

Ю. М. Айвазян

Уравнения движения заряженных тел в общей теории относительности

Как известно, в общей теории относительности уравнения движения не нужно добавлять к уравнениям поля, т. к. они уже содержатся в них. Однако, их получение из уравнений поля оказалось очень трудной задачей, которая впервые была решена в 1927 г. Эйнштейном и Громмером [1] для одной частицы с исчезающе малой массой. Задача двух тел оказалась значительно труднее и была решена Эйнштейном, Инфельдом и Гоффманом [2]. Независимо от них, уравнения движения для двух тел в ньютоновом приближении были получены Фоком [3]. Уравнения движения в посленьютоновом приближении, на основании работы Фока, были получены Петровой [4] и Папапетру [5].

Сравнительно недавно Инфельдом [6] было показано, что уравнения движения могут быть сравнительно просто получены из уравнений поля, если предположить, что тензор энергии-импульса пропорционален обобщенным δ -функциям.

Целью настоящей работы было обобщение метода Инфельда на случай заряженных тел. В работе получены уравнения движения ньютонова порядка для двух заряженных тел.

1. Уравнения гравитационного поля в нашем случае, т. е. при наличии заряженных тел и внешних электромагнитных полей, имеют следующий вид:

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R = -8\pi (T_{\text{мех.}}^{\alpha\beta} + T_{\text{эл. м.}}^{\alpha\beta}). \quad (1)$$

Здесь, как и ниже, буквы, напечатанные жирным шрифтом, обозначают тензорную плотность. Кроме того, принята система единиц $\kappa=1$, $c=1$ (κ — гравитационная постоянная).

Как видно из (1), правая часть уравнений содержит тензор энергии-импульса электромагнитного поля, которое создается зарядами тел и внешними электромагнитными полями.

Для простоты, с самого начала считаем, что у нас имеются только два заряженных тела и нет внешних электромагнитных полей (обобщение на случай многих тел не представляет труда, а в ньютоновом приближении попросту тривиально).

Пусть эти тела движутся по мировым линиям, координаты которых обозначим через $\dot{\xi}^{\alpha}(t)$ и $\eta^{\alpha}(t)$. Теперь, вслед за Инфельдом, предположим, что $T_{\text{мех.}}^{\alpha\beta}$ имеет δ -образные особенности, т. е. что

$$T_{\text{мех.}}^{\alpha\beta} = {}^1 t^{\alpha\beta} \delta + {}^2 t^{\alpha\beta} \delta, \quad (2)$$

где индексы слева сверху обозначают номера тел. Следует отметить, что стоящие здесь δ -функции не являются обычными δ -функциями Дирака. Помимо обычных свойств δ -функций они обладают еще дополнительным свойством

$$\int \frac{1}{r^k} \delta(x^{\alpha} - \dot{\xi}^{\alpha}) d^3x = 0, \quad r^2 = (x^{\alpha} - \dot{\xi}^{\alpha})(x^{\alpha} - \dot{\xi}^{\alpha}),$$

где k — целое число, а интегрирование производится по всему трехмерному объему (под повторными греческими индексами подразумевается суммирование от 0 до 3, а под латинскими — от 1 до 3).

Как было показано Тулзуевым [7], выбор $T_{\text{мех.}}^{\alpha\beta}$ в виде (2) однозначно определяет вид $t^{\alpha\beta}$. Можно показать, что теорема Тулзуева останется справедливой и при наличии электромагнитного поля, так что и в нашем случае мы будем иметь

$$t^{\alpha\beta} = \mu \dot{\xi}^{\alpha} \dot{\xi}^{\beta} = m \dot{\xi}^{\alpha} \dot{\xi}^{\beta}, \quad (3)$$

где

$$\dot{\xi}^{\alpha} = \frac{d\dot{\xi}^{\alpha}}{ds}, \quad \dot{\xi}^{\alpha} = \frac{d\dot{\xi}^{\alpha}}{dt},$$

а связь между μ и m дается уравнением

$$\frac{m}{\mu} = \frac{dt}{ds}, \quad (4)$$

где $ds = (g_{\alpha\beta} d\dot{\xi}^{\alpha} d\dot{\xi}^{\beta})^{1/2}$. Здесь и ниже черта над выражением означает, что оно взято на мировой линии и выкинуты сингулярности. Мы покажем ниже, что $\mu = \text{const}$. Основываясь на этом и принимая во внимание соображения размерности, назовем μ массой покоя.

