

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. Л. Абрамян, В. С. Тоноян

Кручение призматического стержня с поперечным сечением в виде эллипса с выточками

Эллиптические координаты использовались для решения задачи о кручении призматических стержней А. Клебшем [1], А. Соколовым [2] и А. Гринхиллем [2], которые рассмотрели кручение полого стержня с поперечным сечением, образованным конфокальными эллипсами.

Ряд профилей, ограниченных двумя дугами эллипсов и ортогональными к ним гиперболами, при их кручении рассматривался Л. Файлоном [4].

В настоящей статье рассматривается кручение призматического стержня с поперечным сечением в виде эллипса, имеющего со стороны малой полуоси симметрично расположенные выточки.

Решение получено методом сведения задачи к бесконечным системам линейных уравнений [5, 6]. При решении задачи, ввиду симметричности области поперечного сечения, из нее выделяется криволинейный уголок, который представляется в виде двух налегающих друг на друга областей. Функция напряжений строится для каждой из этих областей отдельно. Для того, чтобы эти функции являлись непрерывным продолжением одна другой, на контуре общей части налегающих друг на друга областей они должны быть равными [7]. В такой постановке рассматривалась задача о кручении углового профиля в работе Н. Х. Арутюняна [5], предложившего в этой работе метод введения вспомогательных функций.

Определение постоянных интегрирования в рассматриваемой задаче сводится к решению бесконечных систем линейных уравнений. Доказывается, что эти системы вполне регулярны. Выведены формулы для определения жесткости при кручении и напряжений. Приведен численный пример.

§ 1. Постановка задачи

В эллиптических координатах α, β , связанных с декартовыми прямоугольными координатами x и y соотношениями

$$\begin{aligned}x &= c \operatorname{ch} \alpha \sin \beta, \\y &= c \operatorname{sh} \alpha \cos \beta,\end{aligned}\tag{1.1}$$

где $2c$ — межфокусное расстояние, функция напряжений при кручении $U(x, \beta)$ удовлетворяет в области поперечного сечения стержня уравнению

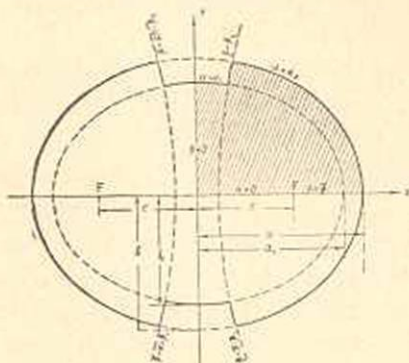
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} = -c^2 (\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\beta), \quad (1.2)$$

а на контуре области сечения принимает значение, равное нулю.

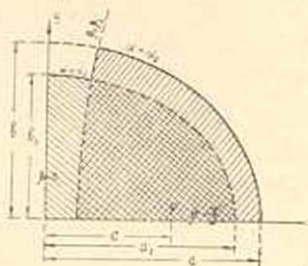
Рассмотрим кручение призматического стержня с поперечным сечением в виде эллипса, имеющего со стороны малой полуоси симметрично расположенные выточки (фиг. 1).

В силу симметрии области сечения, функцию $U(x, \beta)$ определяем только в четвертой части области сечения. Чтобы, определенная в этой части области сечения, функция $U(x, \beta)$ представляла решение для рассматриваемой задачи, согласно мембранной аналогии, на осях симметрии области нормальная производная функции $U(x, \beta)$ должна равняться нулю.

Далее, выделенную область (фиг. 2) представляем в виде двух налегающих друг на друга областей Ω_1 и Ω_2 .



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Полагаем, что

$$U(x, \beta) = \begin{cases} U_1(x, \beta) & \text{в области } \Omega_1, \\ & \text{где } x \leq a_1; \\ U_2(x, \beta) & \text{в области } \Omega_2, \\ & \text{где } \beta \geq \beta_1. \end{cases} \quad (1.3)$$

Функции U_1 и U_2 должны удовлетворять следующим граничным условиям и условиям сопряжения

$$\left. \frac{\partial U_1}{\partial \beta} \right|_{\beta=0} = \left. \frac{\partial U_2}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta_1} = 0, \quad (1.4)$$

$$\left. \frac{\partial U_1}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad U_1(a_1, \beta) = \begin{cases} 0, & \beta < \beta_1, \\ U_2(a_1, \beta), & \beta \geq \beta_1, \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\left. \frac{\partial U_2}{\partial x} \right)_{x=0} = U_2(x_2, \beta) = 0, \quad (1.6)$$

$$\left. \frac{\partial U_2}{\partial \beta} \right)_{\beta=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad U_2(x, \beta_1) = \begin{cases} 0, & x > x_1, \\ U_1(x, \beta_1), & x \leq x_1. \end{cases} \quad (1.7)$$

