ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 6, 1960 Физико-математические науки

ФИЗИКА

И. И. Гольдман

К теории тормозного излучения с учетом многократного рассеяния и оценка точности метода Фоккер-Планка

В работах [1—3], посвященных теоретическому изучению тормозного излучения в крайне релятивистском случае в среде, интегро-дифференциальное уравнение для функции распределения электронов решается в приближении Фоккер-Планка. Как известно, это приближение состоит в разложении $w(\vec{v}') - w(\vec{v})$ под знаком интеграла в кинетическом уравнении

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{v}\,\frac{\partial w}{\partial \vec{r}} = n\int \sigma(\vec{v} - \vec{v}')\,[w(t, \vec{r}, \vec{v}') - w(t, \vec{r}, \vec{v})]\,d\vec{v}' \tag{1}$$

по степеням $\vec{v}' - \vec{v}$ в ряд Тейлора, причем удерживаются члены вплоть до квадратичных в $\vec{v}' - \vec{v}$. Получаемое в результате приближенное уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка относительно $\vec{v}$. Такой способ рассмотрения имеет, однако, тот недостаток, что в предельном случае среды малой плотности приводит к неправильному результату (отличающемуся приблизительно в два раза от формулы Бете-Гайтлера). Мигдалу [3] удалось остроумно преодолеть эту трудность и интерполируя в окончательном результате под знаком логарифма получить формулы имеющие логарифмическую точность.

В настоящей работе исследуется непосредственно интегральное уравнение (1) без перехода к приближению Фоккера-Планка. Задача после ряда преобразований сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка. Анализ этого уравнения подтверждает процедуру Мигдала; в то же время оказывается возможным несложное интегрирование, уточняющее результаты.

После перехода к приближению малых углов и выполнения преобразования Фурье по координатам, задача сводится к решению следующего уравнения (обозначения см. [4])

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{i\omega}{2}(\lambda^2 + \theta^2)\,u = nv\int \sigma[u' - u]\,d\vec{\theta}', \tag{2}$$

причем

$$u=\delta(\vec{\theta}-\vec{\theta}_0) \quad (t\to 0). \tag{3}$$

Тогда энергия, излучаемая в интервале частот $d\omega$ в единицу времени, выразится через u следующим образом

$$\dot{E}_\omega d\omega=\frac{e^2\omega^2}{2\pi^2 c}\, d\omega Re\int_0^\infty t d\int d\vec{\theta}_0 d\vec{\theta}\,\vec{\theta}\,\vec{\theta}_0 u(t,\vec{\theta}_0,\vec{\theta}). \tag{4}$$

Введем

$$\vec{u}=\int d\vec{\theta}_0\vec{\theta}_0 u, \tag{5}$$

подчиняющееся тому же уравнению (2), но с начальным условием

$$\vec{u}=\vec{\theta} \quad (t\to 0). \tag{6}$$

Положим далее

$$\int_0^\infty \vec{u}\,dt=\vec{\Phi}(\vec{\theta})+\frac{2}{i\omega}\frac{\vec{\theta}}{\lambda^2+\theta^2}. \tag{7}$$

Для Φ получим неоднородное интегральное уравнение

$$\frac{i\omega}{2}(\theta^2+\lambda^2)\vec{\Phi}=nv\int d\vec{\theta}'\sigma(\vec{\theta}'-\vec{\theta})[\vec{\Phi}'-\vec{\Phi}]+$$

$$+\frac{2nv}{i\omega}\int d\vec{\theta}'\sigma(\vec{\theta}'-\vec{\theta})\left[\frac{\vec{\theta}'}{\lambda^2+\theta'^2}-\frac{\vec{\theta}}{\lambda^2+\theta^2}\right]. \tag{8}$$

Произведем теперь двухмерное преобразование Фурье

$$\vec{\Phi}=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\vec{r}\psi(r)e^{-i\vec{r}\vec{\theta}}d\vec{r}, \tag{9}$$

$$\sigma=\frac{1}{(2\pi)^2}\int S(r)\,e^{-i\vec{r}\vec{\theta}}d\vec{r}, \tag{10}$$

$$\frac{2}{i\omega}\frac{\vec{\theta}}{\lambda^2+\theta^2}=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\vec{r}\psi_0(r)\,e^{-i\vec{r}\vec{\theta}}d\vec{r}. \tag{11}$$

