսի ուղղիկ կոր, որ $\psi'(\omega)$ ֆունկցիան [որը $\bar{G}$ -ի վրա $|\omega| > 1$ տիրույթի կոմֆորմ արտապատկերումը իրագործող $\psi(\omega)$ ($\psi(\infty) = \infty$) ֆունկցիայի ածանցյալն է] պատկաներ H_2 դասին, այսինքն՝

$$\lim_{r \rightarrow 1+0} \int_0^{2\pi} [\varphi'(re^{i\theta})]^2 d\theta < \infty;$$

նկատենք, որ ժորդանյան ուղղելի կամայական γ կորի համար կարելի է պնդել միայն, որ $\varphi'(\omega) \in H_1$:

Ներկա աշխատության նպատակն է, առաջին՝ ցույց տալ, որ փոքր ինչ ձևափոխելով U , U . Ջրբաշյանի կողմից $[M_n(z)]$ սխառնմի համար առաջարկված սահմանումը, կարելի է ստանալ նույն $\{a_j\}$ կետերում բևեռներ ունեցող բացիոնալ կոտորակների $[M_n^*(z)]$ սխառնմ, որը բազիս է կազմում զգալիորեն ավելի լայն, քան դա Ջրբաշյանի մոտ էր, անալիտիկ ֆունկցիաների տարածության մեջ, արդեն ժորդանյան ուղղելի γ կորով սահմանափակված կամայական տիրույթում. երկրորդ՝ հաստատել (1) պայմանի կատարման անհրաժեշտությունը դիտարկված դասից ամեն մի ֆունկցիա շարքի վերածելու հնարավորության համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Джрбашян М. М. О разложении аналитических функций в ряд по рациональным функциям с заданным множеством полюсов. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук*, 10, № 1, 1957.
2. Кочарян Г. С. О приближении рациональными функциями в комплексной области. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук* 11, № 4, 1958.
3. Walsh J. L. Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. New York, 1935.
4. Джрбашян М. М. К теории рядов Фурье по рациональным функциям. Известия АН АрмССР, серия ФМЕТ наук*, 9, № 7, 1956.
5. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. Изд. 2-ое, М.—Л., 1950.
6. Тумаркин Г. Ц. Приближение в среднем функций на спрямляемых кривых. Матем. сб.*, 42 (84):1, 1957.