Функции U_1 и U_2 по методу Г. А. Гринберга [8] ищем в виде

$$U_1(x, \beta) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\beta) \sin \gamma_k (x - x_1), \quad (0 < x < x_1), \quad (1.8)$$

$$U_2(x, \beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \sin \mu_k (\beta - \beta_1), \quad \left(\beta_1 < \beta < \frac{\pi}{2} \right) \quad (1.9)$$

где

$$\gamma_k = \frac{(2k-1)\pi}{2x_1}, \quad \mu_k = \frac{(2k-1)\pi}{\pi - 2\beta_1}, \quad (1.10)$$

$$f_k(\beta) = \frac{2}{x_1} \int_0^{x_1} U_1(x, \beta) \sin \gamma_k (x - x_1) dx, \quad (1.11)$$

$$\varphi_k(x) = \frac{4}{\pi - 2\beta_1} \int_{\beta_1}^{\frac{\pi}{2}} U_2(x, \beta) \sin \mu_k (\beta - \beta_1) d\beta. \quad (1.12)$$

§ 2. Определение функции напряжений

Умножив уравнение (1.2) для функции $U_1(x, \beta)$ на $\frac{2}{x_1} \sin \gamma_k (x - x_1)$ и интегрируя полученное выражение по x в пределах от нуля до x_1 , для определения функции $f_k(\beta)$ получим следующее дифференциальное уравнение

$$f_k''(\beta) - \gamma_k^2 f_k(\beta) = \frac{2\gamma_k}{x_1} U_1(x_1, \beta) + \frac{2c^2 \gamma_k}{x_1 (4 + \gamma_k^2)} \operatorname{ch} 2x_1 + \frac{2c^2}{x_1 \gamma_k} \cos 2\beta, \quad (2.1)$$

при этом использованы выражение (1.11) и первое из условий (1.5).

Учитывая второе условие из (1.5) и интегрируя уравнение (2.1), для функции $f_k(\beta)$ получим значения

$$f_k(\beta) = \begin{cases} f_k^{(1)}(\beta), & \beta < \beta_1, \\ f_k^{(2)}(\beta), & \beta > \beta_1, \end{cases} \quad (2.2)$$

где

$$f_k^{(1)}(\beta) = A_k^{(1)} \operatorname{sh} \gamma_k \beta + B_k^{(1)} \operatorname{ch} \gamma_k \beta - \frac{2c^2 (\operatorname{ch} 2x_1 + \cos 2\beta)}{\gamma_k x_1 (\gamma_k^2 + 4)}, \quad (2.3)$$

$$f_k^{(2)}(\beta) = A_k^{(2)} \operatorname{sh} \gamma_k \beta + B_k^{(2)} \operatorname{ch} \gamma_k \beta - \frac{2c^2 (\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta)}{\alpha_1 \gamma_k (\gamma_k^2 + 4)} - \frac{2\gamma_k}{\alpha_1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi_p(\alpha_1) \sin \mu_p (\beta - \beta_1)}{\mu_p^2 + \gamma_k^2} \quad (2.4)$$

Согласно (1.4), (1.11) и (2.2), функции $f_k^{(1)}(\beta)$ и $f_k^{(2)}(\beta)$ должны удовлетворять следующим граничным условиям и условиям сопряжения

$$f_k^{(1)'}(0) = f_k^{(2)'}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f_k^{(1)}(\beta_1) = f_k^{(2)}(\beta_1), \quad (2.5)$$

$$f_k^{(1)'}(\beta_1) = f_k^{(2)'}(\beta_1). \quad (2.6)$$

Удовлетворив условиям (2.5), найдем

$$A_k^{(1)} = 0, \quad B_k^{(2)} = B_k^{(1)} \frac{\operatorname{ch} \gamma_k \beta_1 \operatorname{ch} \frac{\gamma_k \pi}{2}}{\operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)}, \quad (2.7)$$

$$A_k^{(2)} = -B_k^{(1)} \frac{\operatorname{ch} \gamma_k \beta_1 \operatorname{sh} \frac{\gamma_k \pi}{2}}{\operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)}.$$

Подставляя эти значения в (2.3) и (2.4), будем иметь

$$f_k^{(1)}(\beta) = B_k^{(1)} \operatorname{ch} \gamma_k \beta - \frac{2c^2 (\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta)}{\gamma_k \alpha_1 (4 + \gamma_k^2)}, \quad (2.8)$$

$$f_k^{(2)}(\beta) = B_k^{(1)} \frac{\operatorname{ch} \gamma_k \beta_1 \operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{\operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)} - \frac{2c^2 (\operatorname{ch} 2\alpha_1 + \cos 2\beta)}{\gamma_k \alpha_1 (4 + \gamma_k^2)} + \frac{2\gamma_k}{\alpha_1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi_p(\alpha_1) \sin \mu_p (\beta - \beta_1)}{\mu_p^2 + \gamma_k^2}. \quad (2.9)$$