Таким образом,

$$T_{\text{мех.}}^{\alpha\beta} = {}^1 \mu \dot{\xi}^{\alpha} \dot{\xi}^{\beta} \delta(x^{\alpha} - \dot{\xi}^{\alpha}) + {}^2 \mu \dot{\eta}^{\alpha} \dot{\eta}^{\beta} \delta(x^{\alpha} - \dot{\eta}^{\alpha}). \quad (5)$$

2. Как известно, десять дифференциальных уравнений второго порядка определяют десять неизвестных величин $g_{\alpha\beta}$, которые определяют поле. Однако эти десять уравнений удовлетворяют также и четырем тождествам, называемым свернутыми тождествами Бьянки

$$\left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R \right)_{;\beta} = 0. \quad (6)$$

Эти тождества как бы переопределяют систему уравнений поля. В этом-то, в основном, и заключается причина того, что уравнения движения содержатся в уравнениях поля.

Из свернутых тождеств Бьянки следует, что должно тождественно выполняться соотношение

$$(T_{\text{мех.}}^{\alpha\beta} + T_{\text{эл. м.}}^{\alpha\beta})_{;\beta} = 0. \quad (7)$$

Следующие соотношения, записанные в общековариантном виде и вытекающие непосредственно из свернутых тождеств Бьянки, мы назовем уравнениями движения для первого тела

$$\frac{dt}{ds} \int (T_{\text{мех.}}^{\alpha\beta} + T_{\text{эл. м.}}^{\alpha\beta})_{;\beta} d^3x = 0. \quad (8)$$

Здесь интегрирование производится по всему трехмерному пространству по координатам первого тела.

Можно легко показать, что для тензора энергии-импульса электромагнитного поля, определяемого выражением

$$T_{\text{эл. м.}}^{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{-g}}{4\pi} \left(F^{\alpha}_{\gamma} F^{\beta\gamma} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F^{\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \right), \quad (9)$$

в силу уравнений Максвелла, записанных в общековариантной форме

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\sqrt{-g} F^{\alpha\beta}) = F^{\beta\alpha}_{;\alpha} = 4\pi j^{\beta}, \quad (10)$$

$$F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\gamma\alpha;\beta} + F_{\beta\gamma;\alpha} = 0, \quad (11)$$

где

$$j^{\beta} = \frac{\rho}{\sqrt{-g}} \frac{dx^{\beta}}{dt}, \quad (12)$$

следует, что

$$T_{\text{эл. м.}}^{\alpha\beta}_{;\beta} = -F^{\alpha}_{\beta} j^{\beta} \sqrt{-g}. \quad (13)$$

Следовательно, уравнения движения для первого тела можно переписать в виде

$$\frac{dt}{ds} \int [(F^{\alpha\beta}_{;\beta})_{;\alpha} - F^{\alpha}_{\beta} j^{\beta} \sqrt{-g}] d^3x. \quad (14)$$

Так как

$$(F^{\alpha\beta}_{;\beta})_{;\alpha} = (F^{\alpha\beta}_{;\alpha})_{;\beta} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} F^{\mu\nu}_{;\alpha}, \quad (15)$$

и

$$(F^{\alpha\beta}_{;\alpha})_{;\beta} = (m \xi^{\alpha} \xi^{\beta}_{;\alpha})_{;\beta} + (m \xi^{\alpha}_{;\beta} \xi^{\beta})_{;\alpha}, \quad (16)$$

то легко показать, что

$$\frac{dt}{ds} \int (F^{\alpha\beta}_{;\beta})_{;\alpha} d^3x = (\xi^{\alpha}_{;\alpha})'. \quad (17)$$

