

Н. Ф. Какосмиди

Расчет фундаментной полосы с учетом ползучести основания

Под явлением ползучести обычно понимают деформирование материала во времени при неизменной внешней нагрузке.

Теория ползучести излагается в ряде работ [1, 2, 6] и др.

Помимо других материалов, свойством ползучести обладают также грунты [13—17].

Согласно Н. Я. Денисову [19], процесс деформирования водонасыщенного связного (глинистого) грунта включает в себя: 1) выжимание из пор свободной воды; 2) вязкое перемещение структурных элементов относительно друг друга и 3) выжимание связанной воды из контактов частиц грунта.

В соответствии с этим, деформации грунта при приложении внешней нагрузки расчленяются на: 1) упругие деформации (протекают мгновенно в момент загрузки); 2) структурные деформации (появляются вслед за первыми и протекают во времени) и 3) структурно-адсорбционные деформации (развиваются с течением времени).

Большую роль в развитии этих новых представлений о природе деформирования связных грунтов сыграли работы В. А. Флорина [16, 17], в которых впервые было введено понятие о ползучести скелета грунта.

Под ползучестью грунта по В. А. Флорину понимается деформация, обусловленная относительным вязким смещением твердых частиц и агрегатов грунта, а также разрушением цементационных связей.

Иначе говоря, под деформацией ползучести грунта подразумевается суммарное значение структурных и структурно-адсорбционных деформаций [13].

Таким образом, процесс деформирования водонасыщенного грунта можно охарактеризовать двумя факторами, а именно: фильтрационным уплотнением и ползучестью скелета грунта.

В зависимости от значимости для данного грунта каждого из указанных факторов, следует различать следующие три случая.

1) Связи между частицами грунта настолько прочны, что явление выжимания воды из пор не имеет существенного значения. В этом случае можно пренебрегать ролью фильтрации и использовать для решения задачи уплотнения теорию ползучести.

2) Связи между частицами грунта слабы и процесс деформирования в основном обусловлен фильтрационными явлениями. На этот раз можно ограничиться теорией фильтрационного уплотнения, пренебрегая ролью ползучести скелета грунта [18].

3) Наконец, связи между частицами грунта таковы, что оба фактора деформирования выступают совместно. В таком случае следует пользоваться совместным решением теории фильтрационного уплотнения и теории ползучести [16, 17].

В дальнейшем будет рассматриваться первый случай.

Отметим, что для учета ползучести скелета грунта В. А. Флорин предложил использовать теорию ползучести Г. Н. Маслова—Н. Х. Арутюняна [1, 2].

Затем С. Р. Месчан [13—15] поставил экспериментальные исследования с целью выявления справедливости для связных грунтов основных предпосылок указанной теории ползучести, к которым относятся: 1) линейная зависимость между мгновенными деформациями и напряжениями; 2) линейная (в линейной теории) и нелинейная (в нелинейной теории) зависимость между деформациями ползучести и напряжениями; 3) наличие для деформации ползучести закона наложения и 4) изменяемость во времени модуля упруго-мгновенной деформации материала.

На основании экспериментальных исследований доказана применимость к связным грунтам отмеченных предпосылок. Причем, при нагрузках, не превышающих примерно $1,0 \text{ кг/см}^2$, получена линейная зависимость между деформациями ползучести и напряжениями, а при более высоких нагрузках—нелинейная зависимость. Соответственно этому должна быть и использована линейная или нелинейная теории ползучести.

После приложения внешней нагрузки, грунт со временем изменяет свои физико-механические свойства, т. е. имеет место старение грунта, что позволяет применять к последнему наследственную теорию старения.

Между явлениями старения бетона и грунта имеется существенная разница.

Старение бетона происходит без участия какого-либо внешнего силового воздействия и является результатом только внутренних физико-химических процессов, связанных с твердением цементного камня.

Старение же грунта является результатом уплотнения его под действием внешней нагрузки, а также проявления сцепления упрочнения [19], обусловленного протеканием во времени физико-химических процессов на контактах твердых и жидких фаз.

В отношении нагрузки на основание сооружения следует заметить, что она обычно является нарастающей (переменной) во времени.

Рост нагрузки практически можно представить в виде последовательно приложенных ступеней через определенные (достаточно для

тельные) интервалы времени. Приложение этих ступеней, в отличие от всей нагрузки, возможно считать мгновенным.

Внешняя нагрузка ниже понимается в изложенном здесь смысле.

Представление нагрузки в таком виде позволяет 1) распространить решение для мгновенной нагрузки на каждую ступень, соответствующую определенному возрасту грунта* и 2) использовать имеющиеся экспериментальные данные о характеристиках ползучести грунтов [13].

Решение для суммарной нагрузки легко получить, используя принцип наложения.

В связи со специфической особенностью старения грунта, величину модуля мгновенной деформации последнего целесообразно будет принять разной для каждой ступени нагрузки, но постоянной на интервале действия той или иной ступени. При этом, в качестве значения для модуля мгновенной деформации следует принять то значение, которое соответствует возрасту грунта к моменту начала приложения данной ступени.

Это означает, что действительный график изменения модуля мгновенной деформации во времени заменяется ступенчатой кривой (подобно графику роста нагрузки).

По существу в таком представлении гипотеза о постоянстве модуля мгновенной деформации, применяемая при решении некоторых задач теории ползучести [2], приобретает новую, более приемлемую, форму в смысле приближения ее к реальной действительности.

В соответствии с приведенными выше замечаниями, в настоящей статье будет изложен практический способ расчета фундаментной полосы на упруго-ползучем основании, удовлетворяющем предпосылкам линейной теории Г. Н. Маслова—Н. Х. Арутюняна [1, 2].

Данной проблеме посвящены работы нескольких авторов.

В работе А. Р. Ржаницына [7] решена задача о расчете балки, лежащей на сплошном основании, в случае, когда балка и основание сложены из упруго-вязкого материала и подчиняются упрощенному закону деформирования, заданному в дифференциальной форме.

Позже И. Е. Проколович [4] получил решение плоской контактной задачи с учетом ползучести и показал, что в случае жесткого фундамента ползучесть не оказывает влияния на распределение контактных напряжений.

