

Ж. Н. Кешишян

Об аналитическом продолжении обобщенных факториальных рядов

Определение. Обобщенным факториальным рядом называется ряд

$$a_0 + a_1 \frac{z}{z + \alpha_1} + a_2 \frac{z^2}{(z + \alpha_1)(z + \alpha_2)} + \dots, \quad (1)$$

где a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) — комплексные числа, z — комплексная переменная, а числа α_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) удовлетворяют условиям

$$\left. \begin{aligned} 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \infty, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} < \infty. \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

В частности, когда все $\alpha_n = n$, то обобщенный факториальный ряд (1) совпадает с обыкновенным факториальным рядом

$$a_0 + \frac{a_1}{1+z} + \frac{a_2}{(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)} + \dots$$

Известно (см. [1]), что для каждого обобщенного факториального ряда существует вещественное число λ , которое называется абсциссой сходимости обобщенного факториального ряда, такое, что для $x = \operatorname{Re}(z) > \lambda$ ряд (1) сходится (не считая точки $z = -\alpha_n$), а для $x = \operatorname{Re}(z) < \lambda$ ряд (1) расходится. Причем возможно, что $\lambda = \infty$ и $\lambda = -\infty$.

Нахождение абсциссы сходимости λ ряда (1) связано со сходимостью числового ряда

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots \quad (2)$$

Известно, что если ряд (2) расходится, то $\lambda \geq 0$ и

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| \sum_{k=0}^n a_k \right|}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k}}, \quad (3)$$

а если ряд (2) сходится, то $\lambda \leq 0$ и

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k \right|}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k}}. \quad (4)$$

Ряд (1) в полуплоскости $x = \operatorname{Re}(z) \geq \lambda + \delta$, где δ — произвольное положительное число, сходится равномерно (вне окрестности точек $z = -\alpha_n$). Следовательно, в полуплоскости $x = \operatorname{Re}(z) > \lambda$ сумма ряда (1) $f(z)$ является голоморфной функцией (за исключением точек $z = -\alpha_n$). Вообще говоря, на прямой $x = \lambda$ функция $f(z)$ может не иметь особых точек (исключая точки $z = -\alpha_n$), следовательно, может быть аналитической в более широкой области, чем полуплоскость $x = \operatorname{Re}(z) > \lambda$.

В настоящей статье изучается вопрос об аналитическом продолжении обобщенных факториальных рядов.

В работе [2] Г. В. Бадалян, применяя несколько раз преобразование Абеля к введенным им обобщенным рядам Тейлора, получил средние суммирования нового вида, которые назвал обобщенными средними Чезаро.

В настоящей работе доказывается, что если аналогично применить преобразование Абеля относительно ряда (1) один или несколько раз, то получится ряд типа обобщенного факториального ряда, абсцисса сходимости которого не превосходит абсциссу сходимости λ ряда (1).

Настоящая статья состоит из двух параграфов. В § 1 доказывается несколько вспомогательных лемм. В § 2 доказываются две основные теоремы об аналитическом продолжении обобщенных факториальных рядов.

Назовем обобщенный интерполяционный ряд Ньютона

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right), \quad (5)$$

общий ряд Дирихле

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-z \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k}}, \quad (6)$$

и обобщенный факториальный ряд

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{\alpha_k}\right)} \quad (7)$$

ассоциированными.

В работе [1] доказано, что ряды (5), (6) и (7) имеют общую абсциссу сходимости, а в работе [3] доказано, что при выполнении условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{x \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k}}{\alpha_n^2}} < \infty, \quad (8)$$

где α — некоторое положительное число, на общей прямой сходимости $x = \lambda$ особенности функций $f(z)$, $g(z)$ и $\varphi(z)$ совпадают.

В конце настоящей работы применяются результаты § 2 относительно обобщенных интерполяционных рядов Ньютона и общих рядов Дирихле и получается теорема об аналитическом продолжении функций $f(z)$ и $g(z)$ за прямую сходимости $x = \lambda$.