Совершая обратное преобразование, найдем

$$\vec{r}\psi=\int\vec{\Phi}\,e^{i\vec{r}\vec{\theta}}d\vec{\theta}, \tag{12}$$

откуда, в частности, следует

$$\int d\vec{\theta}\,\vec{\Phi}\,\vec{\theta}=-2i\psi(0). \tag{13}$$

Для ψ получим уравнение

$$-\frac{i\omega}{2}(\Delta+\lambda^2)\vec{r}\psi=nv\,[S(r)-S(0)]\,\vec{r}\psi+nv\,[S(r)-S(0)]\,\vec{r}\psi_0. \tag{14}$$

Здесь Δ — двухмерный лапласиан по переменной $\vec{r}$.

Удобно теперь перейти к новой независимой переменной введя

$$\rho = \lambda r. \tag{15}$$

Положим также

$$\psi_0 = -\frac{4\pi\lambda^2}{i\omega}\varphi_0(\rho), \tag{16}$$

$$\psi = -\frac{4\pi\lambda^2}{i\omega}\varphi(\rho), \tag{17}$$

$$\frac{2nv}{\omega\lambda^2}[S(0) - S(r)] = \frac{1}{8s^2}V(\rho). \tag{18}$$

Уравнение для $\varphi(\rho)$ примет тогда следующий вид

$$\varphi'' + \frac{3}{\rho}\varphi' - \varphi + \frac{i}{8s^2}V(\rho)\varphi = -\frac{i}{8s^2}V(\rho)\varphi_0 = -4g. \tag{19}$$

Наконец, для $\chi = x\varphi$ $(x = \rho^2)$ получаем окончательно

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} - \frac{1}{4x}\left[1 - \frac{i}{8s^2}V\right]\chi = -g. \tag{20}$$

Преобразуем соответственно выражение для $\dot{E}_\omega$

$$\dot{E}_\omega = \frac{e^2\omega^2}{2\pi^2 c}Re\int\limits_0^\infty dt\int d\vec{\theta}\,\vec{\theta}\,\vec{u} = \frac{e^2\omega^2}{2\pi^2 c}Re\int d\vec{\theta}\,\vec{\Phi}\,\vec{\theta} =$$

$$= \frac{e^2\omega^2}{2\pi^2 c}Re[-2i\psi(0)] = \frac{4e^2\omega\lambda^2}{\pi c}Re\varphi(0). \tag{21}$$

Пусть теперь χ_1 и χ_2 два решения однородного уравнения (20), причем χ_1 убывает при $x \to \infty$, а χ_2 обращается в нуль при $x \to 0$, причем при малых значениях x

$$\chi_1 = 1, \quad \chi_2 = x.$$

Тогда решение неоднородного уравнения представится в виде

$$\chi = \chi_1(x)\int\limits_0^x \chi_2(\xi)g(\xi)\,d\xi + \chi_2(x)\int\limits_x^\infty \chi_1(\xi)g(\xi)\,d\xi. \tag{22}$$

Таким образом, при малых x имеем

$$\chi = x\int\limits_0^\infty \chi_1 g\,d\xi,$$

откуда

$$\varphi(0) = \int\limits_0^\infty \chi_1 g\,dx. \tag{23}$$

Задача определения $\dot{E}_\infty$ свелась к квадратуре, если известны χ_1 и g.

Перейдем к вычислению $V(x)$ и $g(x)$. Сечение рассеяния на атоме с учетом экранирования на малых углах можно принять в виде

$$\sigma_a(\theta) = \frac{A}{(a^2+\theta^2)^2}.$$

Тогда

$$S_a(r) = 2\pi \int_0^\infty \sigma_a(\theta) J_0(r\theta)\, \theta d\theta = 2\pi A \frac{r}{a} K_1(ar).$$

Чтобы учесть конечные размеры ядра мы положим, что сечение рассеяния

$$\sigma(\theta) = \sigma_a(\theta) - \sigma_b(\theta) \quad (b \gg a), \tag{24}$$