В работе [5] того же автора, при рассмотрении влияния ползучести на усилия краевого эффекта в ортотропных оболочках, получены формулы, которыми приближенно решается задача о равновесии упруго-ползучей балки на упруго-ползучем основании.

Затем М. И. Розовский [8] дал решение интегро-дифференциального уравнения, к которому приводятся некоторые задачи линейной

* Под возрастом грунта здесь условно понимается время, в течение которого грунт находился под нагрузкой. Каждому возрасту грунта соответствуют определенные его физико-механические свойства.

теории ползучести, в частности, задача о деформации фундаментной балки с учетом ползучести основания, если предположить, что последнее подчиняется известной гипотезе коэффициента постели, являющейся, однако, для грунтов часто несправедливой [10]*.

Позднее И. А. Кийсс [9], исходя из условия равенства кривизны балки и поверхности основания, разработал общий метод расчета и в качестве приложения рассмотрел основание, имеющее слоистый характер [12].

Наконец, недавно Н. Х. Арутюнян [3] получил решение плоской контактной задачи теории ползучести в нелинейной постановке.

В предлагаемом ниже решении, в отличие от указанных работ [7–9], для описания механических свойств основания используется модель упругого полупространства.

Изложение способа расчета проводится для случая плоской деформации.

1. Согласно [4], вертикальные перемещения границы упругого полупространства, находящегося в условиях плоской деформации под действием переменных во времени нормальных сил $p(x, t)$, с учетом ползучести определяются формулой

$$\begin{aligned} v^*(x, t) = & \frac{2}{\pi} \frac{1 - \nu_0^2(t)}{E_0(t)} \int_{-l}^l \ln \frac{1}{|x-s|} p(s, t) ds - \\ & - \frac{2}{\pi} \int_{\tau_1}^t \int_{-l}^l \ln \frac{1}{|x-s|} p(s, \tau) ds \frac{\partial}{\partial \tau} \{ [1 - \\ & - \nu_0^2(t, \tau)] \delta(t, \tau) \} d\tau + C^*(t), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $2l$ — ширина участка приложения усилий,

$C^*(t)$ — произвольная постоянная.

Кроме того, здесь τ_1 — время приложения нагрузки, t — момент времени, для которого определяется деформация, $E_0(\tau)$ — модуль упруго-мгновенной деформации, $\nu_0(t)$ — коэффициент Пуассона для упругой части деформации, $\nu_0^*(t, \tau)$ — то же при деформации ползучести,

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E_0(\tau)} + C(t, \tau)$$

— полная относительная деформация при сжатии или растяжении, причем $C(t, \tau)$ — мера ползучести основания.

Введя безразмерные координаты $\xi = \frac{x}{l}$, $\eta = \frac{s}{l}$ и переходя к относительным перемещениям $\bar{v}^*(\xi, t)$ (относительно начала координат — середины участка $2l$), для последних получим выражение

* Известные решения зарубежных авторов [20] и [21], относящиеся к бесконечной балке и плите на упруго-вязком основании, базируются на указанной гипотезе.

$$\begin{aligned} \bar{v}^*(\xi, t) &= v^*(\xi, t) - v^*(0, t) = \\ &= -\frac{2l}{\pi} \frac{1 - v_0^2(t)}{E_0(t)} \int_{-1}^1 \ln \frac{|\xi - \eta|}{|\eta|} p(\eta, t) d\eta + \\ &+ \frac{2l}{\pi} \int_{\tau_0}^t \int_{-1}^1 \ln \frac{|\xi - \eta|}{|\eta|} p(\eta, \tau) d\eta \frac{\partial}{\partial \tau} \{ [1 - v_0^2(t, \tau)] \bar{y}(\xi, \tau) \} d\tau, \end{aligned} \quad (1.2)$$

в котором $v^*(0, t)$ представляет собой перемещение точки основания, совпадающей с началом координат.

Должно быть выполнено тождество

$$\bar{v}^*(\xi, t) \equiv \bar{y}(\xi, t), \quad (1.3)$$

где $\bar{y}(\xi, t)$ — относительные прогибы полосы, определяемые зависимостью

$$\bar{y}(\xi, t) = y(\xi, t) - y(0, t). \quad (1.4)$$

Здесь $y(\xi, t)$ — действительные прогибы, удовлетворяющие известному дифференциальному уравнению

$$\frac{D}{l^4} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} y(\xi, t) = q(\xi) - p^*(\xi, t), \quad (1.5)$$

где

$q(\xi)$ — обобщенная интенсивность внешней нагрузки, постоянная во времени,

$p^*(\xi, t)$ — реактивные давления на полосу с учетом ползучести основания,

$D = \frac{EJ}{b'(1 - \nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость полосы,

b', l — соответственно ширина и полудлина полосы, причем первая принимается равной 1 м.

Введя теперь обозначения

$$\vartheta(t) = \frac{1 - v_0^2(t)}{E_0(t)}, \quad (1.6)$$

$$\bar{v}(\xi, t) = -\frac{2l}{\pi} \vartheta(t) \int_{-1}^1 \ln \frac{|\xi - \eta|}{|\eta|} p^*(\eta, t) d\eta \quad (1.7)$$

и используя (1.2), тождество (1.3) перепишем в виде

$$\bar{v}(\xi, t) - \int_{\tau_0}^t K(t, \tau) \bar{v}(\xi, \tau) d\tau \equiv \bar{y}(\xi, t), \quad (1.8)$$

в котором

$$K(t, \tau) = \frac{1}{\theta(t)} \frac{\partial}{\partial \tau} [1 - \gamma_0^2(t, \tau)] \bar{z}(t, \tau). \quad (1.9)$$

Уравнение (1.8) является исходным уравнением при расчете фундаментных полос с учетом ползучести основания.

2. Следуя [5], представим искомую функцию $p^*(\xi, t)$ в виде суммы

$$p^*(\xi, t) = p(\xi, \tau_1) + p_1(\xi, t), \quad (2.1)$$

где через $p(\xi, \tau_1)$ обозначены реактивные давления в момент приложения внешней нагрузки, через $p_1(\xi, t)$ — приращения реактивных давлений за счет ползучести основания.