§ 1. Вспомогательные леммы

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_n &= A_n^{(0)} = \sum_{k=0}^n \alpha_k \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ A_n^{(p)} &= \sum_{k=p-1}^n A_k^{(p-1)} \frac{\prod_{m=p}^{k+p-1} (\alpha_m - \alpha_{p-1})}{\prod_{m=p+1}^{k+p} (\alpha_m - \alpha_p)} \\ (p &= 1, 2, 3, \dots; \quad n = p-1, p, p+1, \dots), \\ R_n^{(p)}(z) &= A_n^{(p)} \frac{\prod_{k=p}^{n+p} (\alpha_k - \alpha_p)}{\prod_{k=p}^{n+p} (z + \alpha_k)} \\ (p &= 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Лемма 1. Если последовательность чисел $\{\alpha_n\}$ удовлетворяет условиям (A), то

$$\frac{\prod_{m=p}^{k+p-1} (\alpha_m - \alpha_{p-1})}{\prod_{m=p+1}^{k+p} (\alpha_m - \alpha_p)} < \frac{B_p}{\alpha_k} \exp \left[(\alpha_p - \alpha_{p-1}) \sum_{m=p}^{k+p} \frac{1}{\alpha_m} \right] \\ (p = 1, 2, 3, \dots; \quad k = p, p+1, p+2, \dots),$$

где B_p — конечная постоянная, зависящая только от p .

Доказательство. Так как по условию леммы $0 < \frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_m} < 1$ и

$0 < \frac{\alpha_p}{\alpha_m} < 1$ при $m > p$, то имеем

$$\frac{\prod_{m=p}^{k+p-1} (\alpha_m - \alpha_{p-1})}{\prod_{m=p+1}^{k+p} (\alpha_m - \alpha_p)} = \frac{\alpha_p - \alpha_{p-1}}{\alpha_{k+p} - \alpha_{p-1}} \exp \left[\sum_{m=p+1}^{k+p} \ln \frac{1 - \frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_m}}{1 - \frac{\alpha_p}{\alpha_m}} \right] =$$

$$= \frac{\alpha_p - \alpha_{p-1}}{\alpha_{k+p} - \alpha_{p-1}} \exp \left[(\alpha_p - \alpha_{p-1}) \sum_{m=p+1}^{k+p} \frac{1}{\alpha_m} \right] \times$$

$$\times \exp \left\{ \sum_{m=p+1}^{k+p} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{\alpha_p}{\alpha_m} \right)^n - \left(\frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_m} \right)^n \right] \right\}.$$

Легко видеть, что

$$\exp \left\{ \sum_{m=p+1}^{k+p} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{\alpha_p}{\alpha_m} \right)^n - \left(\frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_m} \right)^n \right] \right\} <$$

$$< \exp \left[\sum_{m=p+1}^{k+p} \left(\frac{1}{2} \frac{\alpha_p^2 \alpha_{p+1}}{\alpha_{p+1} - \alpha_p} \frac{1}{\alpha_m^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_{p+1}} \right)^2 \right) \right] <$$

$$< \exp \left[\frac{1}{2} \frac{\alpha_p^2 \alpha_{p+1}}{\alpha_{p+1} - \alpha_p} \sum_{m=p+1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_{p+1}} \right)^2 \right] = B_p',$$

где B_p' — конечная постоянная, зависящая только от p , потому что ряд

$$\sum_{m=p+1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m^2}$$

по условиям леммы сходится.

Следовательно,

$$\frac{\prod_{m=p}^{k+p-1} (\alpha_m - \alpha_{p-1})}{\prod_{m=p+1}^{k+p} (\alpha_m - \alpha_p)} < \frac{\alpha_p - \alpha_{p-1}}{\alpha_{k+p} - \alpha_{p-1}} B_p' \exp \left[(\alpha_p - \alpha_{p-1}) \sum_{m=p+1}^{k+p} \frac{1}{\alpha_m} \right] <$$

$$< \frac{B_p'}{\alpha_k} \exp \left[(\alpha_p - \alpha_{p-1}) \sum_{m=p}^{k+p} \frac{1}{\alpha_m} \right],$$

где

$$B_p = \alpha_p B_p' e^{-\frac{\alpha_p - \alpha_{p-1}}{\alpha_p}}$$

и зависит только от p .

Лемма 2. Если вещественное число λ определяется формулой (3), а последовательность чисел $\{\alpha_n\}$ удовлетворяет условиям (A), то для произвольного положительного числа ε существует натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$

$$|A_n^{(p)}| < M_p \exp \left[(\lambda + \alpha_p + \varepsilon) \sum_{k=p+1}^{n+p} \frac{1}{\alpha_k} \right] \left(\sum_{k=p}^n \frac{1}{\alpha_k} \right)^p$$

$$(p=0, 1, 2, \dots),$$

где M_p — конечная постоянная, зависящая только от p .