Удовлетворив теперь условию (2.6), получим следующую бесконечную систему линейных уравнений относительно двух неизвестных коэффициентов

$$B_k^{(1)} = - \frac{2 \operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)}{\alpha_1 \operatorname{sh} \frac{\gamma_k \pi}{2}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\mu_p \varphi_p(\alpha_1)}{\mu_p^2 + \gamma_k^2}. \quad (2.10)$$

Аналогичным образом для определения функции $\varphi_k(\alpha)$ получаем уравнение

$$\varphi_k^*(x) - \mu_k^2 \varphi_k(x) = -\frac{4\mu_k U_2(x, \beta_1)}{\pi - 2\beta_1} - \frac{4c^2 \operatorname{ch} 2x}{(\pi - 2\beta_1) \mu_k} +$$

$$+ \frac{4c^2 \mu_k \cos 2\beta_1}{(\pi - 2\beta_1)(4 - \mu_k^2)}. \quad (2.11)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \varphi_k^{(1)}(x), & x \geq x_1, \\ \varphi_k^{(2)}(x), & x \leq x_1, \end{cases} \quad (2.12)$$

где

$$\varphi_k^{(1)}(x) = C_k^{(1)} \operatorname{sh} \mu_k x + D_k^{(1)} \operatorname{ch} \mu_k x - \frac{4c^2 \cos 2\beta_1}{(\pi - 2\beta_1) \mu_k (4 - \mu_k^2)} -$$

$$- \frac{4c^2}{(\pi - 2\beta_1) \mu_k^2 (4 - \mu_k^2)} [\mu_k \operatorname{ch} 2x - 2 \operatorname{sh} 2x_1 \operatorname{sh} \mu_k (x - x_1) -$$

$$- \mu_k \operatorname{ch} 2x_1 \operatorname{ch} \mu_k (x - x_1)], \quad (2.13)$$

$$\varphi_k^{(2)}(x) = C_k^{(2)} \operatorname{sh} \mu_k x + D_k^{(2)} \operatorname{ch} \mu_k x -$$

$$- \frac{4c^2 (\operatorname{ch} 2x - \operatorname{ch} \mu_k x + \cos 2\beta_1)}{(\pi - 2\beta_1) \mu_k (4 - \mu_k^2)} + \frac{4\mu_k}{\pi - 2\beta_1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p(\beta_1) \sin \gamma_p (x - x_1)}{\mu_k^2 + \gamma_p^2}. \quad (2.14)$$

Функции $\varphi_k^{(1)}$ и $\varphi_k^{(2)}$ должны удовлетворять условиям

$$\varphi_k^{(1)}(x_2) = \varphi_k^{(2)}(0) = 0, \quad \varphi_k^{(1)}(x_1) = \varphi_k^{(2)}(x_1), \quad (2.15)$$

$$\varphi_k^{(1)'}(x_1) = \varphi_k^{(2)'}(x_1). \quad (2.16)$$

Удовлетворив условиям (2.15) и исключив из выражений (2.13) и (2.14) коэффициенты $C_k^{(2)}$, $C_k^{(1)}$ и $D_k^{(2)}$, будем иметь

$$\varphi_k^{(1)}(x) = D_k^{(1)} \frac{\operatorname{sh} \mu_k (x_2 - x)}{\operatorname{sh} \mu_k x_2} + \frac{4c^2 \cos 2\beta_1}{(\pi - 2\beta_1) \mu_k (\mu_k^2 - 4)} \left(1 - \frac{\operatorname{sh} \mu_k x}{\operatorname{sh} \mu_k x_2} \right) +$$

$$+ \frac{4c^2}{(\pi - 2\beta_1) \mu_k^2 (\mu_k^2 - 4)} \left[\mu_k \left(\operatorname{ch} 2x - \operatorname{ch} 2x_2 \frac{\operatorname{sh} \mu_k x}{\operatorname{sh} \mu_k x_2} - \right. \right.$$

$$\left. - \operatorname{ch} 2x_1 \operatorname{sh} \mu_k (x_2 - x) \frac{\operatorname{ch} \mu_k x_1}{\operatorname{sh} \mu_k x_2} \right) + 2 \operatorname{sh} 2x_1 \operatorname{sh} \mu_k (x_2 - x) \frac{\operatorname{sh} \mu_k x_1}{\operatorname{sh} \mu_k x_2} \Big], \quad (2.17)$$

