

Г. В. Бадалян

Некоторые таубероновые теоремы для обобщенного ряда Тейлора

В настоящей работе уточняется теорема 11 работы [1], а также устанавливаются некоторые следствия, вытекающие из уточнения этой теоремы и теорем $A, \bar{A}, B, \bar{B}$ работы [2].

Теорема 11 работы [1] утверждает, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем по методу (A_1) (см. [1]) и

$$a_n = O\left(\frac{1}{\gamma_n} \cdot \exp\left(-\delta \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i^2}\right)\right), \quad (1)$$

где $\delta > 0$ — произвольное число, а $0 = \gamma_0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \rightarrow \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_i} = \infty$,

то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится (к той же сумме) в обычном смысле.

Эта теорема в [1] доказана при помощи нескольких лемм, причем условие (1) использовано только в лемме 3, где доказывается ограниченность последовательности частичных сумм ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, а в остальных леммах использовано только условие $a_n = O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right)$.

Что касается доказательства самой теоремы, то условие (1) использовано постольку, поскольку там использовано утверждение леммы 3.

Из вышесказанного следует, что уточнение леммы 3 повлечет за собой и уточнение теоремы 11.

Ниже мы приводим эти уточнения.

Лемма 3. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем по методу (A_1) и

$$a_n = O\left(\frac{1}{\gamma_n} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i^2}}\right), \quad (2)$$

то

$$|S_n| = \left| \sum_{k=0}^n a_k \right| < A, \quad (3)$$

где $A > 0$ не зависящая от n постоянная.

Доказательство. Пусть

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(x) = s. \quad (4)$$

Это значит, что при достаточно малом $x = x(\varepsilon) > 0$ будет

$$|\varphi(x) - S| < \varepsilon. \quad (5)$$

Далее

$$\begin{aligned} S_m - S &= \varphi(x) - S + S_m - \varphi(x) = \\ &= \varphi(x) - S + \sum_{k=1}^m a_k [1 - \omega_k(x)] - \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \omega_n(x) \end{aligned}$$

или

$$|S_m - S| \leq |\varphi(x) - S| + \sum_{k=1}^m |a_k| [1 - \omega_k(x)] + \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| \cdot \omega_n(x). \quad (6)$$

В силу леммы 1 теоремы 11 работы [1] имеем

$$\sum_{k=1}^m |a_k| [1 - \omega_k(x)] < C \sum_{k=1}^m |a_k| \prod_{\nu=2}^k \frac{\gamma_{\nu}}{\gamma_{\nu} - \gamma_1} x^{\gamma_1}. \quad (7)$$

Остается нам оценить

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| \omega_n(x).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| \omega_n(x) &= \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \gamma_{\nu})} \leq \\ &\leq C \frac{1}{\sum_{\nu=1}^m \frac{1}{\gamma_{\nu}^2}} \cdot \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1} \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \gamma_{\nu})} = \\ &= \frac{C}{\sum_{\nu=1}^m \frac{1}{\gamma_{\nu}^2}} \cdot \prod_{\nu=1}^m \gamma_{\nu} \int_{C_m} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \sum_{\nu=0}^m (\zeta + \gamma_{\nu})} = \end{aligned}$$

$$= \frac{C}{\sum_{v=1}^m \frac{1}{\gamma_v^2}} \cdot \prod_{v=1}^m \gamma_v \left\{ \operatorname{Res}_{\zeta=0} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \prod_{v=1}^m (\zeta + \gamma_v)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C'_m} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \prod_{v=1}^m (\zeta + \gamma_v)} \right\}, \quad (8)$$

где контур C'_m оставляет вне ограниченной им области точку $\zeta=0$.

Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\zeta=0} \frac{x^{-\zeta}}{\zeta \prod_{v=1}^m (\zeta + \gamma_v)} &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left(\frac{x^{-\zeta}}{\prod_{v=1}^m (\zeta + \gamma_v)} \right)' = \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[\frac{x^{-\zeta} \ln \frac{1}{x}}{\prod_{v=1}^m (\zeta + \gamma_v)} - \frac{x^{-\zeta}}{\prod_{v=1}^m (\zeta + \gamma_v)} \cdot \sum_{v=1}^m \frac{1}{\zeta + \gamma_v} \right], \end{aligned}$$

или

$$\operatorname{Res}_{\zeta=0} \frac{x^{-\zeta}}{\zeta \prod_{v=1}^m (\zeta + \gamma_v)} = \frac{1}{\prod_{v=1}^m \gamma_v} \left(\ln \frac{1}{x} - \sum_{v=1}^m \frac{1}{\gamma_v} \right). \quad (9)$$

Полагая

$$x = \prod_{v=2}^m \left(\frac{\gamma_v - \gamma_1}{\gamma_v} \right)^{\frac{1}{\gamma_1}}, \quad (10)$$

получаем

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{x} &= \frac{1}{\gamma_1} \sum_{v=2}^m \ln \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} = \frac{1}{\gamma_1} \sum_{v=2}^m \ln \left(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_v - \gamma_1} \right) = \\ &= \frac{1}{\gamma_1} \sum_{v=2}^m \left(-\frac{\gamma_1}{\gamma_v - \gamma_1} - \frac{\gamma_1^2}{2(\gamma_v - \gamma_1)^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Это значит, что

$$\left| \ln \frac{1}{x} - \sum_{v=2}^m \frac{1}{\gamma_v} \right| < C \sum_{v=2}^m \frac{1}{\gamma_v^2}. \quad (11)$$

Для последнего слагаемого правой части (8), в силу (9) и (11), имеем

$$0 < \frac{\prod_{v=1}^m \gamma_v}{2\pi i} \int_{C'_m} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \prod_{v=1}^m (\zeta + \gamma_v)} < C x^{\gamma_1} \prod_{v=2}^m \frac{\gamma_v}{\gamma_v - \gamma_1} = C. \quad (12)$$

В силу (10), (11) и (12) из (8) получаем

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| w_n(x) < C_0, \quad (13)$$

где C_0 — абсолютная постоянная.