Доказательство. Докажем лемму методом математической индукции. По формуле (3) для произвольного положительного числа ε существует натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$|A_n| < \exp \left[(\lambda + \varepsilon) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k} \right], \quad \text{если } n > N. \quad (1.1)$$

Теперь оценим $A_n^{(1)}$. Учитывая (1.1) и лемму 1, когда $p=1$, получим

$$\begin{aligned} |A_n^{(1)}| &\leq |A_N^{(1)}| + \sum_{k=N+1}^n |A_k| \frac{\prod_{m=1}^k \alpha_m}{\prod_{m=2}^k (\alpha_m - \alpha_1)} < \\ &< |A_N^{(1)}| + B_1 \exp \left[(\lambda + \alpha_1 + \varepsilon) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\alpha_k} \right] \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k} = \\ &= \exp \left[(\lambda + \alpha_1 + \varepsilon) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\alpha_k} \right] \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k} \right) \times \\ &\times \left\{ B_1 + |A_N^{(1)}| \frac{\exp \left[-(\lambda + \alpha_1 + \varepsilon) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\alpha_k} \right]}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k}} \right\}. \end{aligned}$$

Так как по условиям леммы выражение

$$\frac{|A_N^{(1)}|}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k}} \exp \left[-(\lambda + \alpha_1 + \varepsilon) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\alpha_k} \right]$$

стремится к нулю, когда n стремится к бесконечности, то

$$|A_n^{(1)}| < M_1 \exp \left[(\lambda + \alpha_1 + \varepsilon) \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{\alpha_k} \right] \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k},$$

где M_1 — конечная постоянная.

Предположим, что лемма верна для $p-1$, и докажем, что она будет верна также для p .

Учитывая лемму 1 получим

$$\begin{aligned}
 |A_n^{(p)}| &\leq |A_N^{(p)}| + \sum_{k=N+1}^n |A_k^{(p-1)}| \frac{\prod_{m=p}^{k+n-1} (\alpha_m - \alpha_{p-1})}{\prod_{m=p+1}^{k+p} (\alpha_m - \alpha_p)} < \\
 &< |A_N^{(p)}| + M_{p-1} B_p \exp \left[(\lambda + \alpha_p + \varepsilon) \sum_{k=p}^{n+p} \frac{1}{\alpha_k} \right] \left(\sum_{k=p-1}^n \frac{1}{\alpha_k} \right)^p \leq \\
 &\leq M_p \exp \left[(\lambda + \alpha_p + \varepsilon) \sum_{k=p+1}^{n+p} \frac{1}{\alpha_k} \right] \left(\sum_{k=p}^n \frac{1}{\alpha_k} \right)^p,
 \end{aligned}$$

где M_p — конечная постоянная, зависящая только от p , потому что выражение

$$\frac{|A_N^{(p)}|}{\left(\sum_{k=p-1}^n \frac{1}{\alpha_k} \right)^p} \exp \left[-(\lambda + \alpha_p + \varepsilon) \sum_{k=p}^{n+p} \frac{1}{\alpha_k} \right]$$

стремится к нулю, когда n стремится к бесконечности.

Лемма доказана.

Лемма 3. Если последовательность чисел $\{\alpha_n\}$ удовлетворяет условиям (A), то для каждого z , отличного от $-\alpha_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$),

$$\left| \frac{\prod_{k=p+1}^{n+p} (\alpha_k - \alpha_p)}{\prod_{k=p}^{n+p} (z + \alpha_k)} \right| < C_p \exp \left[-(x + \alpha_p) \sum_{k=p}^{n+p} \frac{1}{\alpha_k} \right] |F_n(z)|,$$

где

$$F_n(z) = \frac{1}{\prod_{k=p}^{n+p} \left(1 + \frac{z}{\alpha_k} \right) e^{-\frac{z}{\alpha_k}}},$$

C_p — конечная постоянная, зависящая только от p , а $x = \operatorname{Re}(z)$.