$x > x_1.$

$$\varphi_k^{(2)}(x) = D_k^{(1)} \frac{\operatorname{sh} \mu_k (x_2 - x_1) \operatorname{ch} \mu_k x}{\operatorname{sh} \mu_k x_2 \operatorname{ch} \mu_k x_1} - \frac{4c^2 \cos 2\beta_1}{(\pi - 2\beta_1) \mu_k (4 - \mu_k^2)} \left(1 - \right.$$

$$\left. - \operatorname{th} \mu_k x_1 \frac{\operatorname{ch} \mu_k x}{\operatorname{sh} \mu_k x_2} \right) - \frac{4c^2}{(\pi - 2\beta_1) \mu_k^2 (4 - \mu_k^2)} \left[\mu_k \left(\operatorname{ch} 2x - \right. \right.$$

$$\left. - \operatorname{ch} 2x_2 \operatorname{th} \mu_k x_1 \frac{\operatorname{ch} \mu_k x}{\operatorname{sh} \mu_k x_2} - \operatorname{ch} 2x_1 \operatorname{sh} \mu_k (x_2 - x_1) \frac{\operatorname{ch} \mu_k x}{\operatorname{sh} \mu_k x_2} \right) +$$

$$+ 2 \operatorname{sh} 2\alpha_1 \operatorname{sh} \mu_k (x_2 - x_1) \operatorname{th} \mu_k x_1 \frac{\operatorname{ch} \mu_k x_2}{\operatorname{sh} \mu_k x_2} \Bigg| +$$

$$+ \frac{4\mu_k}{\pi - 2\beta_1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p(\beta_1) \sin \gamma_p (x - x_1)}{\mu_k^2 + \gamma_p^2}, \quad x \leq x_1. \quad (2.18)$$

Наконец, удовлетворив условию (2.16), получим вторую бесконечную систему

$$D_k^{(1)} = - \frac{4 \operatorname{ch} \mu_k x_1 \operatorname{th} \mu_k x_2}{\pi - 2\beta_1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p(\beta_1) \gamma_p}{\mu_k^2 + \gamma_p^2} + \frac{4c^2 \cos 2\beta_1}{(\pi - 2\beta_1) \mu_k (4 - \mu_k^2) \operatorname{ch} \mu_k x_2} +$$

$$+ \frac{4c^2}{(\pi - 2\beta_1) \mu_k^2 (4 - \mu_k^2)} \Bigg| \mu_k \left(\frac{\operatorname{ch} 2x_2}{\operatorname{ch} \mu_k x_2} - \operatorname{ch} \mu_k x_1 \operatorname{ch} 2x_1 \right) +$$

$$+ 2 \operatorname{sh} 2x_1 \operatorname{sh} \mu_k x_1 \Bigg|. \quad (2.19)$$

Введя новые неизвестные

$$\mu_p \gamma_p (x_1) = \mu_p D_p^{(1)} \frac{\operatorname{sh} \mu_p (x_2 - x_1)}{\operatorname{sh} \mu_p x_2} - \frac{4c^2 \cos 2\beta_1}{(\pi - 2\beta_1) (4 - \mu_p^2)} \left(1 - \frac{\operatorname{sh} \mu_p x_1}{\operatorname{sh} \mu_p x_2} \right) -$$

$$- \frac{4c^2}{(\pi - 2\beta_1) \mu_p^2 (4 - \mu_p^2)} \Bigg| \mu_p \left(\operatorname{ch} 2x_1 - \operatorname{ch} 2x_2 \frac{\operatorname{sh} \mu_p x_1}{\operatorname{sh} \mu_p x_2} \right) +$$

$$+ 2 \operatorname{sh} 2x_1 \operatorname{sh} \mu_p (x_2 - x_1) \frac{\operatorname{sh} \mu_p x_1}{\operatorname{sh} \mu_p x_2} -$$

$$- \mu_p \operatorname{ch} 2x_1 \operatorname{sh} \mu_p (x_2 - x_1) \frac{\operatorname{ch} \mu_p x_1}{\operatorname{sh} \mu_p x_2} \Bigg| = X_p x_1, \quad (2.20)$$

$$\gamma_p B_p^{(1)} \operatorname{ch} \gamma_p \beta_1 = -m \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1 \right) Y_p \quad (2.21)$$

(где m — пока произвольное число, подлежащее определению в дальнейшем), бесконечные системы (2.10) и (2.19) приведем к виду

$$X_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} Y_p + Q_k, \quad \Bigg|$$

$$Y_k = \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} X_p, \quad \Bigg| \quad (k = 1, 2, \dots, \infty) \quad (2.22)$$

где

$$a_{kp} = \frac{2m \mu_k \operatorname{ch} \mu_k x_1 \operatorname{sh} \mu_k (x_2 - x_1)}{x_1 \operatorname{ch} \mu_k x_2 (\mu_p^2 + \mu_k^2)}, \quad \Bigg|$$

$$b_{kp} = \frac{4\gamma_k}{m (\pi - 2\beta_1) \left[\operatorname{th} \gamma_k \beta_1 + \operatorname{th} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1 \right) \right] (\mu_p^2 + \gamma_k^2)} \quad (2.23)$$

$$Q_k = \frac{2c^2 (\operatorname{ch} 2x_1 + \cos 2\beta_1)}{x_1 (\pi - 2\beta_1)(\mu_k^2 - 4)} (\mu_k \operatorname{th} 2x_1 - 2 \operatorname{th} \mu_k x_1) \frac{\operatorname{ch} \mu_k x_1 \operatorname{sh} \mu_k (x_2 - x_1)}{\operatorname{ch} \mu_k x_2} +$$

$$+ \frac{4c^2 \cos 2\beta_1}{x_1 (\pi - 2\beta_1)(\mu_k^2 - 4)} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \mu_k x_1}{\operatorname{ch} \mu_k x_2} \right) +$$

$$+ \frac{4c^2}{x_1 (\pi - 2\beta_1)(\mu_k^2 - 4)} \left(\operatorname{ch} 2x_1 - \operatorname{ch} 2x_2 \frac{\operatorname{ch} \mu_k x_1}{\operatorname{ch} \mu_k x_2} \right). \quad (2.24)$$