Примем теперь, что

$$\rho = e \delta(x^i - \xi^i). \quad (18)$$

Тогда, учитывая все последние соотношения, мы получим уравнения движения для первого тела

$${}^1\mu' \xi^{\alpha'} + {}^1\mu \xi^{\alpha''} + {}^1\mu \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \xi^{\mu'} \xi^{\nu'} - {}^1e \bar{F}^{\alpha}_{\beta} \xi^{\beta'} = 0. \quad (19)$$

Напомним здесь, что

$$\bar{A} = \int A \delta(x^s - \xi^s) d^3x.$$

Теперь, с помощью (19) можно показать, что $\mu = \text{const.}$ Действительно, умножим (19) на $\overline{g_{\alpha\tau}} \xi^{\tau'}$ и просуммируем по α . Получим

$${}^1\mu' \overline{g_{\alpha\tau}} \xi^{\alpha'} \xi^{\tau'} + {}^1\mu \overline{g_{\alpha\tau}} \xi^{\alpha''} \xi^{\tau'} + {}^1\mu \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \overline{g_{\alpha\tau}} \xi^{\mu'} \xi^{\nu'} \xi^{\tau'} - {}^1e \bar{F}^{\alpha}_{\beta} \overline{g_{\alpha\tau}} \xi^{\beta'} \xi^{\tau'} = 0. \quad (20)$$

Примем здесь пока, что для $\overline{g_{\alpha\tau}}$ и $\bar{F}^{\alpha}_{\beta}$ выполняются соотношения

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \overline{g_{\alpha\tau}} = [\mu\nu, \tau] \quad (21)$$

и

$$\bar{F}^{\alpha}_{\beta} \overline{g_{\alpha\tau}} = \bar{F}_{\beta\tau}. \quad (22)$$

Как было показано Инфельдом, соотношение

$$\overline{AB} = \overline{AB}$$

выполняется, если величины A и B не имеют на мировой линии особенностей четного порядка, т. е., например, если для величины справедливо вблизи мировой линии разложение

$$A = \frac{-3A}{\rho^3} + \frac{-1A}{\rho} + \bar{A} + \bar{A}_{,s} (x^s - \xi^s) + \dots,$$

где $\rho^2 = (x^s - \xi^s)(x^s - \xi^s)$.

Очевидно, что выполнение этого условия нужно будет каждый раз проверять.

Считая, что (21) и (22) выполняются, перепишем (20) в виде

$${}^1\mu' \overline{g_{\alpha\tau}} \xi^{\alpha'} \xi^{\tau'} + {}^1\mu \overline{g_{\alpha\tau}} \xi^{\alpha''} \xi^{\tau'} + {}^1\mu [\mu\nu, \tau] \xi^{\mu'} \xi^{\nu'} \xi^{\tau'} - {}^1e \bar{F}_{\beta\tau} \xi^{\beta'} \xi^{\tau'} = 0. \quad (20a)$$

Принимая во внимание выражения

$$g_{\mu\nu, \tau} = [\mu\rho, \nu] + [\nu\rho, \mu] \quad (23)$$

и

$$\varphi_{,0} = \bar{\varphi}_{,s} \xi^s, \quad (24)$$

а также то, что последний член в (20a) равен нулю (так как там стоит произведение симметричного тензора на антисимметричный), из (20a) получим

$$\mu' + \frac{\mu}{2} \frac{d}{ds} (\overline{g_{\alpha\beta}} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta) = 0. \quad (25)$$

Из последнего соотношения видно, что $\mu = \text{const.}$

Следовательно, уравнения движения несколько упрощаются и принимают вид

$${}^1\mu \dot{\xi}^\alpha + {}^1\mu \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \dot{\xi}^\mu \dot{\xi}^\nu - {}^1e \overline{F^\alpha_\beta} \dot{\xi}^\beta = 0. \quad (26)$$

Легко проверить, что эти уравнения можно получить из вариационного принципа

$$\delta \int [\int (-{}^1\mu ds + {}^1e A_\alpha dx^\alpha) \delta (x^\alpha - \xi^\alpha) d^3x] = 0, \quad (27)$$

где A_α — потенциалы электромагнитного поля. Очевидно, что результат такого варьирования при $\mu \rightarrow 0$ и $e = 0$ дает нам геодезическую линию, которая отличается от геодезической линии в общей теории относительности тем, что вместо x^α в ней стоят ξ^α .