Доказательство. Имеем

$$\frac{\prod_{k=p+1}^{n+p} (\alpha_k - \alpha_p)}{\prod_{k=p}^{n+p} (z + \alpha_k)} = \frac{1}{\alpha_p} \prod_{k=p+1}^{n+p} \left(1 - \frac{\alpha_p}{\alpha_k} \right) e^{-\frac{z}{\alpha_p} \sum_{k=p+1}^{n+p} \frac{1}{\alpha_k}} \cdot F_n(z).$$

Из условий (A) получим, что

$$\prod_{k=p+1}^{n+p} \left(1 - \frac{\alpha_p}{\alpha_k} \right) = \exp \left(-\alpha_p \sum_{k=p+1}^{n+p} \frac{1}{\alpha_k} \right) \exp \left[-\sum_{k=p+1}^{n+p} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\alpha_p}{\alpha_k} \right)^m \right] <$$

$$< \exp \left(-\alpha_p \sum_{k=p+1}^{n+p} \frac{1}{\alpha_k} \right) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_p}{\alpha_{p+1}} \right)^2 \right] = \alpha_p C_p \exp \left(-\alpha_p \sum_{k=p}^{n+p} \frac{1}{\alpha_k} \right),$$

где

$$C_p = \frac{1}{\alpha_p} \exp \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_p}{\alpha_{p+1}} \right)^2 \right] - \text{конечная постоянная.}$$

Следовательно,

$$\left| \frac{\prod_{k=p+1}^{n+p} (\alpha_k - \alpha_p)}{\prod_{k=p}^{n+p} (z + \alpha_p)} \right| < C_p \exp \left[- (x + \alpha_p) \sum_{k=p}^{n+p} \frac{1}{\alpha_k} \right] |F_n(z)|.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. Если последовательность чисел $\{\alpha_n\}$ удовлетворяет условиям (A), то на всяком конечном замкнутом множестве в полуплоскости $x = \operatorname{Re}(z) > \lambda$, которое не содержит окрестности точек $z = -\alpha_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), равномерно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(p)}(z) = 0 \quad (p = 0, 1, 2, \dots).$$

Доказательство. Пусть E — конечное замкнутое множество в полуплоскости $x = \operatorname{Re}(z) > \lambda$, которое не содержит окрестности точек $z = -\alpha_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Выберем положительное число ε настолько малым, чтобы $x = \operatorname{Re}(z) > \lambda + \varepsilon$ для всех точек множества E . Тогда из лемм (2) и (3) получим, что

$$|R_n^{(p)}(z)| < M_p C_p \exp \left[(\lambda + x + \varepsilon) \sum_{k=p}^{n+p} \frac{1}{\alpha_k} \right] \left(\sum_{k=p}^n \frac{1}{\alpha_k} \right)^p |F_n(z)|.$$

Из условий (A) следует, что $F(z) = \frac{1}{\prod_{k=p}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\alpha_k} \right) e^{\frac{z}{\alpha_p}}}$ — меро-

морфная функция, полюсы которой есть точки $z = -\alpha_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Следовательно, равномерно на множестве E

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z) = F(z)$$

и, кроме того, $F(z)$ на множестве E ограничена.

Поэтому на множестве E равномерно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(p)}(z) = 0.$$

Лемма доказана.

§ 2. Основные теоремы

Теперь докажем следующую основную теорему.

Теорема 1. Пусть обобщенный факториальный ряд

$$f(z) = a_0 \frac{1}{z} + a_1 \frac{\alpha_1}{z(z + \alpha_1)} + a_2 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{z(z + \alpha_1)(z + \alpha_2)} + \dots \quad (2.1)$$

имеет неотрицательную абсциссу сходимости λ .

Тогда

1. Ряд

$$g(z) = \sum_{n=p}^{\infty} \bar{A}_n^{(p)} \frac{\prod_{k=p+1}^{n+p+1} \alpha_k}{\prod_{k=p+1}^{n+p+1} (z + \alpha_k)}, \quad (2.2)$$

где

$$\bar{A}_n^{(p)} = A_n^{(p)} \frac{\prod_{k=p}^{n+p} (\alpha_k - \alpha_p)}{\prod_{k=p+2}^{n+p+1} \alpha_k}$$

имеет абсциссу сходимости λ_{p+1} , не превосходящую абсциссу сходимости λ ряда (2.1).