Подставляя значения (2.20) и (2.21) в (2.8), (2.9), (2.17) и (2.18) и пользуясь соотношениями (1.3), (1.8) и (1.9), для функции напряжений $U(x, \beta)$ получим следующие выражения

$$U(x, \beta) = \frac{c^2}{4} (\operatorname{ch} 2x_1 + \cos 2\beta) \left(1 - \frac{\operatorname{ch} 2x}{\operatorname{ch} 2x_1} \right) -$$

$$- m \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1 \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k \operatorname{ch} \gamma_k \beta}{\gamma_k \operatorname{ch} \gamma_k \beta_1} \sin \gamma_k (x - x_1), \quad (0 < x < x_1, \quad 0 < \beta \leq \beta_1). \quad (2.25)$$

$$U(x, \beta) = \frac{c^2}{4} (\operatorname{ch} 2x_1 + \cos 2\beta) \left(1 - \frac{\operatorname{ch} 2x}{\operatorname{ch} 2x_1} \right) -$$

$$- m \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1 \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k \operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)}{\gamma_k \operatorname{ch} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1 \right)} \sin \gamma_k (x - x_1) +$$

$$+ x_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{ch} \mu_k x}{\mu_k \operatorname{ch} \mu_k x_1} \sin \mu_k (\beta - \beta_1), \quad \left(0 < x < x_1, \quad \beta_1 \leq \beta < \frac{\pi}{2} \right), \quad (2.26)$$

$$U(x, \beta) = \frac{c^2}{4} (\cos 2\beta - \cos 2\beta_1) +$$

$$+ x_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k \operatorname{sh} \mu_k (x_2 - x)}{\mu_k \operatorname{sh} \mu_k (x_2 - x_1)} \sin \mu_k (\beta - \beta_1) -$$

$$- \frac{4c^2 \cos 2\beta_1}{\pi - 2\beta_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_k (\beta - \beta_1)}{\mu_k (\mu_k^2 - 4)} \frac{\operatorname{ch} \frac{\mu_k}{2} (x_2 + x_1 - 2x)}{\operatorname{ch} \frac{\mu_k}{2} (x_2 - x_1)} +$$

$$+ \frac{4c^2}{\pi - 2\beta_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_k (\beta - \beta_1)}{\mu_k (\mu_k^2 - 4)} \left[\operatorname{ch} 2x - \operatorname{ch} 2x_1 \frac{\operatorname{sh} \mu_k (x_2 - x)}{\operatorname{sh} \mu_k (x_2 - x_1)} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{ch} 2x_2 \frac{\operatorname{sh} \mu_k (x - x_1)}{\operatorname{sh} \mu_k (x_2 - x_1)} \right], \quad \left(x_1 < x \leq x_2, \quad \beta_1 < \beta < \frac{\pi}{2} \right). \quad (2.27)$$

§ 3. Исследование бесконечных систем (2.22)

Пользуясь выражениями (2.23), будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| &= \frac{m \operatorname{sh} \mu_k z_1 \operatorname{sh} \mu_k (z_2 - z_1)}{\operatorname{ch} \mu_k z_2} < \frac{m}{2}, \\ \sum_{p=1}^{\infty} |b_{kp}| &= \frac{\operatorname{th} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1 \right)}{m \left| \operatorname{th} \gamma_k \beta_1 + \operatorname{th} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1 \right) \right|} < \frac{1}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Постоянное число m выбираем из равенства

$$\frac{m}{2} = \frac{1}{m}, \quad m = \sqrt{2}. \quad (3.2)$$

Тогда для систем (2.22) будем иметь следующие оценки

$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| < \frac{1}{2}, \quad \sum_{p=1}^{\infty} |b_{kp}| < \frac{1}{2}. \quad (3.3)$$

Из (2.24) видно, что свободные члены систем (2.22) ограничены сверху и при $k \rightarrow \infty$ стремятся к нулю.

Таким образом системы (2.22) оказались вполне регулярными и имеют ограниченные сверху свободные члены. Это обстоятельство дает возможность определить все неизвестные X_k и Y_k с желаемой точностью [7].