Заметим, что поскольку упруго-мгновенное решение удовлетворяет условиям равновесия, давления $p_1(\xi, t)$ должны быть самоуравновешенными и удовлетворять, в связи с этим, следующим очевидным условиям

$$\int_{-1}^1 p_1(\xi, t) d\xi = 0, \quad (2.2)$$

$$\int_{-1}^1 p_1(\xi, t) \xi d\xi = 0.$$

Учитывая (2.1), а также (1.5) и (1.7), на основании (1.8), для определения $p(\xi, \tau_1)$ и $p_1(\xi, t)$, будем иметь следующие два уравнения

$$\bar{v}(\xi, \tau_1) = \bar{y}(\xi, \tau_1) \quad (2.3)$$

и

$$\begin{aligned} \bar{v}_1(\xi, t) &= \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) \bar{v}_1(\xi, \tau) d\tau = \\ &= \bar{y}_1(\xi, t) + \bar{v}(\xi, \tau_1) \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\bar{v}_1(\xi, t) = -\frac{2l}{\pi} \theta(t) \int_{-1}^1 \ln \frac{|\xi - \eta|}{|\eta|} p_1(\eta, t) d\eta. \quad (2.5)$$

Кроме того, входящая в (2.4) функция $\bar{y}_1(\xi, t)$ находится с помощью дифференциальной зависимости

$$\frac{D}{l^4} \frac{\partial^4 \bar{y}_1(\xi, t)}{\partial \xi^4} = -p_1(\xi, t). \quad (2.6)$$

Уравнение (2.3), служащее для определения давлений $p(\xi, \tau_1)$, яв-

ляется исходным уравнением соответствующей упруго-мгновенной задачи (при $t = \tau_1$), решение которой известно [10]. Поэтому разрешению подлежит уравнение (2.4) с учетом (2.5) и (2.6).

Следует отметить, что нахождение точного выражения для неизвестной функции $p_1(\xi, t)$ по указанным зависимостям (2.4)–(2.6) представляет большие математические трудности.

В связи с этим целесообразно эту функцию представить в виде [9]

$$p_1(\xi, t) = \sum_{i=1}^{i=n} H_i(t) F_i(\xi), \quad (2.7)$$

где $H_i(t)$ — функция только времени t , подлежащая определению,

$F_i(\xi)$ — функция только координаты ξ , выражением которой наперед задаемся так, чтобы удовлетворялись условия (2.2).

Для функции $F_i(\xi)$ удобно принять предложенное Л. П. Винокуровым [11] выражение (в случае симметричного приложения внешней нагрузки)

$$F_i(\xi) = \cos \frac{(2i-1)\pi\xi}{2} + (-1)^i \frac{2}{(2i-1)\pi}. \quad (2.8)$$

Ограничиваясь в соотношении (2.7) одним первым членом ряда и принимая во внимание, что в формулах (2.5) и (2.6) время t является параметром, уравнение (2.4) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \left[f(\xi) - \bar{u}(\xi) \frac{1}{\vartheta(t)} \right] H_1(t) - f(\xi) \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) H_1(\tau) d\tau = \\ = \bar{v}(\xi, \tau_1) \frac{1}{\vartheta(t)} \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь

$$f(\xi) = -\frac{2l}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{|\xi - \eta|}{|\eta|} F_1(\eta) d\eta, \quad (2.10)$$

$$F_1(\xi) = \cos \frac{\pi}{2} \xi - \frac{2}{\pi}. \quad (2.8a)$$

Что же касается функции $\bar{u}(\xi)$, то она представляет собой относительные прогибы полосы от давлений $p_1(\xi, t)$ при $H_1(t) = 1$ и определяется с помощью уравнения

$$\frac{D}{l^3} \bar{u}^{IV}(\xi) = -F_1(\xi). \quad (2.11)$$

Опираясь на результаты исследования, приведенного в работе

[11], где применено подобное представление искомой функции (в упруго-мгновенном решении), можно утверждать, что точность расчета будет достаточной, если, вместо выполнения уравнения (2.9) по всей длине полосы или в отдельных контактных точках, допустить выполнение его в интегральной форме на отдельных участках контакта.

В соответствии с этим, разбив ширину контакта на два участка и проинтегрировав уравнение (2.9) в пределах одного из них, например, правого, получим следующее интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно неизвестной функции $H_1(t)$

$$\left[1 - \frac{B}{A} \frac{1}{\vartheta(t)} \right] H_1(t) - \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) H_1(\tau) d\tau = \\ = \frac{C}{A} \frac{1}{\vartheta(t)} \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) d\tau, \quad (2.12)$$

где

$$A = \int_0^1 f(\xi) d\xi, \quad B = \int_0^1 \bar{u}(\xi) d\xi, \quad C = \int_0^1 \bar{v}(\xi, \tau_1) d\xi. \quad (2.13)$$

Согласно [14] выражение для меры ползучести $C(t, \tau)$ можно принять в виде [2]

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}], \quad (2.14)$$

где

$\varphi(\tau)$ — предельная мера ползучести,

γ — некоторая постоянная.

Учитывая, что

$$\vartheta(t, \tau) = \frac{1}{E_0(\tau)} + \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}] \quad (2.15)$$

и полагая для простоты

$$\gamma_0^*(t, \tau) = \gamma_0(t) = \gamma_0 = \text{const}, \quad (2.16)$$

интегральное уравнение (2.12) запишем так

$$\left[\frac{1}{E_0(t)} - \frac{B}{A(1-\gamma_0^*)} \right] H_1(t) - \\ - \int_{\tau_1}^t H_1(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{1}{E_0(\tau)} + \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}] \right\} d\tau = \\ = \frac{C}{A(1-\gamma_0^*)} \left\{ 1 - E_0(t) \left[\frac{1}{E_0(\tau_1)} + \varphi(\tau_1) [1 - e^{-\gamma(t-\tau_1)}] \right] \right\}. \quad (2.17)$$