2. Всюду в полуплоскости $x = \operatorname{Re}(z) > \lambda$

$$f(z) = Q_p(z) + g(z), \quad (2.3)$$

где

$$Q_p(z) = A_0 \frac{1}{z + \alpha_2} + A_1^{(1)} \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{(z + \alpha_3)(z + \alpha_4)} + \dots + A_{p-1}^{(p-1)} \frac{\prod_{k=p+1}^{2p-1} (\alpha_k - \alpha_p)}{\prod_{k=p+1}^{2p} (z + \alpha_k)}. \quad (2.4)$$

Доказательство. Сперва докажем первую часть теоремы. Если ряд

$$\sum_{n=p}^{\infty} (-1)^n A_n^{(p)} \frac{\prod_{k=p}^{n+p} (\alpha_k - \alpha_p)}{\prod_{k=p+2}^{n+p+1} \alpha_k}, \quad (2.5)$$

сходится, то абсцисса сходимости λ_{p+1} ряда (2.2) неположительна. Следовательно, в этом случае первая часть теоремы доказана.

Теперь предположим, что ряд (2.5) расходится. Тогда по формуле (3)

$$\lambda_{p+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| \sum_{k=p}^n (-1)^k \bar{A}_k^{(p)} \right|}{\sum_{k=p}^n \frac{1}{\alpha_k}}.$$

Оценим числа $\bar{A}_n^{(p)}$. Учитывая лемму 2 и условия (A), получим

$$\begin{aligned} |\bar{A}_n^{(p)}| &= |A_n^{(p)}| \frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_{n+p+1}} \exp \left(-\alpha_p \sum_{m=p+1}^{n+p} \frac{1}{\alpha_m} \right) \exp \left[-\sum_{m=p+1}^{n+p} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{\alpha_p}{\alpha_m} \right)^j \right] < \\ &< |A_n^{(p)}| \frac{\alpha_{p+1} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_p}{\alpha_{p+1}} \right)^2 \right]}{\alpha_n} \exp \left(-\alpha_p \sum_{m=p+1}^{n+p} \frac{1}{\alpha_m} \right) < \\ &< \frac{G_p \exp \left[(\lambda + \varepsilon) \sum_{k=p}^{n+p} \frac{1}{\alpha_k} \right] \left(\sum_{k=p}^n \frac{1}{\alpha_k} \right)^p, \end{aligned}$$

где ε — произвольное положительное число, а $n > N(\varepsilon)$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=p}^n (-1)^k \bar{A}_k^{(p)} \right| &\leq \left| \sum_{k=p}^N (-1)^k \bar{A}_k^{(p)} \right| + \sum_{k=N+1}^n |\bar{A}_k^{(p)}| < \\ &< \left| \sum_{k=p}^N (-1)^k \bar{A}_k^{(p)} \right| + G_p \exp \left[(\lambda + \varepsilon) \sum_{k=p}^{n+p} \frac{1}{\alpha_k} \right] \left(\sum_{k=p}^n \frac{1}{\alpha_k} \right)^{p+1}, \quad \text{если } n > N. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\ln \left| \sum_{k=p}^n (-1)^k \bar{A}_k^{(p)} \right|}{\sum_{k=p}^n \frac{1}{\alpha_k}} &< (\lambda + \varepsilon) \frac{\sum_{k=p}^{n+p} \frac{1}{\alpha_k}}{\sum_{k=p}^n \frac{1}{\alpha_k}} + (p+1) \frac{\ln \sum_{k=p}^n \frac{1}{\alpha_k}}{\sum_{k=p}^n \frac{1}{\alpha_k}} + \\ &+ \frac{\ln \left\{ G_p + \left| \sum_{k=p}^N (-1)^k \bar{A}_k^{(p)} \right| \left(\sum_{k=p}^n \frac{1}{\alpha_k} \right)^{-p-1} \exp \left[-(\lambda + \varepsilon) \sum_{k=p}^{n+p} \frac{1}{\alpha_k} \right] \right\}}{\sum_{k=p}^n \frac{1}{\alpha_k}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lambda_{p+1} \leq \lambda + \varepsilon.$$

Так как ε произвольное число, то $\lambda_{p+1} \leq \lambda$. Первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части теоремы применим $p+1$ раз преобразование Абеля относительно ряда (2.1).

