

ГИДРОМЕХАНИКА

А. Г. Багдоев

Изэнтропическая задача для ударного давления

Рассматривается плоская задача о проникании давления в сжимаемую жидкость. Пусть в некоторой точке 0 границы полуплоскости, занятой сжимаемой жидкой средой, возникло давление, которое затем распространяется по границе ударной волной.

Уравнение состояния жидкости политропическое

$$P = B(S) \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right], \quad (1)$$

где P — давление, ρ — плотность, S — энтропия жидкости, ρ_0 — невозмущенная плотность, n — показатель политропы. Найдем распределение давления в полуплоскости, считая движение изэнтропическим. Выберем ось Ox_1 по поверхности полуплоскости, ось Ox_2 — вглубь среды.

На границе полуплоскости возьмем автомодельное граничное условие

$$P(x_1, 0, t) = \begin{cases} P_1 f\left(\frac{x_1}{vt}\right) = P_0(x_1, t), & x_1 < vt \\ 0, & x_1 > vt \end{cases} \quad (2)$$

где $x_1 = vt$ координата давления на поверхности, $P_1 = \text{const}$. В силу изэнтропичности и (1) можно записать приближенное граничное условие для скорости звука в жидкости

$$a_1 = a(x_1, 0, t) = a_0 \left[1 + \frac{P_0(x_1, t)}{Bn} \frac{n-1}{2} \right], \quad (3)$$

где a_0 — невозмущенная скорость звука.

Пусть скорость давления по поверхности сверхзвуковая.

Для решения задачи используем простые волны [1]. В области, расположенной вне влияния точки 0 (вне дифракционной области), можно течение за ударной волной считать простой волной [1].

В силу автомодельности все параметры суть функции величины

$\xi = \frac{x_1}{t}$, $\eta = \frac{x_2}{t}$. Уравнение поверхностей уровня запишется [1] в

виде

$$\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi - a(\varphi) - \frac{2}{n-1} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos(s - \varphi) a'(S) dS = 0. \quad (4)$$

Для определения $a(\varphi)$ служит условие (3)

$$\xi' \cos \varphi - a_1(\xi') - \frac{2}{n-1} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos(S - \varphi) a_1'(S) dS = 0. \quad (5)$$

Из этого уравнения можно определить φ в функции ξ' и, следовательно, a в функции ξ .

Для простоты рассмотрим линейное условие (3) $a_1(\xi) = A\xi$. При этом поверхности уровня запишутся [1] в виде

$$\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi - a(\xi, \eta) = 0. \quad (6)$$

Граничное условие дает $\xi' \cos \varphi = a_1(\xi') = A\xi'$ или $\cos \varphi = A$. Для поверхности уровня $a(\xi, \eta) = a_1(\xi')$.

Теперь (6) переищется

$$\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi = \xi' \cos \varphi, \quad (7)$$

где $\cos \varphi = A$. Для определения ударной линии на глубине, запишем равенство для скорости D ударной волны

$$D = \frac{\eta - \xi \frac{d\eta}{d\xi}}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}}. \quad (8)$$

В семействе простых волн (7) на ударной волне η будет функцией от ξ и следовательно ξ будет функцией от ξ' .

Поэтому имеем

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \left(\frac{d\xi'}{d\xi} - 1 \right) \operatorname{ctg} \varphi. \quad (9)$$

В изэнтропическом приближении для D имеем [2]

$$D = \frac{u_0 + a + u}{2} + \frac{1}{8a_0} (a + u - a_0)^2,$$

где u — скорость потока $u = \frac{2}{n-1} (a - a_0)$ [1], однако для нашей точности достаточна формула Пфрима [2].

Подставляя (9) в (8) и используя формулу Пфрима [2], имеем уравнение

$$D = \frac{a_0 + A\xi' + \frac{2}{n-1} (A\xi' - a_0)}{2} = \frac{\left(\xi \frac{d\xi'}{d\xi} - \xi' \right) \operatorname{ctg} \varphi}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}}. \quad (10)$$

Уравнение (10) — дифференциальное уравнение для определения ξ в функции ξ . Если рассматривать пологие волны, что соответствует $V \gg a_0$, имеем

$$\frac{n+1}{2(n-1)} A \xi' + \frac{n-3}{2(n-1)} a_0 = -\xi \left(\frac{d\xi'}{d\xi} - \xi' \right) \operatorname{ctg} \varphi. \quad (11)$$

Граничное условие $\xi'|_{\xi=0} = V$.