Дифференцируя уравнение (2.17) по t , будем иметь:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{E_0(t)} - \frac{B}{A(1-\nu_0^2)} \right] H_1'(t) + \gamma \left\{ \varphi(t) H_1(t) - \right. \\ & \left. - \int_{\tau_1}^t H_1(\tau) [\varphi'(\tau) + \gamma \varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau \right\} = \\ & = - \frac{C}{A(1-\nu_0^2)} \left\{ E_0'(t) \left[\frac{1}{E_0(\tau_1)} + \varphi(\tau_1) [1 - e^{-\gamma(t-\tau_1)}] \right] + \right. \\ & \left. + E_0(t) \gamma \varphi(\tau_1) e^{-\gamma(t-\tau_1)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Дифференцируя (2.18) еще раз по t и используя (2.17), после некоторых преобразований для определения $H_1(t)$ получим следующее линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} & H_1'(t) + H_1(t) \left\{ \gamma [1 + K_0(t) \varphi(t) E_0(t)] - K_0(t) \frac{E_0'(t)}{E_0(t)} \right\} = \\ & = - \frac{C}{A(1-\nu_0^2) - BE_0(t)} E_0(t) \left\{ E_0'(t) \left[\frac{1}{E_0(\tau_1)} + \varphi(\tau_1) [1 - \right. \right. \\ & \left. \left. - e^{-\gamma(t-\tau_1)}] \right] + E_0(t) \gamma \left[\frac{1}{E_0(\tau_1)} + \varphi(\tau_1) [1 + e^{-\gamma(t-\tau_1)}] \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

причем

$$K_0(t) = \frac{A(1-\nu_0^2)}{A(1-\nu_0^2) - BE_0(t)}. \quad (2.19a)$$

Решение уравнения (2.19) с начальными условиями [согласно (2.17) и (2.18)]

$$H_1(\tau_1) = 0,$$

$$H_1'(\tau_1) = - \frac{C}{A(1-\nu_0^2) - BE_0(\tau_1)} [E_0'(\tau_1) + \gamma \varphi(\tau_1) E_0^2(\tau_1)]$$

выражается в квадратурах следующим образом

$$\begin{aligned} H_1(t) = & -C \left\{ \frac{E_0'(\tau_1) + \gamma \varphi(\tau_1) E_0^2(\tau_1)}{A(1-\nu_0^2) - BE_0(\tau_1)} \int_{\tau_1}^t e^{-m(\tau)} d\tau + \right. \\ & + \int_{\tau_1}^t e^{-m(\tau)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} \frac{E_0(z) e^{m(z)}}{A(1-\nu_0^2) - BE_0(z)} \left\{ E_0'(z) \left[\frac{1}{E_0(\tau_1)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \varphi(\tau_1) [1 - e^{-\gamma(z-\tau_1)}] \right] + E_0(z) \gamma \left[\frac{1}{E_0(\tau_1)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \varphi(\tau_1) [1 + e^{-\gamma(z-\tau_1)}] \right] \right\} dz \Bigg\}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где

$$m(\tau) = \int_{\tau_1}^{\tau} \left\{ \gamma [1 + K_0(z) \varphi(z) E_0(z)] - K_0(z) \frac{E_0'(z)}{E_0(z)} \right\} dz. \quad (2.21)$$

Из выражения (2.20) очевидно, что для абсолютно жесткой полосу, т. е. при $C=0$, функция $H_1(t)$ обращается в нуль и, следовательно, ползучесть не оказывает влияния на распределение реактивных давлений, что уже отмечалось [4].

Полученная формула $H_1(t)$ может быть упрощена, если пренебречь изменяемостью во времени модуля упруго-мгновенной деформации $E_0(\tau)$.

В указанном случае будем иметь

$$H_1(t) = - \frac{\gamma C \varphi(\tau_1) E_0^2}{A(1 - \nu_0^2) - B E_0} e^{\gamma \tau_1} \int_{\tau_1}^t e^{-\tau + h_0 E_0 \int_{\tau_1}^{\tau} \varphi(z) dz} d\tau. \quad (2.22)$$

Принимая выражение для предельной меры ползучести $\varphi(\tau)$ в виде [2,14]

$$\varphi(\tau) = C_0 + \frac{A_1}{\tau_1}, \quad (2.23)$$

для неизвестной функции окончательно получим следующую формулу

$$H_1(t) = - K \left(C_0 + \frac{A_1}{\tau_1} \right) \tau_1^p e^{\gamma \tau_1} r^{-(1-p)} [\Phi(rt, p) - \Phi(r\tau_1, p)], \quad (2.24)$$

где

$$K = \frac{\gamma C E_0^2}{A(1 - \nu_0^2) - B E_0}, \quad r = \gamma(1 + K_0 C_0 E_0), \quad p = \gamma A_1 K_0 E_0. \quad (2.25)$$

Кроме того в выражении (2.24) участвуют неполные гамма-функции

$$\Phi(x, p) = \int_0^x \frac{e^{-\tau}}{\tau^p} d\tau, \quad (2.26)$$

разность которых представляется в виде

$$\Phi(rt, p) - \Phi(r\tau_1, p) = \int_{r\tau_1}^{rt} \frac{e^{-\tau}}{\tau^p} d\tau = \int_{r\tau_1}^{rt} \frac{e^{-\tau}}{\tau^p} d\tau, \quad (2.27)$$

причем входящие сюда интегралы вычисляются по асимптотической формуле [2]

$$\int_x^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau^p} d\tau = \frac{e^{-x}}{x^p} \left[1 - \frac{p}{x} + \frac{p(p+1)}{x^2} - \frac{p(p+1)(p+2)}{x^3} + \dots + \right]$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1} p(p+1) \cdots (p+n-2)}{x^{n-1}} + \dots \}. \quad (2.28)$$

Из выражений (2.24) и (2.27) вытекает, что функция $H_1(t)$ минимальное значение, равное нулю, принимает в начальный момент $t = \tau_1$, а максимальное значение — при $t = \infty$, которое согласно (2.28) составляет

$$H_1(\infty) = -\frac{K}{r} \left(C_0 + \frac{A_1}{\tau_1} \right) \left[1 - \frac{p}{r\tau_1} + \frac{p(p+1)}{(r\tau_1)^2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} p(p+1) \cdots (p+n-2)}{(r\tau_1)^{n-1}} + \dots \right]. \quad (2.29)$$

Отсюда следует, что с увеличением возраста грунта τ_1 предельное значение функции $H_1(t)$ убывает и при $\tau_1 \rightarrow \infty$ стремится к величине $-\frac{KC_0}{r}$.