Как мы знаем, преобразование Абеля относительно ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$$

имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n = \sum_{n=0}^{\infty} U_n v_n + \lim_{n \rightarrow \infty} U_n v_n,$$

где

$$U_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Принимая в ряде (2.1)

$$u_n = a_n, \quad v_n = \frac{\prod_{k=1}^n \alpha_k}{\prod_{k=0}^n (z + \alpha_k)},$$

получим

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\prod_{k=1}^n \alpha_k}{\prod_{k=1}^{n+1} (z + \alpha_k)} + \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \frac{\prod_{k=1}^n \alpha_k}{\prod_{k=0}^n (z + \alpha_k)}.$$

По лемме 4 последний предел равен нулю для всех z , $\operatorname{Re}(z) > \lambda$. Следовательно, для таких z

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\prod_{k=1}^n \alpha_k}{\prod_{k=1}^{n+1} (z + \alpha_k)}. \quad (2.6)$$

Преобразуем ряд (2.6) следующим образом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\prod_{k=1}^n \alpha_k}{\prod_{k=2}^{n+1} (\alpha_k - \alpha_1)} \cdot \frac{\prod_{k=2}^{n+1} (\alpha_k - \alpha_1)}{\prod_{k=1}^{n+1} (z + \alpha_k)}.$$

Теперь применим преобразование Абеля относительно последнего ряда, принимая

$$u_n = A_n \frac{\prod_{k=1}^n \alpha_k}{\prod_{k=2}^{n+1} (\alpha_k - \alpha_1)}, \quad v_n = \frac{\prod_{k=2}^{n+1} (\alpha_k - \alpha_1)}{\prod_{k=1}^{n+1} (z + \alpha_k)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Тогда получим

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} \frac{\prod_{k=2}^{n+1} (z_k - \alpha_1)}{z + \alpha_2} + \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{(1)} \frac{\prod_{k=2}^{n+1} (z_k - \alpha_1)}{\prod_{k=1}^{n+1} (z + \alpha_k)}.$$

Предел в последнем выражении по лемме 4 равен нулю для всех z , $\operatorname{Re}(z) > \lambda$. Следовательно, для таких z

$$f(z) = A_0 \frac{1}{z + \alpha_2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \frac{\prod_{k=2}^{n+1} (z_k - \alpha_1)}{\prod_{k=2}^{n+1} (z + \alpha_k)}. \quad (2.7)$$

Напишем ряд (2.7) в следующем виде

$$f(z) = A_0 \frac{1}{z + \alpha_2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \frac{\prod_{k=2}^{n+1} (z_k - \alpha_1)}{\prod_{k=3}^{n+1} (z_k - \alpha_2)} \cdot \frac{\prod_{k=3}^{n+1} (z_k - \alpha_2)}{\prod_{k=2}^{n+1} (z + \alpha_k)}.$$

Применим преобразование Абеля относительно этого ряда, принимая

$$u_n = A_n^{(1)} \frac{\prod_{k=2}^{n+1} (z_k - \alpha_1)}{\prod_{k=3}^{n+1} (z_k - \alpha_2)}, \quad v_n = \frac{\prod_{k=3}^{n+1} (z_k - \alpha_2)}{\prod_{k=2}^{n+1} (z + \alpha_k)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Получим

$$f(z) = A_0 \frac{1}{z + \alpha_2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(2)} \frac{\prod_{k=2}^{n+1} (z_k - \alpha_2)}{\prod_{k=3}^{n+1} (z + \alpha_k)} + \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{(2)} \frac{\prod_{k=2}^{n+1} (z_k - \alpha_2)}{\prod_{k=2}^{n+1} (z + \alpha_k)}.$$

По лемме 4 предел в последнем выражении равен нулю для всех z , $\operatorname{Re}(z) > \lambda$. Следовательно, для таких z

$$f(z) = A_0 \frac{1}{z + \alpha_2} + A_1^{(1)} \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{(z + \alpha_3)(z + \alpha_4)} + \sum_{n=2}^{\infty} A_n^{(2)} \frac{\prod_{k=3}^{n+1} (z_k - \alpha_2)}{\prod_{k=3}^{n+1} (z + \alpha_k)}. \quad (2.8)$$

Применяя преобразование Абеля $p+1$ раз относительно ряда (2.1) и каждый раз учитывая лемму 4, получим в полуплоскости $\operatorname{Re}(z) > \lambda$

$$f(z) = Q_p(z) + \sum_{n=p}^{\infty} A_n^{(p)} \frac{\prod_{k=p}^{n+p} (\alpha_k - \alpha_p)}{\prod_{k=p+1}^{n+p+1} (z + \alpha_k)}. \quad (2.9)$$

Но последний ряд можно преобразовать следующим образом

$$\sum_{n=p}^{\infty} A_n^{(p)} \frac{\prod_{k=p}^{n+p} (\alpha_k - \alpha_p)}{\prod_{k=p+1}^{n+p+1} (z + \alpha_k)} = \sum_{n=p}^{\infty} \tilde{A}_n^{(p)} \frac{\prod_{k=p+1}^{n+p+1} \alpha_k}{\prod_{k=p+1}^{n+p+1} (z + \alpha_k)} = g(z).$$

Теорема доказана.