В силу (4), (5), (7) и (13) из (6) следует, что

$$|S_m| < A,$$

где A — абсолютная постоянная.

Этим лемма доказана.

Используя остальные леммы теоремы 11 и весь ход ее доказательства [1], доказывается следующее уточнение последней.

Теорема 1. Из суммируемости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ по методу (A_r) и при условии

$$a_n = O\left(\frac{1}{\gamma^n} \cdot \frac{1}{\sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma_v^2}}\right),$$

где $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \rightarrow \infty$, $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v} = \infty$, следует его сходимости (к той же сумме) в обычном смысле.

Следует отметить, что вышеприведенная теорема не может быть существенно уточнена, так как в случае, когда

$$\gamma_v = \gamma, \quad v = 0, 1, 2, \dots$$

она совпадает с известной теоремой Литтльвуда (см. [3], стр. 196).

Отметим теперь результаты, которые вытекают из сочетания сформулированной здесь теоремы 1 с теоремами $A, \bar{A}, B, \bar{B}$ работы [2].

Теорема 2. Пусть даны:

1. Ряд

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w_n(t), \quad 0 < t \leq 1,$$

$$2. \quad a_n = o\left(\frac{1}{\gamma^n} \cdot \frac{1}{\sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma_v^2}}\right),$$

3. $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m) = S$, где S — некоторое число, а последовательность $\{t_m\}$ обладает свойствами

$$(x) \begin{cases} t_m \downarrow 0, \quad m = 1, 2, \dots \\ \frac{t_m}{t_{m-1}} \leq d, \quad d > 1 \text{ — любое конечное число.} \end{cases}$$

Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

сходится к числу S в обычном смысле.

Теорема 2'. Пусть

1) последовательность чисел $\{t_m\} \in (0, 1)$ обладает свойствами

$$(\bar{\alpha}) \begin{cases} t_m \downarrow 0, m \rightarrow \infty, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{t_m}{t_{m+1}} = \infty, \end{cases}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^2} < \infty,$$

тогда существует расходящийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, такой, что

$$1) a_n = o\left(\frac{1}{\gamma_n}\right),$$

$$2) \varphi(t_m) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t_m) = o(1), \text{ когда } m \rightarrow \infty.$$

Теорема 3. Пусть даны:

1. Ряд

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(t), \quad t \in (0, 1],$$

$$2. a_n = O\left(\frac{1}{\gamma_n} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i^2}}\right),$$

$$3. \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m) = S,$$

где S — некоторое число, а последовательность $\{t_m\}$ удовлетворяет условиям

$$(\alpha') \begin{cases} t_m \downarrow 0 \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{t_m}{t_{m+1}} = 1. \end{cases}$$

огда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится к числу S в обычном смысле.

Теорема 3'. Пусть последовательность чисел $\{t_m\} \in (0, 1)$ обладает свойствами

$$\begin{cases} t_m \downarrow 0, m \rightarrow \infty \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{t_m}{t_{m+1}} = d, d > 1 \text{ любое число,} \end{cases}$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^2} < \infty.$$

Тогда существует расходящийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

такой, что

$$1) a_n = O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right)$$

$$2) \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m) = S.$$

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 5 IV 1960

Հ. Վ. Բադալյան

ՏԱՌԻԲԵՐՅԱՆ ՈՐՈՇ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ ԹԵՅԼՈՐԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՀԱՐՔԻ ՀԱՄԱՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ի Մ

Աշխատության մեջ ճշտված է $|1|$ աշխատությունում շարադրված տատրերյան մի թեորեմա, որը վերջնական տեսքով ձևակերպվում է ապաևս.

$$\text{Եթե } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ շարքը հանրադրամարելի է ըստ } (A_{\gamma}) \text{ մեթոդի}$$

և

$$a_n = O\left(\frac{1}{\gamma_n} \cdot \frac{1}{\sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma_v^2}}\right),$$

որտեղ $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \rightarrow \infty$, $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v} = \infty$, ապա արդ շարքը զուգամետ է

նաև սովորական խմատով, ըստ որում զուգամիտում է նույն դրամարին:

Աշխատանքում նշված են նաև այս թեորեմայի և $[2]$ աշխատության մեջ շարադրված A , $\overline{A}$, B , $\overline{B}$ թեորեմների բաղդատումից բխող հետևանքները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бадалян Г. В. Некоторые граничные свойства обобщенного ряда Тейлора. „Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук“, 11, № 2, 3, 1958.

2. Бадалян Г. В. Некоторые граничные свойства функций, представленных обобщенным рядом Тейлора. „Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук“, 12, № 4, 1959.

3. Харди Г. Расходящиеся ряды. ИЛ, М., 1951.