Таким образом, функция $H_1(t)$, определяемая формулой (2.24), отражает влияние возраста и меры ползучести основания на характер изменения во времени реактивных давлений $p^*(\xi, t)$.

3. Перейдем теперь к определению вспомогательных величин A , B и C , представленных формулами (2.13).

Для этого прежде запишем выражения для функций $f(\xi)$, $\bar{u}(\xi)$ и $\bar{v}(\xi, \tau_1)$, входящих в указанные формулы.

Подставляя (2.8a) в (2.10), после интегрирования получим следующее асимптотическое выражение для функции $f(\xi)$

$$\begin{aligned} f(\xi) = & \frac{4I}{\pi^2} \left\{ \cos \frac{\pi}{2} \xi \left[-\cos \frac{\pi}{2} \xi \ln(1 - \xi^2) + \pi - \right. \right. \\ & - \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 \frac{(1 - \xi)^3 + (1 + \xi)^3}{3 \cdot 3!} + \left(\frac{\pi}{2} \right)^5 \frac{(1 - \xi)^5 + (1 + \xi)^5}{5 \cdot 5!} - \dots \left. \right] + \\ & + \sin \frac{\pi}{2} \xi \left[(1 - \sin \frac{\pi}{2} \xi) \ln(1 - \xi) + (1 + \sin \frac{\pi}{2} \xi) \ln(1 + \xi) - \right. \\ & - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{(1 - \xi)^2 - (1 + \xi)^2}{2 \cdot 2!} + \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 \frac{(1 - \xi)^4 - (1 + \xi)^4}{4 \cdot 4!} - \dots \left. \right] + \\ & + (1 - \xi) \ln(1 - \xi) + (1 + \xi) \ln(1 + \xi) + 2 \left[-\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 \frac{1}{3 \cdot 3!} - \right. \\ & \left. - \left(\frac{\pi}{2} \right)^5 \frac{1}{5 \cdot 5!} + \dots + (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2n-1} \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n-1)!} + \dots \right] \}. \quad (3.1) \end{aligned}$$

Для определения $\bar{u}(\xi)$ на основании (2.11) и (2.8a) имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{D}{l^4} \bar{u}^{IV}(\xi) = - \left(\cos \frac{\pi}{2} \xi - \frac{\pi}{2} \right),$$

решением которого, удовлетворяющим условиям

$$\bar{u}(0) = \bar{u}'(0) = \bar{u}''(1) = \bar{u}'''(1) = 0,$$

будет

$$\bar{u}(\xi) = - \frac{l^4}{D} \left[\left(\frac{2}{\pi} \right)^4 \left(\cos \frac{\pi}{2} \xi - 1 \right) + \frac{1}{\pi} \frac{\xi^2}{2} - \frac{2}{\pi} \frac{\xi^4}{24} \right]. \quad (3.2)$$

Функция $\bar{v}(\xi, \tau_1)$, представляющая собой относительные упруго-мгновенные перемещения (осадки) основания, подлежит определению в каждом конкретном случае по известной формуле

$$\bar{v}(\xi, \tau_1) = - \frac{2l}{\pi} \frac{1 - \nu_0^2}{E_0} \int_{-1}^1 \ln \frac{|\xi - \eta|}{|\eta|} p(\eta, \tau_1) d\eta. \quad (3.3)$$

Подставляя (3.1) и (3.2) в соответствующие формулы (2.13) и выполняя интегрирование, получаем следующие значения для величин A и B

$$A = -0,177 \frac{4l}{\pi}, \quad B = 0,0119 \frac{l^4}{D}. \quad (3.4)$$

При этом вычисление A произведено с использованием интегрирования по формуле трапеций.

Что касается величины C , являющейся ничем иным, как средней интенсивностью относительных упруго-мгновенных осадок основания на рассматриваемом участке $(0,1)$, то определение ее удобно производить по формуле прямоугольников, принимая в соотношении (3.3) значения давлений $p(\xi, \tau_1)$ в выбранных точках по готовым таблицам [10]. Кроме того, можно использовать готовые значения безразмерных осадок, приведенные там же [10] для некоторых частных случаев.

Подставляя полученные значения (3.4) в формулы (2.25), последние перепишем в виде

$$K = - \frac{\pi \gamma C E_0^2}{0,708 l (1 - \nu_0^2) (1 + 0,0672 \lambda)},$$

$$r = \gamma \left(1 + \frac{C_0 E_0}{1 + 0,0672 \lambda} \right),$$

$$p = \gamma \frac{A_1 E_0}{1 + 0,0672 \lambda},$$

где через λ обозначен показатель гибкости полосы

$$\lambda = \frac{(1 - \nu^2) \pi E_0 b' l^2}{(1 - \nu_0^2) 4 E J} = \frac{1 - \nu^2}{1 - \nu_0^2} \frac{3 \pi E_0 l^2}{E h^3}. \quad (3.6)$$

Приводим окончательные выражения для величин: реактивных давлений

$$p^*(\xi, t) = p(\xi, \tau_1) + H_1(t) \left(\cos \frac{\pi}{2} \xi - \frac{2}{\pi} \right), \quad (3.7)$$

поперечных сил

$$Q^*(\xi, t) = Q(\xi, \tau_1) + b' l H_1(t) \left(\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} \xi - \frac{2}{\pi} \xi \right) \quad (3.8)$$

и изгибающих моментов

$$M^*(\xi, t) = M(\xi, \tau_1) + b' l^2 H_1(t) \left(-\frac{4}{\pi^2} \cos \frac{\pi}{2} \xi - \frac{1}{\pi} \xi^2 + \frac{1}{\pi} \right). \quad (3.9)$$

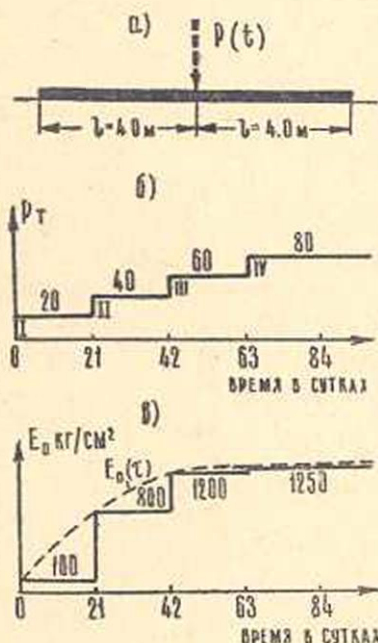
Простота приведенных расчетных формул очевидна.