Решение (11) имеет вид

$$\xi' = V \left(\frac{\xi}{v} \right)^{-\frac{n+1}{n-1} \frac{\sin \varphi}{2} + 1} + \frac{-a_0 \frac{n-3}{n-1} \sin \varphi}{2A \left(1 + \frac{n+1}{n-1} \frac{\sin \varphi}{2} \right)} \times \\ \times \left[\left(\frac{\xi}{v} \right)^{-\frac{n+1}{n-1} \frac{\sin \varphi}{2} + 1} - 1 \right]. \quad (12)_1$$

Теперь для скорости звука имеем $a = A \xi'$, а давление получится по приближенной формуле [3]

$$a = a_0 \left[1 + \frac{n-1}{2} \frac{P(\xi, \eta)}{Bn} \right]. \quad (12)$$

Если взять воду ($n=7$, $B=3045 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ [3]) и сделать расчеты по формулам (12)₁ и (12), можно получить давление на ударной волне.

В частности, для $M = \frac{v}{a_0} = 6$ и $A = \frac{1}{3}$ в точке с абсциссой $\xi = 0,8V$ имеем $\xi' = 0,65V$

$$P(\xi, \eta) = 770 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2},$$

наибольшее давление на фронте $P = 7100 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$.

Для V близких к a_0 в (8) можно пренебречь единицей по сравнению с $\left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2$ и также решить задачу на ударной волне.

Рассмотрим ту же задачу геометрическим методом [3].

В качестве элементарных возмущений на поверхности рассмотрим волны Римана; уравнение этих волн, возникших в момент t' в точке x' , имеет вид

$$(x_1 - x' - u_1 t + u_1 t')^2 + x_2^2 = a_1^2 (t - t')^2, \quad (13)$$

u_1 — скорость жидкости вдоль ox_1 , a_1 — скорость звука [3].

$$u_1 = a_0 \frac{P_a \left(\frac{x'}{t'} \right)}{Bn}; \quad a_1 = a_0 \left[1 + \frac{n-1}{2} \frac{P_a \left(\frac{x'}{t'} \right)}{Bn} \right]. \quad (14)$$

Если ввести $\xi = \frac{x_1}{t}$, $\tau_1 = \frac{x_2}{t}$, $\xi' = \frac{x'}{t'}$ и написать огибающую волн, имеющих данное давление $P_a\left(\frac{x'}{t'}\right)$ или данное ξ' , легко найти

$$\frac{(\xi' - u_1) - (\xi - u_1)}{\sqrt{\frac{(\xi' - u_1)^2}{a_1^2} - 1}} = \tau_1. \quad (15)$$

В случае $a_1 = A\xi$ уравнение (15), после отбрасывания малых u_1 , совпадает с (7). Следовательно процедура определения параметров на ударной волне этим методом приведет к тем же результатам. Для произвольного закона $a_1(\xi)$, (15) должна являться в нашем приближении решением (5), в чем можно убедиться подстановкой. Подставляя (15) в (10), найдем ударную волну.

Если считать функцию f в (2) резко падающей, можно считать давление за ударным фронтом равным нулю. Тогда можно пользоваться результатами [3]. Приведенный метод годен для давления порядка нескольких тысяч $\frac{\kappa\Gamma}{\text{см}^2}$.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 6.I.1960

Ա. Գ. Բագդոև

ԻՋԵՆՏՐՈՊԻԿ ԽՆԴԻՐ ՀԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՃՆՇՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

Ա. Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկված է հասանքի որոշումը հիպերբոլական տիրույթում կիսատարածության կզրին կիրառված հարվածային ճնշման տեղեկության տակ:

Լուծումը դրսևում է պարզ ալիքների մեթոդով: Խնդիրը մեկնարկված է երկրաչափորեն և բերված է թվային օրինակ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Яненко Н. Н. Бегущие волны для квазилинейных уравнений. „ДАН СССР“, 199, № 1, 1956.
2. Станюкович К. П. Неуставовизшиесе движения силошной ереды. Гостехиздат М.—Л., 1954.
3. Гриб А. А., Рябинин А. Г., Христианович С. А. Отражение ударной волны в волне от свободной поверхности. „ПММ“, № 20, вып. 4, 1956.