ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 6, 1960 Физико-математические науки

ГИДРОМЕХАНИКА

А. Г. Багдоев

Проникание ударного давления в несжимаемую жидкость

Пусть в некоторой точке O границы несжимаемой жидкости, занимающей нижнюю полуплоскость, возникло некоторое давление, которое затем распространяется по границе с постоянным профилем за фронтом. Выберем ось Ox по невозмущенной поверхности полуплоскости, ось Oy направим вглубь ее. Выберем безразмерные координаты $\xi = \dfrac{x}{Vt}$, $\eta = \dfrac{y}{Vt}$, где t = время, V — постоянная скорость движения фронта давления p. Тогда на поверхности жидкости $\eta = \eta(\xi)$ имеем граничное условие

$$p = \begin{cases} p_1 & |\xi| < 1, \\ 0 & |\xi| > 1. \end{cases} \tag{1}$$

Поскольку безразмерный потенциал жидкости $\bar{\varphi} = \varphi / V^2 t$ удовлетворяет уравнению Лапласа, его можно записать в виде логарифмического потенциала

$$\bar{\varphi}(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi')\, d\xi' \ln \frac{1}{\sqrt{(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2}}, \tag{2}$$

здесь $\eta' = \eta'(\xi')$ — уравнение поверхности жидкой среды.

Используя (1), (2), интеграл Лагранжа и предельные значения для производных потенциала (2) [1], граничное условие на возмущенной поверхности можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi')\, d\xi' \ln \frac{1}{(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2} -$$

$$- \xi \left\{ \pi q(\xi) \frac{d\eta}{d\xi} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi')\, d\xi' \frac{1}{[(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2]} 2(\xi - \xi') \right\} -$$

$$- \eta \left\{ -\pi q(\xi) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi')\, d\xi' \frac{1}{[(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2]} 2(\eta - \eta') \right\} +$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\pi q(\xi)\frac{d\eta}{d\xi}-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}q(\xi')\,d\xi'\frac{1}{[(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2]}2(\xi-\xi')\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{-\pi q(\xi)-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}q(\xi')\,d\xi'\frac{1}{[(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2]}2(\eta-\eta')\right\}^2=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{p_1}{\rho V^2} & |\xi|<1,\\ 0 & |\xi|>1.\end{cases} \tag{3}$$

Для определения $\eta(\xi)$ используем условия движения поверхности

$$-\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\xi}\frac{\dfrac{d\eta}{d\xi}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{d\eta}{d\xi}\right)^2}}+\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\eta}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{d\eta}{d\xi}\right)^2}}=\frac{\eta-\xi\dfrac{d\eta}{d\xi}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{d\eta}{d\xi}\right)^2}}. \tag{4}$$

Уравнения (3) и (4) представляют систему для определения $q(\xi)$ и $\eta(\xi)$. Для решения этой системы интегродифференциальных уравнений ищем неизвестные функции в виде

$$\eta=\begin{cases}\sum\limits_0^\infty c_k|\xi|^k & |\xi|<1,\\ \sum\limits_0^\infty d_k|\xi|^{-k-1} & |\xi|>1,\end{cases}$$

$$q=\begin{cases}\sum\limits_0^\infty a_k|\xi|^k & |\xi|<1,\\ \dfrac{b_0'}{|\xi|}+\sum\limits_0^\infty\dfrac{b_k}{|\xi|^{k+2}} & |\xi|>1.\end{cases} \tag{5}$$

Из условия сходимости интегралов следует, что b_0' должно равняться нулю. Из четности $\eta(\xi)$ и $q(\xi)$ имеем $a_1=c_1=0$. Подставляя (5) в (3) и (4), разлагая эти уравнения в ряд Лорана относительно $|\xi|$ и приравнивая коэффициенты, имеем бесконечную систему нелинейных уравнений. В частности, для слагаемого с нулевой степенью $|\xi|$, приближенно имеем

$$a_0 2+a_2\frac{1}{9}2+a_0\left[-\ln(1+c_2^2)+2-2\frac{1}{c_2}\operatorname{arc\,tg}c_2\right]-$$

$$-a_2\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\ln(1+c_2^2)-\frac{2}{c_2^2}(c_2^2\frac{1}{3}-1+\frac{1}{c_2}\operatorname{arc\,tg}c_2\right]+$$

$$+c_0\pi a_0+c_0\left[-\frac{a_2}{c_2}+\frac{a_2}{c_2}\ln(1+c_2^2)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{c_0\pi a_0 + c_0\left[-\frac{a_2}{c_2}+\frac{a_2}{c_2}\ln\left(1+c_2^2\right)\right]\right\}^2=\frac{p_1}{\rho V^2}, \qquad (6)$$

$$a_2 2 + a_2\frac{1}{3}2 = 0,$$

$$\pi a_0 + \frac{a_2}{c_2} - \frac{a_2}{c_2}\ln\left(1+c_2^2\right) = c_0,$$

$$0 = d_0,$$

$$d_0 = c_0 + c_2.$$

Последнее уравнение (6) выражает непрерывность функции $\eta(\xi)$.

Решение (6) не представляет трудностей. Таким образом, можно приближенно найти уравнение поверхности и потенциал возмущенного движения. Бесконечную систему (3) и (4) нужно решать с применением счетно-электронных машин. Аналогично решается пространственная задача для давления в несжимаемой жидкости.

В случае, когда граничное условие задано в виде произвольной функции от ξ, решение проводится точно так же.

Для аналитического граничного условия можно рассматривать комплексный радиус вектор z точки поверхности как функцию лагранжевой координаты на поверхности s

$$\frac{z}{Vt} = z_1 = z_1(s_1) = z_1\left(\frac{s}{Vt}\right).$$

Теперь, с помощью уравнений движения и условия автомодельности, получим

$$s_1^2\frac{\partial}{\partial s}\left|z_s\right| = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}.$$

Итак, граничное условие для давления даст условие для $|z_s|$. Если аналитически продолжать функцию $s_1 = s_1(z_1)$ в область комплексных значений $w = w(z_1)$ и ввести функцию $\ln w'(z_1) = \ln|w'(z_1)| - i\alpha(z_1)$, где $\alpha(z_1)$ на поверхности представляет угол наклона касательной поверхности к оси Ox, легко найти угол $\alpha(z_1)$ и уравнение поверхности в виде ядра Шварца

$$\alpha(z_1) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{-\ln\left|z_{1s_1'}\right|ds_1'}{s_1'-s_1},$$

$$\xi = \int\cos\alpha(z_1)\,ds_1, \qquad \eta = \int\sin\alpha(z_1)\,ds_1.$$

Для аналитических степенных граничных значений $p(s_1)$ с большим показателем степени решение аппроксимирует истинное распределение давления.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 10 III 1960

Ա. Գ. Բագդոև

ՀԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔԻ ԹԱՓԱՆՑՈՒՄԸ ԱՆՍԵՂՄԵԼԻ ՀԵՂՈՒԿԻ ՄԵՋ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիցուք որևէ ճնշում տարածվում է անսեղմելի հեղուկով լցված կիսատարածության մակերեսով։ Ընդունելով շարժումը ավտոմոդելային, լոգարիթմական պոտենցիալի և շարքերի վերլուծման միջոցով որոշվում է հեղուկի գրգռված շարժումը։

Վերջում, Շվարցի կորիզի օգնությամբ ստացվում է խնդրի ճշգրիտ լուծումը անալիտիկ եզրային ճնշման համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гюнтер Н. М.* Теория потенциала. Гостехиздат, М., 1953.