где b по порядку величины — угол дифракции на ядре. Эта формула хорошо описывает сечение рассеяния во всей существенной области углов и приводит к обрезанию как при $\theta \ll a$, так и при $\theta \gg b$. Тогда

$$S(r) = 2\pi A \left[\frac{r}{a} K_1(ar) - \frac{r}{b} K_1(br)\right]. \tag{25}$$

Пользуясь асимптотическим выражением для функции

$$K_1(z) = \frac{1}{z} - \frac{z}{2}\left[\ln\frac{2}{z} + \frac{\psi(1)+\psi(2)}{2}\right] \quad (\text{малые } z), \tag{26}$$

$$K_1(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z} \quad (\text{большие } z), \tag{27}$$

находим $S(r)$

$$S(r) = 2\pi A\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) - \pi A r^2 \ln\frac{b}{a} \quad \left(r \ll \frac{1}{b}\right),$$

$$S(r) = \frac{2\pi A}{a^2} - \pi A r^2\left[\ln\frac{2}{ra} + \frac{\psi(1)+\psi(2)}{2}\right] \quad \left(\frac{1}{b} \ll r \ll \frac{1}{a}\right).$$

$$S(\infty) = 0, \text{ т. к. при } r \gg \frac{1}{a} \quad S(r) = \frac{2\pi A}{a^2}\sqrt{\frac{\pi a r}{2}}\, e^{-ar}.$$

Заметим, что с таким $\sigma(\theta)$ имеем

$$\int \sigma(\vec{\theta})\, d\vec{\theta} = 2\pi A\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right), \tag{28}$$

$$\int \sigma(\vec{\theta})\, \theta^2\, d\vec{\theta} = 4\pi A \ln\frac{b}{a}. \tag{29}$$

Теперь нетрудно найти

$$V(\rho) = \frac{16 s^2 n v}{\omega \lambda^2}\left[S(0) - S\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)\right], \tag{30}$$

причем

$$s^2 = \frac{\lambda^4 \omega}{16 n v \pi A \ln \frac{b}{a}}.$$

Отсюда находим

при $\rho = \infty$

$$V(\infty) = \frac{16 s^2 n v}{\omega \lambda^2} 2\pi A \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right), \tag{31}$$

при малых $\rho \ll \frac{\lambda}{b}$

$$V(\rho) = \rho^2 \tag{32}$$

и, наконец, в области

$$\lambda/b \ll \rho \ll \lambda/a$$

$$V(\rho) = \rho^2 \frac{\ln 1{,}85 \lambda/\rho a}{\ln b/a} \quad (< \rho^2). \tag{33}$$

Наконец, найдем g. Для этого заметим, что из формулы Фурье — — обращения следует

$$\vec{r} \psi_0 = \frac{2}{i\omega} \int \frac{\vec{\theta} e^{i \vec{r} \vec{\theta}}}{\lambda^2 + \theta^2} d\vec{\theta}, \tag{34}$$

откуда

$$r^2 \psi_0 = \frac{4\pi}{\omega} \lambda r K_1(\lambda r) \tag{35}$$

т. е. при $\qquad r \ll \lambda^{-1} \qquad r^2 \psi_0(r) = 4\pi/\omega.$

Далее,

$$\varphi_0 = -\frac{i}{\rho} K_1(\rho) \tag{36}$$

и теперь находим

$$g(\rho) = \frac{1}{32 s^2} \frac{V(\rho)}{\rho} K_1(\rho). \tag{37}$$

Итак, мы свели задачу вычисления тормозного излучения в среде

$$\dot{E}_\omega = \frac{4 e^2 \omega \lambda^2}{\pi c} Re \int_0^\infty \chi_1(x) \, g(x) \, dx \tag{38}$$

к отысканию решения уравнения

$$\chi'' - \frac{1}{4x}\left[1 - \frac{i}{8 s^2} V\right] \chi = 0 \tag{39}$$

с последующей квадратурой. При этом

$$g(x) = \frac{1}{32 s^2} \frac{V}{\sqrt{x}} K_1(\sqrt{x}), \tag{40}$$

а функция V характеризуется следующим поведением

$$V/x = 1 \quad \text{при} \quad x \ll (\lambda/b)^2,$$

$$V/x = \frac{\ln 1{,}85\,\lambda/\sqrt{xa}}{\ln b/a} \qquad (\lambda/b)^2 \ll x \ll (\lambda/a)^2.$$