Напомним, что первые слагаемые в формулах (3.7)–(3.9) находятся из упруго-мгновенного решения, в качестве которого целесообразно использовать решение М. И. Горбунова-Посадова, поскольку по нему составлены обстоятельные таблицы [10], к которым мы уже обращались.

Отметим также, что в физическом отношении входящая в формулы (3.7)–(3.9) функция $H_1(t)$ характеризует перераспределение нормальных контактных усилий за счет ползучести основания.

При расчете балки, основание которой работает в условиях плоского напряженного состояния, во всех выкладках следует положить $\nu = \nu_0 = 0$.

4. Рассмотрим следующий конкретный пример. Пусть на железобетонную полосу, выполненную из бетона марки 150 ($E = 1,65 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$) длиной $2l = 8,0 \text{ м}$ и толщиной $h = 1,0 \text{ м}$ действует центральная нагрузка в виде сосредоточенной силы P (фиг. 1а), величина которой нарастает во времени по ступенчатому графику (фиг. 1б), состоящему из четырех ступеней по 20 т каждая (на графике указанные ступени отмечены соответствующими значками I, II, III и IV). Основание сложено из пылеватого суглинка (грунт, применявшийся в опытах Р. С. Месчаня [13], лав. № 2–57), для которого



Фиг. 1

$$C_0 = 0,0025 \frac{1}{\text{кг/см}^2}, A_1 = 0,044 \frac{\text{сутки}}{\text{кг/см}^2},$$

$$\tau = 0,37 \frac{1}{\text{сутки}}.$$

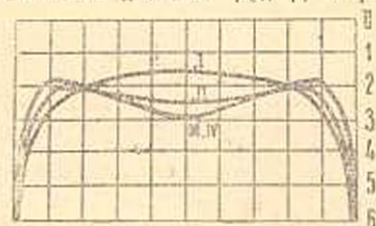
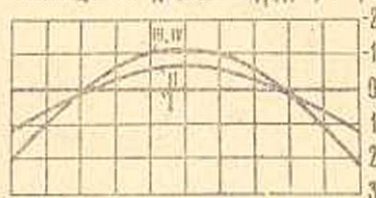
Коэффициенты Пуассона приняты равными $\nu = \frac{1}{6}$, $\nu_0 = 0,35$.

Требуется определить значения величин реактивных давлений $p^*(\xi, t)$ и изгибающих моментов $M^*(\xi, t)$ в момент времени $t = \infty$.

Соответственно графику роста нагрузки, график изменения во времени модуля упруго-мгновенной деформации $E_0(\tau)$ принимаем по ступенчатой кривой, приведенной на фиг. 1в. Там же пунктирной линией показана действительная кривая величины $E_0(\tau)$ [13], причем значение последней при $\tau_1 = 0$ (в момент загрузки), равное 100 кг/см^2 , принято ориентировочно*. Величины λ , C , K , r , ρ и $H_1(\infty)$, изменяющиеся в зависимости от значения модуля мгновенной деформации E_0 и возраста грунта τ_1 , при котором приложена та или другая ступень нагрузки, принимают значения, сведенные в таблице 1. При этом в столбце для показателя гибкости λ в числителях даны значения, по-

Таблица 1

№ ступени	λ	C см	$K \frac{\text{кг}^2}{\text{см}^3 \text{сутки}}$	$r \frac{1}{\text{сутки}}$	ρ	$H_1(\infty) \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$
I	$\frac{0.40}{0}$	0	—	—	—	0
II	$\frac{3.24}{3}$	-0.029	59.8	0.99	10.8	-0.19
III	$\frac{4.86}{5}$	-0.027	136.0	1.20	14.6	-0.31
IV	$\frac{5.06}{5}$	-0.027	148.0	1.24	15.2	-0.32

РЕАКТИВНЫЕ ДАВЛЕНИЯ $p(\xi, \tau_1)$ В Т/МПРИРАЩЕНИЯ ДАВЛЕНИЙ $p_1(\xi, \infty)$ В Т/М

Фиг. 2.

* Следует заметить, что ошибка до 50—100% в значении величины $E_0(\tau)$ в момент приложения первой ступени нагрузки практического влияния на окончательные результаты расчета не оказывает, поскольку при этом жесткость конструкции заметно не изменяется. Так, если в данном примере вместо значения 100 кг/см^2 принять 200 кг/см^2 , вносимая этим в результирующие величины $M_{\max}$ погрешность составит 2,4%.

лученные по формуле (3.6), в знаменателях — те же величины, но округленные до табличных значений [10] и принятые в дальнейшем расчете. Кроме того величины C определены с помощью эпюр относительных прогибов и безразмерных осадок, приведенных у М. И. Горбунова-Посадова [10].

На фиг. 2 даны эпюры реактивных давлений $p(\xi, \tau_1)$ и приращений давлений за счет ползучести основания $p_1(\xi, \infty)$, найденных от действия в отдельности ступеней нагрузок I, II, III и IV. При этом приращения давлений от действия первой ступени нагрузки приняты равными нулю, поскольку соответствующий показатель гибкости полосы имеет значение, близ-

кое к нулю. Давления $p(\xi, \tau_1)$ определены с помощью таблиц [10].

Затем были вычислены результирующие эпюры $p(\xi, \tau_1)$ и $p^*(\xi, \infty)$, отвечающие упругому решению при переменном $E_0(\tau)$ и решению с учетом ползучести. Первые определены путем суммирования отдельных эпюр $p(\xi, \tau_1)$ от каждой ступени нагрузки, а вторые — путем суммирования отдельных эпюр как $p(\xi, \tau_1)$, так и $p_1(\xi, \infty)$. Аналогичным путем произведено вычисление изгибающих моментов полосы $M(\xi, \tau_1)$ и $M^*(\xi, \infty)$. Помимо этого, с целью сопоставления различных решений, были найдены результирующие усилия по упругому расчету [10] при постоянном $E_0(\tau)$, который в этом случае принят равным установившемуся с течением времени значению 1250 кг/см^2 .