§ 4. Определение жесткости при кручении

Жесткость при кручении сплошного стержня определяется по формуле

$$\begin{aligned} C &= Gc^2 \iint_{\Omega} U(x, \beta) (\operatorname{ch} 2x + \cos 2\beta) dx d\beta = \\ &= 4Gc^2 \iint_{\Omega^*} U(x, \beta) (\operatorname{ch} 2x + \cos 2\beta) dx d\beta, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где G — модуль сдвига, Ω — область поперечного сечения стержня, Ω^* — четвертая часть области Ω (фиг. 2).

Подставляя значения функции $U(x, \beta)$ из (2.25)–(2.27) в (4.1) и произведя интегрирование, для определения жесткости получим следующую формулу

$$\begin{aligned} C &= 4Gc^2 \left[\frac{c^2}{16} (\pi - 2\beta_1) (z_2 - z_1) + \frac{c^2}{32} (z_2 - z_1) \sin 4\beta_1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{c^2}{16} (\operatorname{sh} 2z_2 - \operatorname{sh} 2z_1) [\sin 2\beta_1 + (\pi - 2\beta_1) \cos 2\beta_1] + \frac{c^2 \pi}{32} \frac{\operatorname{sh}^2 2z_1}{\operatorname{ch} 2z_1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{8c^2 \cos^2 2\beta_1}{\pi - 2\beta_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{\mu_k}{2} (z_2 - z_1)}{\mu_k (\mu_k^2 - 4)^2} - \frac{4c^2}{\pi - 2\beta_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 (\mu_k^2 - 4)^2} \right] \frac{(\mu_k^2 - 4) (z_2 - z_1)}{2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mu_k^2 + 4}{8} (\operatorname{sh} 4x_2 - \operatorname{sh} 4x_1) + \frac{2\mu_k \operatorname{ch} 2x_1 \operatorname{ch} 2x_2}{\operatorname{sh} \mu_k (x_2 - x_1)} - \mu_k (\operatorname{ch}^2 2x_2 + \\
& + \operatorname{ch}^2 2x_1) \operatorname{cth} \mu_k (x_2 - x_1) \Big] + \frac{2c^2 \cos 2\beta_1}{\pi - 2\beta_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 (\mu_k^2 - 4)^2} \left[(\mu_k^2 + 4) (\operatorname{sh} 2x_2 - \right. \\
& \left. - \operatorname{sh} 2x_1) - 4 (\operatorname{ch} 2x_1 + \operatorname{ch} 2x_2) \mu_k \operatorname{th} \frac{\mu_k}{2} (x_2 - x_1) \right] + \\
& + x_1 \cos 2\beta_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{\mu_k (\mu_k^2 - 4)} \left[\operatorname{th} \frac{\mu_k}{2} (x_2 - x_1) + \operatorname{th} \mu_k x_1 \right] + \\
& + x_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{\mu_k (\mu_k^2 - 4)} \left[\frac{\operatorname{ch} 2x_1 \operatorname{ch} \mu_k x_2}{\operatorname{ch} \mu_k x_1 \operatorname{sh} \mu_k (x_2 - x_1)} - \frac{\operatorname{ch} 2x_2}{\operatorname{sh} \mu_k (x_2 - x_1)} \right] + \\
& + m \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1 \right) (\operatorname{ch} 2x_1 + \cos 2\beta_1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{\gamma_k (\gamma_k^2 + 4)} \times \\
& \times \left[\operatorname{th} \gamma_k \beta_1 + \operatorname{th} \gamma_k \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1 \right) \right] \Bigg\}. \quad (4.2)
\end{aligned}$$

Из (4.2), переходя к пределу при $x_1 = x_2$, получим формулу для жесткости эллиптического профиля (фиг. 3)

$$C = \frac{Gc^4 \pi}{8} \frac{\operatorname{sh}^3 2x_2}{\operatorname{ch} 2x_2} = \pi G \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}. \quad (4.3)$$

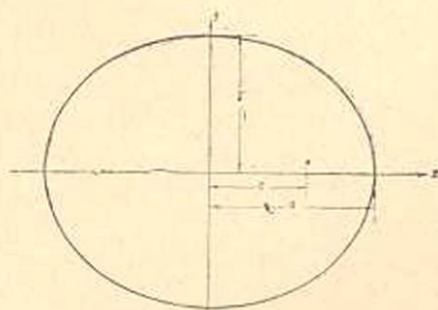
При этом использованы значения

$$X_k = Y_k = 0, \quad (4.4)$$

которые получаются из систем (2.22) соответствующим предельным переходом, а также

$$a = c \operatorname{ch} x_2, \quad b = c \operatorname{sh} x_2. \quad (4.5)$$

Из (4.2), переходя к пределу при $x_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, для жесткости полуэллипса (фиг. 4) получим следующую формулу



Фиг. 3.