Если ряд (2.1) имеет неположительную абсциссу сходимости, то получается следующая основная теорема.

Теорема 2. Пусть обобщенный факториальный ряд

$$f(z) = a_0 \frac{1}{z} + a_1 \frac{\alpha_1}{z(z + \alpha_1)} + a_2 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{z(z + \alpha_1)(z + \alpha_2)} + \dots \quad (2.1)$$

имеет неположительную абсциссу сходимости λ .

Тогда

1. Ряд

$$g(z) = \sum_{n=p}^{\infty} \tilde{A}_n^{(p)} \frac{\prod_{k=p+1}^{n+p+1} (\alpha_k + \lambda - \delta)}{\prod_{k=p+1}^{n+p+1} (z + \alpha_k)}, \quad (2.10)$$

где

$$\tilde{A}_n^{(p)} = \hat{A}_n^{(p)} \frac{\prod_{k=p}^{n+p} (\alpha_k - \alpha_p)}{\prod_{k=p+1}^{n+p+1} (\alpha_k + \lambda - \delta)}, \quad \hat{A}_n^{(p)} = \sum_{k=p-1}^n \hat{A}_k^{(p-1)} \frac{\prod_{m=p}^{k+p-1} (\alpha_k - \alpha_{p-1})}{\prod_{m=p+1}^{k+p} (\alpha_k - \alpha_p)},$$

$$\hat{A}_n^{(0)} = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{\lambda - \delta} \prod_{m=1}^k \frac{\alpha_m}{\alpha_m + \lambda - \delta},$$

а δ — произвольное положительное число, имеет абсциссу сходимости λ_{p+1} , не превосходящую абсциссу сходимости λ ряда (2.1).

2. В полуплоскости $x = \operatorname{Re}(z) > \lambda$

$$f(z) = Q_p^*(z) + g(z),$$

где

$$Q_p^*(z) = \hat{A}_0^{(0)} \frac{1}{z + \alpha_2} + \hat{A}_1^{(1)} \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{(z + \alpha_3)(z + \alpha_4)} + \dots + \hat{A}_{p-1}^{(p-1)} \frac{\prod_{k=p+1}^{2p-1} (\alpha_k - \alpha_p)}{\prod_{k=p+1}^{2p} (z + \alpha_k)}$$

Доказательство. Обозначим $z = w + \lambda - \delta$. Тогда ряд (2.1) преобразуется в следующий ряд

$$\begin{aligned} h(w) = f(w + \lambda - \delta) &= \frac{a_0}{\lambda - \delta} \frac{\lambda - \delta}{w + \lambda - \delta} + a_1 \frac{\alpha_1}{(\lambda - \delta)(\alpha_1 + \lambda - \delta)} \times \\ &\times \frac{(\lambda - \delta)(\alpha_1 + \lambda - \delta)}{(w + \lambda - \delta)(w + \alpha_1 + \lambda - \delta)} + a_2 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\lambda - \delta)(\alpha_1 + \lambda - \delta)(\alpha_2 + \lambda - \delta)} \times \\ &\times \frac{(\lambda - \delta)(\alpha_1 + \lambda - \delta)(\alpha_2 + \lambda - \delta)}{(w + \lambda - \delta)(w + \alpha_1 + \lambda - \delta)(w + \alpha_2 + \lambda - \delta)} + \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

Легко видеть, что абсцисса сходимости λ' ряда (2.11) равна $\lambda' = \delta > 0$. Следовательно, по первой теореме ряд

$$\psi(w) = \sum_{n=p}^{\infty} \tilde{A}_n^{(p)} \frac{\prod_{k=p+2}^{n+p+1} (\alpha_k + \lambda - \delta)}{\prod_{k=p+1}^{n+p+1} (w + \alpha_k + \lambda - \delta)}$$