Нас, однако, интересует лишь пространственная часть уравнений (26). Временная компонента этих уравнений есть

$${}^1\dot{m} + {}^1m \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \dot{\xi}^\mu \dot{\xi}^\nu - {}^1e \overline{F^0_\beta} \dot{\xi}^\beta = 0. \quad (28)$$

Учитывая это, находим, что пространственная часть уравнений (26) имеет вид

$${}^1m \dot{\xi}^k + {}^1e \overline{F^0_\beta} \dot{\xi}^\beta \dot{\xi}^k - {}^1m \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \dot{\xi}^\mu \dot{\xi}^\nu \dot{\xi}^k + {}^1m \left\{ \begin{matrix} k \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \dot{\xi}^\mu \dot{\xi}^\nu - {}^1e \overline{F^k_\beta} \dot{\xi}^\beta = 0. \quad (29)$$

Из этих уравнений мы и получим, с помощью метода аппроксимации, уравнения движения в ньютоновом приближении.

3. Для получения уравнений движения нужно выбрать определенный метод аппроксимации, так как точное решение уравнений гравитационного поля оказывается невозможным.

Вслед за Инфельдом, мы будем разлагать величины в ряды по инвариантному параметру $\lambda = {}^1/c$. Например,

$$A = {}_0A + {}_1A + {}_2A + \dots \quad (30)$$

Далее примем, что дифференцирование по времени увеличивает порядок на единицу. Символически это можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_tA = {}_{t+1}A. \quad (31)$$

Естественно принять, что разложение ξ^α начинается с нуля. Тогда из соотношения

$$\frac{\text{масса} \times \text{масса}}{(\text{расстояние})^2} = \text{масса} \times \text{ускорение} \quad (32)$$

видно, что разложение массы начинается с двойки

$$m = {}_2m + {}_4m + {}_6m + \dots \quad (33)$$

Из соотношения

$$\frac{\text{заряд} \times \text{заряд}}{(\text{расстояние})^2} = \text{масса} \times \text{ускорение} \quad (34)$$

видно, что порядок заряда нужно положить равным двум, т. е.

$$e = {}_2e. \quad (35)$$

Аналогично можно показать, что должны выполняться следующие разложения

$$\begin{aligned} T_{\text{мех.}}^{00} &= {}_2T_{\text{мех.}}^{00} + {}_4T_{\text{мех.}}^{00}, \\ T_{\text{мех.}}^{0s} &= {}_3T_{\text{мех.}}^{0s} + {}_5T_{\text{мех.}}^{0s}, \\ T_{\text{мех.}}^{mn} &= {}_2T_{\text{мех.}}^{mn} + {}_4T_{\text{мех.}}^{mn}. \end{aligned} \quad (36)$$

Получим теперь решения уравнений Максвелла во втором приближении. Из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{-g} F^{23}) &= 4\pi e \frac{dx^3}{dt}, \\ g &= {}_2e\delta(x^s - \xi^s) + {}_2e\delta(x^s - \eta^s), \\ F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\gamma\alpha,\beta} + F_{\beta\gamma,\alpha} &= 0 \end{aligned}$$

видно, что выполняются соотношения

$$\begin{aligned} F^{0s} &= {}_2F^{0s} + \dots \\ F^{st} &= {}_3F^{st} + \dots \end{aligned} \quad (37)$$

Далее имеем

$$\frac{\partial}{\partial x^s} F^{0s} = 4\pi {}_2e\delta(x^s - \xi^s) + 4\pi {}_2e\delta(x^s - \eta^s). \quad (38)$$

Из этого уравнения находим

$$F^{0s} = \frac{{}_2e(x^s - \xi^s)}{{}_1r^3} + \frac{{}_2e(x^s - \eta^s)}{{}_2r^3}. \quad (39)$$

Отсюда видно, что разложения $T_{\text{эл. м}}^{\alpha\gamma}$ начинаются минимум с четырех

$$T_{\text{эл. м}}^{00} = {}_4T_{\text{эл. м}}^{00} + \dots \quad (40)$$

и т. д.