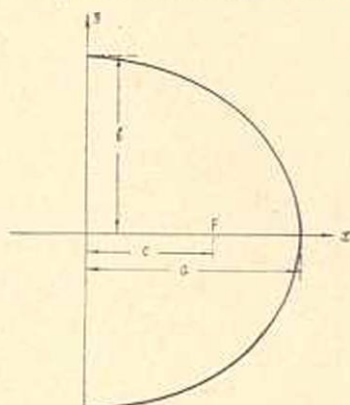
$$\begin{aligned}
C = Gc^4 \Bigg\{ \frac{\pi x_2}{8} + \frac{\pi}{4} \operatorname{sh} 2x_2 + \frac{3\pi}{32} \operatorname{sh} 4x_2 - \\
- \frac{32}{\pi} \operatorname{ch}^4 x_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \mu_k x_2}{\mu_k (\mu_k^2 - 4)^2} \Bigg\}. \quad (4.6)
\end{aligned}$$

При этом использованы значения

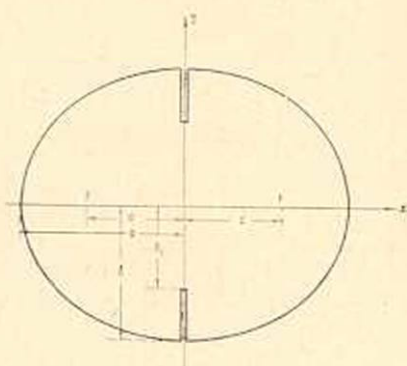
$$Y_k = 0, \quad x_1 X_k = \frac{8c^2}{\pi (\mu_k^2 - 4)} - \frac{4c^2 (1 + \operatorname{ch} 2x_2)}{\pi (\mu_k^2 - 4) \operatorname{ch} \mu_k x_2}. \quad (4.7)$$

получаемые из систем (2.22) соответствующим предельным переходом.

В качестве численного примера рассмотрены стержни с сечениями в виде эллипса, имеющего со стороны малой полуоси симметрично расположенные выточки (фиг. 1) или разрезы (фиг. 5).



Фиг. 4.



Фиг. 5.

В таблице 1 приводятся жесткости для этих стержней, вычисленные по формуле (4.2) для различных значений параметров α_1 , α_2 и β_1 .

В первой строке таблицы 1 дается значение жесткости при кручении для призматического стержня с сечением в виде полного эллипса (фиг. 3).

Таблица 1

	Жесткость C/Gb^4		
	с недостатком	с избытком	средняя
Эллипс (фиг. 3) $b=5$, $c=3$	—	—	2,1113
Эллипс с выточками (фиг. 1) $\frac{b}{b_1} = \frac{5}{4}$, $c=3$	1,7512	1,7952	1,7732
Эллипс с разрезами (фиг. 5) $\frac{b}{b_1} = \frac{5}{4}$, $c=3$	1,7941	1,8149	1,8045
Эллипс с разрезами (фиг. 5) $\frac{b}{b_1} = 2$, $c=3$	1,2591	1,3000	1,2796
Два полуэллипса $b=5$, $c=3$	—	—	1,1539

Во второй строке дается значение жесткости для стержня с сечением в виде того же эллипса, имеющего со стороны малой полуоси симметрично расположенные небольшие выточки (фиг. 1) при следующих значениях геометрических параметров сечения

$$\beta_1 = 0,0628\pi \approx 0,1975; \quad \alpha_1 = 1,1; \quad \alpha_2 = 1,2835, \quad (4.8)$$

что соответствует случаю, когда

$$\frac{b}{b_1} = \frac{5}{4}, \quad c = 3. \quad (4.9)$$

В третьей и четвертой строках этой таблицы даются значения жесткости эллиптического профиля, имеющего вдоль малой полуоси разрез (фиг. 5):

в третьей строке при

$$\alpha_1 = 1,1; \quad \alpha_2 = 1,2835; \quad \beta_1 = 0. \quad (4.10)$$

в четвертой строке при

$$\alpha_1 = 0,7585; \quad \alpha_2 = 1,2835; \quad \beta_1 = 0. \quad (4.11)$$

В первом случае разрез сделан до глубины, равной одной пятой малой полуоси, а во втором случае глубина разреза доходит до половины малой полуоси.

Наконец, в последней строке для сравнения приводится также и удвоенное значение жесткости для полуэллипса таких же размеров (фиг. 4), для которого

$$\alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = 1,2835; \quad \beta_1 = 0. \quad (4.12)$$

§ 5. Определение касательных напряжений

Пользуясь соотношениями (2.25) — (2.27) и формулами

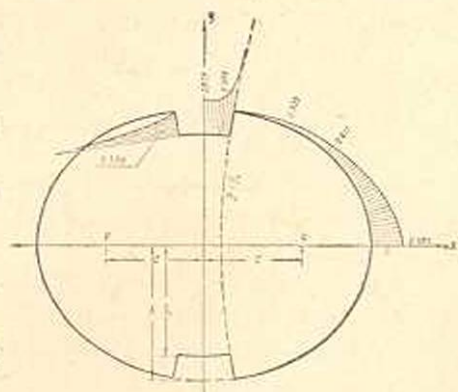
$$\begin{aligned} \tau_{xz}(x, \beta) &= -\frac{Gb}{c} \left| \frac{2}{\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\beta} \frac{\partial U}{\partial \beta} \right| \\ \tau_{yz}(x, \beta) &= -\frac{Gb}{c} \left| \frac{2}{\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\beta} \frac{\partial U}{\partial \alpha} \right| \end{aligned} \quad (5.1)$$

где b — угол закручивания на единицу длины стержня, можно определить касательные напряжения в любой точке поперечного сечения стержня.