Рассмотрим прежде всего предельные случаи. Пусть параметр s велик — $s \gg 1$; тогда можно упростить уравнение (39) и найти χ_1 из

$$\chi'' - \frac{1}{4x}\chi = 0 \quad (\chi(0) = 1). \tag{41}$$

При этом оказывается

$$\chi_1 = \sqrt{x}\,K_1(\sqrt{x}). \tag{42}$$

Заметим теперь, что

$$\int_0^\infty K_1^2(\sqrt{x})\,x\,dx = \frac{2}{3}, \tag{44}$$

однако, под знаком интеграла (38) стоит медленно меняющаяся функция V/x, которую можно вынести из под знака интеграла в некоторой точке $x \sim 1$ (с логарифмической точностью). Итак, получим

$$\dot{E}_\omega = \frac{4e^2 n v}{3\lambda^2 c}\ln \lambda/a \tag{45}$$

—результат совпадающий с формулой Бете-Гайтлера.

Пусть теперь $s \ll 1$. Тогда χ_1 находим из уравнения

$$\chi'' + \frac{i}{32s^2}\frac{V}{x}\chi = 0. \tag{46}$$

Если выполнено более сильное условие $s \ll (\lambda/b)^2$, тогда $V/x = 1$ и

$$\chi_1 = \exp\left(-\frac{1-i}{8s}x\right), \tag{47}$$

откуда

$$\varphi(0) = \int_0^\infty \chi_1 g\,dx \simeq \frac{1+i}{8s}$$

и

$$\dot{E}_\omega = \frac{4e^2\omega\lambda^2}{\pi c\cdot 8s} = \frac{2e^2\sqrt{\omega q}}{\pi c}, \quad \left(s = \frac{\lambda^2}{4}\sqrt{\frac{\omega}{q}}\right). \tag{48}$$

В случае $(\lambda/b)^2 \lesssim s \ll 1$ необходимо рассматривать уравнение (46). Если ограничиться логарифмической точностью, надо вместо функции V/x подставить ее значение при существенном аргументе т. е. при $x \sim 8s$. При этом сохраняется формула (48), только в q надо вместо $\ln b/a$ подставить $\ln \lambda/\sqrt{sa}$. Это подтверждает процедуру интерполирования, примененную Мигдалом. Мы не будем останавливаться на уточнении полученных им формул. В случае необходимости это может быть сделано путем численного или приближенного аналитического решения уравнения (39).

Физический институт
АН Армянской ССР

Поступила 11 VII 1960

Ի. Ի. Գոլդման

ԱՐԳԵԼԱԿՄԱՆ ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ՄԱՍԻՆ՝ ՀԱՇՎԻ ԱՌՆԵԼՈՎ ԲԱԶՄԱԿԻ ՑՐՈՒՄԸ ԵՎ ՖՈԿԿԵՐ-ՊԼԱՆԿԻ ՄԵԹՈԴԻ ՃՇՏՈՒԹՅԱՆ ԳՆԱՀԱՏՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Քննարկվում է միջավայրում էլեկտրոնների բաշխման ֆունկցիայի համար ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումը, առանց անցման Ֆոկեր-Պլանկի մոտավորության։ Արգելակման ճառագայթման վերաբերյալ խնդիրը հաջողվում է հանգեցնել սովորական երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման։ Այդ հավասարման վերլուծությունը հաստատում է Միգդալի [3] արդյունքը, միաժամանակ ոչ բարդ ինտեգրումը ճշգրտում է նրա ստացած բանաձևերը։

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Мигдал А. Б.* Влияние многократного рассеяния на тормозное излучение при больших энергиях. „ДАН СССР“, 96, 49, 1954.
2. *Migdal A. B.* Bremsstrahlung and pair production in condensed media at high energies. „Phys. Rev.“ 103, 1811, 1956.
3. *Мигдал А. Б.* Тормозное излучение и образование пар при больших энергиях. „ЖЭТФ“, 32, 633, 1957.
4. *Гольдман И. И.* Тормозное излучение при входе в среду с учетом многократного рассеяния. „ЖЭТФ“, 39, 203, 1960.