Для решения уравнений поля (1) положим

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \tau_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \\ g^{\mu\nu} &= \tau^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (41)$$

где $\tau_{\mu\nu}$ — галлилеева метрика

$$\tau_{00} = 1, \quad \tau_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta},$$

а $h_{\mu\nu}$ — малые добавки к ней.

Подставим теперь (41) в уравнения поля и приравняем члены одинакового порядка. В ньютоновом приближении нам понадобится только лишь ${}_2h_{00}$. Для нее получается следующее выражение

$${}_2h_{00} = -\frac{2 {}_2m}{r} - \frac{2 {}_2m}{r}. \quad (42)$$

Нетрудно заметить, что все условия, накладываемые на $g_{\alpha\beta}$ и $F_{\alpha\beta}$, выполняются для ${}_2h_{00}$ и ${}_2F^{05}$.

Приравнивая члены наименьшего порядка, из (29) получим уравнения ньютонова порядка

$${}_2m \ddot{\xi}^k = \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left(\frac{{}_2m {}_2m}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left(\frac{{}_2e {}_2e}{r} \right), \quad (43)$$

где r расстояние между телами. Как видно, они совпадают с классическими.

Аналогично можно получить и уравнения движения в посленьютоновом приближении, которые мы здесь выписывать не будем.

Заметим еще, что уравнения (43) можно было бы получить из уравнений движения в лагранжевой форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\xi}^k} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \xi^k} = 0, \quad (44)$$

где
$$\bar{L} = {}_2m (g_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta)^{1/2} + {}_2e \bar{A}_\alpha \dot{\xi}^\alpha,$$

при дополнительных условиях

$$\begin{aligned} \overline{g_{\alpha\beta, \tau}} &= \overline{g_{\alpha\beta, \tau}}, \\ \frac{\partial \overline{g_{\alpha\beta}}}{\partial \dot{\xi}^\alpha} - \frac{\partial \overline{g_{\alpha\beta}}}{\partial \dot{\xi}^\beta} &= 0, \\ \overline{A_{\alpha, \tau}} &= \overline{A_{\alpha, \tau}}. \end{aligned} \quad (45)$$

Ֆ. Մ. Ալվազան

ԼԻՑԲԱՎՈՐՎԱԾ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ ընդհանուր հարաբերականության տեսության դաշտ հավասարումներից և Մաքսվելի հավասարումներից, գրված ընդհանուր կոորդինատ տեսքով, նյութոնյան մոտավորությամբ ստացված են շարժման հավասարումներ՝ երկու լիցքավորված մարմինների համար, ընդունելով, որ $T_{\mu\nu}^{(g)}$ և մարմինների լիցքերը համեմատական են Դիրակի ընդհանրացված-ֆունկցիաներին:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Einstein, Grossmer, Sit. Deut. Akad. Wiss. Berlin, 2, Materie als Eigenpunkten d. Gravitationsgleichungen. 1927.
2. Einstein, Infeld, Hoffman, The gravitational equations and the problem of motion. Ann. Math. **39**, 65, 1938.
3. Фок В. А. О движении конечных масс в общей теории относительности. „ЖЭТФ“ **9**, 375, 1939.
4. Петрова Н. Об уравнении движения и тензоре материи для системы конечных масс в общей теории относительности, „ЖЭТФ“, **19**, 989, 1949.
5. Papapetrou. Equations of motion in general relativity. Pros. Phys. Sos. A **64**, 1951.
6. Infeld. Equations of motion in general relativity theory and the action principle. Rev. Mod. Phys. **29**, 398, 1957.
7. Tulczyjew W. Bull. Acad. Polon. III, 5, 279, 1957.