В качестве примера вычислены напряжения при кручении для эллиптического профиля с выточками (фиг. 1).

В таблице 2 даются значения напряжений, вычисленные для некоторых точек сечения стержня.

С целью наглядного представления закона распределения касательных напряжений, на фиг. 6 приводится эпюра этих напряжений для рассматриваемого сечения.



Фиг. 6.

Таблица 2

Напряжения	С недостатком	С избытком	Среднее
$\frac{\tau_{yz}(x_1, 0)}{Gbc}$	1,6829	1,7476	1,7152
$\frac{\tau_{yz}(x_1, \frac{z_1}{2})}{Gbc}$	1,7553	1,8380	1,7966
$\frac{\tau_{yz}(x_2, \frac{\pi - 2z_1}{8})}{Gbc}$	0,1342	0,1849	0,1596
$\frac{\tau_{yz}(x_2, \frac{\pi - 2z_1}{4})}{Gbc}$	0,2882	0,3969	0,3426
$\frac{\tau_{yz}(x_2, \frac{\pi}{2})}{Gbc}$	1,5441	1,5559	1,5500
$\frac{\tau_{xz}(\frac{x_1 + x_2}{2}, z_2)}{Gbc}$	1,8626	1,9363	1,8995

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 17 VI 1960

Բ. Լ. Աբրահամյան, Վ. Ս. Տոնյան

ՓՈՐՎԱԾՔՆԵՐ ՈՒՆԵՅՈՂ ԷԼԻՊՏԱԿԱՆ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔՈՎ ՊՐԻՋՄԱՏԻԿ ՁՈՂԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկվում է փոքր կիսառանցքի կողմից սիմետրիկ ձևով դասավորված փորվածքներով էլիպտական լայնական կտրվածքով պրիզմատիկ ձողի ոլորման խնդիրը:

Ոնցդրի լուծման ընթացքում լայնական կտրվածքի տիրույթի սիմետրիկությոնը նկատի առնելով, ալդ տիրույթից անջատվում է մի կորագիծ անկյունակ: Ոլդ անկյունակը իր հերթին ներկայացվում է իրար վրա զրված երկու տիրույթների տեսքով:

Լարման ֆունկցիան կառուցվում է այս տիրույթներից յուրաքանչյուրում առանձին-առանձին: Որպեսզի ալդ ֆունկցիաները հանդիսանան մեկը մյուսի անընդհատ շարունակությունը, իրար վրա զրված տիրույթների ընդհանուր մասի եզրագծի վրա ալդ ֆունկցիաները հավասարեցվում են [7]:

Այդպիսի դրվածքով անկյունային պրոֆիլով ձգերի ոլորման խնդիրը դիտարկվել է Ն. Ս. Հարությունյանի աշխատությունում [5], որտեղ առաջարկված է եղել օժանդակ ֆունկցիաների ներմուծման հղանակը:

Մեղրի լուծման ընթացքում ինտեգրման հաստատունների որոշումը բերվել է զծային հախաճարումների անվերջ սխառնների լուծման:

Յուրջ է տրված, որ այդ սխառնները լիովին սեղուլյար են: Արտածված են ոլորման կոտորվածներ և լարումներ որոշելու համար բանաձևեր:

Բերված է թվային օրինակ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Клебш А. (Clebsch A.) Theorie der Elasticität fester Körper. Leipzig, 1862, §§ 33—35.
2. Соколов А. П. Задача о кручении призматических тел. „Математический сборник“, 9, вып. II, отл. 1, 1878, 288—339.
3. Гринхилл А. (Greenhill A. G.) Fluid motion between confocal elliptic and confocal ellipsoids. „Quart. Journ. of Math.“, Vol. 16, 1879, 227—256.
4. Файлон Л. (Filon L. N. G.) On the Resistance to Torsion of Certain Forms of Shafting, with Special Reference to the Effect of Keyways. „Phil. Trans. Roy. Soc.“ London, A, 193, 1899, 309—352.
5. Арутюнян Н. Х. Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. „ПММ“, 13, вып. 1, 1949, 107—112.
6. Абрамян Б. Л. Кручение призматических стержней с поперечным сечением в виде криволинейного уголка. „ДАН АрмССР“, 31, № 1, 1960, 9—14.
7. Какторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М.—Л., 1950, 662.
8. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, 1948. См. также „Известия АН СССР, серия физическая“, 10, № 2, 1946.