имеет абсциссу сходимости λ_{p+1}' , не превосходящую абсциссу сходимости δ ряда (2.11), и в полуплоскости $\operatorname{Re}(w) > \delta$

$$h(w) = \tilde{Q}_p(w) + \psi(w),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_p(w) &= \hat{A}_0^{(0)} \frac{1}{w + \lambda - \delta} + \hat{A}_1^{(1)} \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{(w + \alpha_3 + \lambda - \delta)(w + \alpha_4 + \lambda - \delta)} + \dots + \\ &+ \hat{A}_{p-1}^{(p-1)} \frac{\prod_{k=p+1}^{2p-1} (\alpha_k - \alpha_p)}{\prod_{k=p+1}^{2p} (w + \alpha_k + \lambda - \delta)}. \end{aligned}$$

Следовательно, ряд

$$g(z) = \psi(z - \lambda + \delta) = \sum_{n=p}^{\infty} \tilde{A}_n^{(p)} \frac{\prod_{k=p+2}^{n+p+1} (\alpha_k + \lambda - \delta)}{\prod_{k=p+1}^{n+p+1} (z + \alpha_k)}$$

имеет абсциссу сходимости λ_{p+1}' , не превосходящую абсциссу сходимости

мости λ ряда (2.1) (так как $\lambda'_{p+1} = \lambda_{p+1} + \lambda - \delta \leq \lambda$), и в полуплоскости $\operatorname{Re}(z) > \lambda$.

$$f(z) = Q_p^*(z) + g(z).$$

Теорема доказана.

Одно применение основных теорем. В § 2 мы доказали, что посредством преобразования Абеля возможно получить аналитическое продолжение обобщенных факториальных рядов.

В начале настоящей работы мы заметили, что Г. В. Бадалян было доказано, что при условии (8) на общей прямой сходимости $x = \lambda$ особенности функций (5), (6) и (7) совпадают. Но легко доказать, что для совпадения особенностей функций (5), (6) и (7) на общей прямой $x = \lambda$ достаточно только условия (A). Следовательно, когда выполняются условия (A), ассоциированные ряды (5), (6) и (7) имеют общую абсциссу сходимости λ , и на общей прямой сходимости $x = \lambda$ особые точки функций $f(z)$, $g(z)$ и $\varphi(z)$ совпадают.

Сопоставляя этот факт с результатом, сформулированным в начале замечания, можно доказать следующую теорему:

Теорема. Если

$$\lambda_{p+1} < \lambda \quad \text{или} \quad \lambda'_{p+1} < \lambda,$$

то функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитически продолжают за прямую сходимости $x = \lambda$.

В заключение выражаю благодарность Г. В. Бадалян за постановку задачи и оказанную помощь при выполнении настоящей работы.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 24 III 1960

Ժ. Ն. Քեշիշյան

ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՐԱԾ ՖԱԿՏՈՐԻԱԼ ՇԱՐՔԵՐԻ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՇԱՐՈՒՆԱԿՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոգիածում ուսումնասիրվում է ընդհանրացրած ֆակտորիալ շարքերի անալիտիկ շարունակման հարցը:

Ապացուցվում է, որ ընդհանրացրած ֆակտորիալ շարքի նկատմամբ մեկ կամ մի քանի անգամ կիրառելով Աբելի ձևափոխությունը, կոտանանք ընդհանրացրած ֆակտորիալ շարք, որի զուգամիտությունը արացիսը չի գերազանցում տրված ընդհանրացրած ֆակտորիալ շարքի զուգամիտության արացիսին:

Ստացված արդյունքները հոգիածի վերջում կիրառվում են Նյուտոնի ընդհանրացրած ինտերպոլացիոն շարքերի ու Դիրիխլեի ընդհանուր շարքերի նկատմամբ և ստացվում է թեորեմա՝ այդ շարքերի անալիտիկ շարունակման մասին:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бадалян Г. В. Обобщенные факториальные ряды. „Сообщение Института мат. и мех. АН АрмССР“, вып. 5, 1950.
2. Бадалян Г. В. Некоторые граничные свойства обобщенного ряда Тейлора. „Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук“, № 2, 1958.
3. Бадалян Г. В. Обобщение ряда Тейлора и некоторые вопросы аналитических и квази-аналитических функций. „Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук“, № 1, 1953.