Полученные таким образом результирующие эпюры показаны на фиг. 3, где сплошными линиями представлено решение с учетом ползучести, а пунктирными линиями 1 и 2 — упругие решения, причем линии 1 соответствуют решению при переменном $E_0(\tau)$, а линии 2 — решению при постоянном $E_0(\tau)$.

Как явствует из фиг. 3, учет ползучести основания приводит к заметному перераспределению контактных усилий, а последнее — к возрастанию изгибающих моментов.

Приведем, для сравнения, значения максимального изгибающего момента:

по решению с учетом ползучести $M_{\max} = 98,6 \text{ тм}$,

по упругому решению при переменном $E_0(\tau)$ $M_{\max} = 87,2 \text{ тм}$,

по упругому решению при постоянном $E_0(\tau)$ $M_{\max} = 80,0 \text{ тм}$.

Таким образом, в данном примере значение максимального изгибающего момента по решению с учетом ползучести больше, чем по упругим решениям при переменном и постоянном $E_0(\tau)$ соответственно на 13 и 23%. Если учесть также влияние ползучести от первой ступени нагрузки, которым мы пренебрегли, то разница в указанных величинах $M_{\max}$ будет примерно 15 и 25%.

5. Приведем теперь некоторый анализ полученного результата, в частности, рассмотрим вопрос о том, чем объясняется тот факт, что модуль мгновенной деформации грунта во времени растет, а фундамент в результате работает как более жесткий (см. фиг. 3), т. е. показатель гибкости его уменьшается.

Действительно, модуль мгновенной деформации повышается во времени, поскольку, при последовательном приложении ступеней внешней нагрузки, за счет уплотнения грунта мгновенные деформации уменьшаются [13].

Повышение модуля мгновенной деформации влечет за собой возрастание показателя гибкости фундамента в моменты загрузки, вследствие чего фундамент становится как бы более гибким, что хорошо усматривается из эпюр реактивных давлений $p(\xi, \tau_1)$, представленных на фиг. 2.

Этот вывод на первый взгляд противоречит ранее высказанному положению об уменьшении, с течением времени, показателя гибкости фундамента. Но данное противоречие является только кажущимся.

Дело в том, что модуль мгновенной деформации характеризует только деформацию упругую, появляющуюся в момент приложения той или другой ступени нагрузки, а не полную (общую) деформацию грунта в целом. Последняя состоит из упруго-мгновенной деформации и деформации ползучести. Первая составляющая полной деформации, как уже указывалось, уменьшается во времени, вторая же составляющая, наоборот, увеличивается, причем соотношение между этими составляющими во времени таково, что общая деформация на протяжении действия той или иной ступени нагрузки также увеличивается [13].

Вследствие этого модуль общей деформации грунта уменьшается, а потому и показатель гибкости фундамента с течением времени уменьшается.

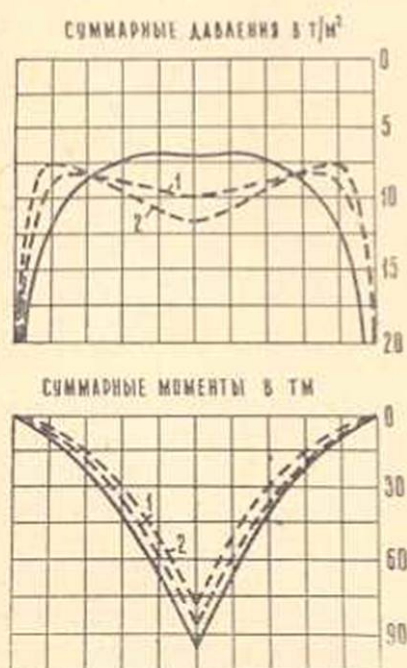
Итак, модуль мгновенной деформации во времени растет, а модуль общей деформации убывает; показатель гибкости фундамента в моменты загрузки увеличивается, а вслед за ними уменьшается.

В связи с этим фундамент впоследствии становится как-бы более жестким* и поэтому эпюра реактивных давлений принимает характерный для подобных конструкций вид [10], причем давления под средней частью фундамента уменьшаются, а у краев увеличиваются (фиг. 3).

Отметим, что перераспределение давлений за счет ползучести протекает во времени следующим образом.

В момент приложения первой ступени нагрузки показатель гибкости фундамента близок к нулю, так как соответствующая величина модуля мгновенной деформации грунта незначительна. Вследствие этого в данный момент фундамент перемещается, в основном, как одно целое, т. е. без упругих деформаций. При этом, согласно результатам работы [6], напряжения с учетом ползучести совпадают с соответствующими напряжениями упруго-мгновенной задачи. Поэтому, на протяжении действия первой ступени нагрузки, перераспределение давлений за счет ползучести практически не имеет места, хотя мера ползучести основания значительна.

В момент приложения второй ступени нагрузки показатель гибкости фундамента заметно больше нуля, т. е. фундамент приобрел



Фиг. 3.

* Этот факт является совершенно естественным, поскольку, за счет ползучести грунта, основание становится более податливым.

определенную гибкость. Поскольку в этом случае последний претерпевает упругие деформации, перераспределение давлений за счет ползучести имеет место, несмотря на то, что мера ползучести основания меньше [6].

Далее, в момент приложения третьей ступени нагрузки значение показателя гибкости фундамента стало еще большим. Поскольку за счет ползучести основания фундамент впоследствии работает как жесткий и чем больше показатель гибкости, тем больше разница в характере распределения реактивных давлений гибкого и жесткого фундаментов [10], перераспределение давлений должно быть более значительным, что на самом деле и наблюдается.

При приложении четвертой, последней, ступени нагрузки, показатель гибкости фундамента увеличивается незначительно. В связи с этим перераспределение давлений по своей значимости практически совпадает с той, которая имела место при предыдущей ступени нагрузки.

Это означает, что грунт основания перешел в упруго-уплотненное состояние, вследствие чего процесс перераспределения давлений за счет ползучести принял затухающий характер, что и следовало ожидать.

Все сказанное здесь нетрудно усмотреть из эпюр приращений реактивных давлений, приведенных на фиг. 2.

Необходимо отметить, что за счет ползучести иногда может иметь место выравнивание эпюры реактивных давлений. Это зависит от категории фундамента, рода основания и т. п. Например, в [20] на стр. 1158--20 имеется такой случай, относящийся к бесконечной балке на, так называемом, максвелловском основании.

Выравнивание эпюры давлений, вообще, можно ожидать у тех балок или полос, которые относятся к категории "длинных" (по терминологии [10]). У этих фундаментов первоначальная эпюра давлений характеризуется большими ординатами в центре и меньшими — у краев. Поэтому, в результате перераспределения реактивных давлений за счет ползучести, разница между средними и крайними ординатами будет уменьшаться и эпюра давлений несколько выпрямится.

Рассмотренная же в нашем примере фундаментная полоса относится к категории "коротких" полос, у которых в первоначальной эпюре, согласно решению теории упругости [10], превалирующими являются давления у краев, а не в центре. В связи с этим, в результате вышеуказанного перераспределения давлений, разница между средними и крайними ординатами будет увеличиваться и, следовательно, в таком случае выравнивания эпюры давлений быть не может.

Следует отметить, что полученные в настоящей работе результаты хорошо согласуются с результатами работ других авторов.

В работе И. А. Кийс ([9], стр. 22) получен такой же характер перераспределения реактивных давлений, что и у нас (уменьшение давлений в центре и увеличение их у краев фундамента).

Аналогичный характер перераспределения давлений получен в работах зарубежных авторов ([20], стр. 1158—18 и [21], стр. 2195—26).

Наконец, во всех указанных случаях имело место увеличение изгибающих моментов (см. [20], стр. 1158—18, 20 и [21], стр. 2195—27). Этот факт легко усматривается также из эпюр реактивных давлений, приведенных в [9].

Заключая наше изложение следует констатировать, что учет ползучести основания при расчете фундаментных полос (а также балок) приводит к возрастанию расчетных усилий. Необходимо, однако, заметить, что при одновременном учете ползучести и самой полосы, полученная разница в усилиях будет уменьшена, но в малой степени, поскольку деформация ползучести полосы в отличие от соответствующей деформации основания имеет меньшее значение.

Одесский инженерно-строительный институт

Поступила 3 VII 1960

Ն. Ֆ. Կակոսիմիդի

ՀԻՄՔԱՅԻՆ ՇԵՐՏԻ ՀԱՇՎԱՐԿԸ ՀԻՄՆԱՏԱԿԻ ՍՈՂՔԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Ս.

Հողվածում գիտարկվում է առաձգական սողքային հիմնատակի վրա հիմքային շերտի հաշվարկը՝ ելնելով Գ. Ն. Մասլովի, Ն. Ս. Հարությունյանի սողքի առաձգական հիմնական նախադրյալներից:

Խնդրի բերված լուծման մեջ, ի տարբերություն դոկտրինային ունեցող ուրիշ աշխատությունների, օգտագործված է առաձգական կիսատարածություն մոդելը:

Պարզված է, որ հիմքային շերտերի հաշվարկման ժամանակ հիմնատակի սողքի հաշվառումը բերում է կոնսոլիդային ճնշմանի զգալի վերաբաշխմանը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Маслов Г. Н. Термонапряженное состояние в бетонных массивах с учетом ползучести бетона. «Известия НИИГ», 28, 1941.
2. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М.—Л., 1952.
3. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести. «ПММ», 23, вып. 5, 1959.
4. Прокопович И. Е. О решении плоской контактной задачи с учетом ползучести. «ПММ», 20, вып. 6, 1956.
5. Прокопович И. Е. О влиянии ползучести на распределение внутренних усилий в ортотропных оболочках. «Инженерный сборник АН СССР», 24, 1956.
6. Прокопович И. Е. Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояние некоторых сооружений. Диссертация на степень доктора техн. наук, защищенная в МИСИ им. В. В. Куйбышева, 1960.
7. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. Гостехиздат, М.—Л., 1949.

8. Розовский М. И. Полусимволический способ решения некоторых задач теории ползучести. Изв. АН АрмССР, физ.-мат., естественные и тех. науки*, 9, вып. 5, 1956.
9. Кийс И. А. К расчету железобетонных фундаментных балок с учетом ползучести бетона и основания. Изд. Таллинского политехнического института, Таллин, 1958.
10. Горбунов-Посадов М. И. Расчет конструкций на упругом основании. Госстройиздат, М., 1953.
11. Винокуров Л. П. Прямые методы решения пространственных и контактных задач для массивов и фундаментов. Изд. Харьковского университета. Харьков, 1956.
12. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Техническая теория расчета фундаментов на упругом основании. Сборник трудов МИСИ*, № 14, М., 1956.
13. Месчан С. Р. О ползучести связного грунта при сжатии в условиях невозможности бокового расширения. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук*, 11 вып. 4, 1958.
14. Месчан С. Р. К вопросу об описании ползучести связных грунтов нарушенной структуры. ДАН АрмССР*, 21, № 2, 1955.
15. Месчан С. Р. Деформации ползучести связных грунтов при сжатии (автореферат). Ленинградский политехнический институт, Л., 1956.
16. Флорин В. А. Одномерная задача уплотнения сжимаемой пористой ползучей среды. Изв. АН СССР, ОТН*, № 6, 1953.
17. Флорин В. А. Одномерная задача уплотнения земляной среды с учетом старения, нелинейной ползучести и разрушения структуры. Изв. АН СССР, ОТН*, № 9, 1953.
18. Флорин В. А. Теория уплотнения земляных масс. Стройиздат, М.—Л., 1948.
19. Денисов Н. Я. О природе деформации глинистых пород. Изд. Минречфлота, М., 1951.
20. Freudenthal A. M., Lorsch H. G. The Infinite Elastic Beam on a Linear Viscoelastic Foundation. Jour. of the Eng. Mech. Div., Proc. of the Amer. Soc. of Civil Eng., vol. 83, No. EM1, p. 1158, Jan. 1957.
21. Haskin B. C., Lee E. H. Flexible Surfaces on Viscoelastic Subgrades., Proc. of the Amer. Soc. of Civil Eng., vol. 85, No. EM4, p. 2195, Oct. 1959.