

ФИЗИКА

П. А. Безирганян

Точность фокусировки рентгеновских лучей
изогнутыми кристаллами

(метод шлифованного кристалла)

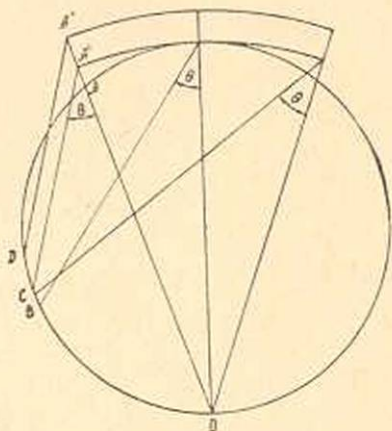
В работе [1], посвященной фокусировке отраженных от кристаллов рентгеновских волн, утверждается, якобы в так называемом Иогансоновском методе фокусировки ширина рентгеновских спектральных линий не зависит от длины участвующей в отражении части кристалла и что якобы этим методом добиваются точечной фокусировки отраженных от кристаллов рентгеновских волн.

В настоящей работе показано, что во всех случаях горизонтальной фокусировки рентгеновских лучей с помощью изогнутых кристаллов, в том числе и в случае фокусировки по Иогансону, ширина спектральных линий зависит от длины рабочей части кристалла и толщины его.

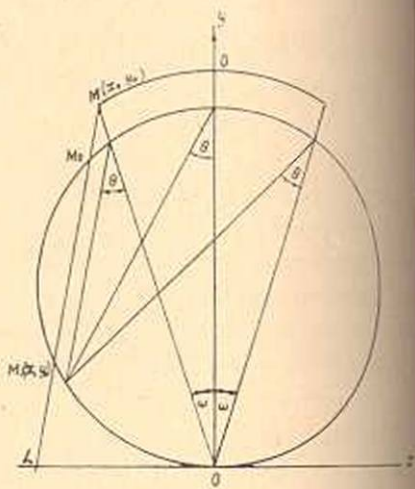
Методы Иоганна и Кошуа дают фокусировку отраженных рентгеновских волн в конечной области, размеры которой зависят от длины и толщины действующей части отражающего кристалла. С увеличением длины и толщины действующей части кристалла увеличивается ширина спектральных линий. Ширину спектральной линии, обусловленную размерами кристалла, можно представить из двух частей: одна из них отлична от нуля даже в случае бесконечно тонкого кристалла и зависит только от длины отражающего участка кристалла; другая, которая равна нулю при бесконечно тонком кристалле, зависит как от толщины, так и от длины кристалла и, при данной толщине действующей части кристалла, увеличивается с увеличением последнего. Эти утверждения легко проверить простыми геометрическими построениями, аналогично представленному на фиг. 1. Действительно, ширина спектральной линии $ВД$ (см. фиг. 1) состоит из двух частей $ВС$ и $СД$. $ВС$ зависит только от длины кристалла и отлична от нуля даже в случае одной отражающей плоскости, $СД$ исчезает при бесконечном уменьшении толщины кристалла и увеличивается с увеличением последней, однако, $СД$ при данной толщине кристалла увеличивается с увеличением длины кристалла.

Ширина спектральной линии, зависящая только от длины рабочей части кристалла, того же порядка, что и часть, зависящая только от

толщины кристалла при данной длине кристалла. Действительно, мерой ширины спектральной линии, при данной длине l кристалла, является отрезок AA' (см. фиг. 1), а мерой ширины спектральной линии, зависящей только от толщины при данной длине кристалла, является отрезок $A'A''$. Толщина фокусирующего кристалла в методах изогинного кристалла (отрезок $A'A''$) обычно бывает порядка 0,1–0,3 мм. Величину отрезка AA' можно определить следующим образом (см. фиг. 1).



Фиг. 1.



Фиг. 2.

$$AA' = 2R - 2R \cos \omega = 2R (1 - \cos \omega),$$

где R — радиус круга Роуланда, $2\omega = \frac{l}{2R}$ — угловой раcтвор кристалла, где l — длина действующей части кристалла.

Обычно, l порядка 20–40 мм, а R порядка 250–500 мм и, следовательно, $AA' \sim 0,2$ мм, т. е. того же порядка, что и $A'A''$.

Следовательно, указанные две части ширины спектральной линии тоже одного порядка.

Рассмотрим теперь случай фокусировки по Иогансону. Этот случай соответствует предварительной шлифовке кристаллической пластинки по цилиндрической поверхности радиуса R и последующему изгибу по поверхности цилиндра радиуса $R/2$. В этом случае точка пересечения продолжений радиальных атомных рядов не совпадает с центром кривизны поверхности кристалла и радиус кривизны атомных рядов будет в 2 раза больше радиуса кривизны поверхности кристалла.

Как показывают расчеты [2], [3], когда кривизна поверхности кристалла больше кривизны атомных плоскостей, величина интенсивности отраженной волны та же самая, что и в случае, когда кривизна поверхности кристалла равна кривизне атомных плоскостей. Однако преимущество рассматриваемого случая состоит в том, что для рас

ходящихся падающих пучков область сходимости волн, отраженных различными плоскостями (случай Кошуа), меньше, чем область этой сходимости в случае, когда кривизна поверхности равна кривизне атомных плоскостей.

В этом случае часть ширины спектральной линии, зависящей только от длины отражающего кристалла для внутренней поверхности кристалла (см. фиг. 2), равна нулю (точечная фокусировка). Однако, если кристалл, изогнутый по Иогансону, разбить на бесконечно тонкие полосы, параллельные цилиндрической поверхности, то точечная фокусировка получится только для первой (внутренней) полосы (фиг. 2). Лучи, отраженные от остальных полос, фокусируются в конечной области, размеры которой для данной полосы тем больше, чем больше длина кристалла.

Таким образом, часть ширины спектральной линии, которая одновременно зависит от длины и толщины части кристалла, принимающей участие в отражении, шлифовкой несколько не уменьшается. Покажем это аналитически.

Пусть луч MM_1 (фиг. 2), отраженный под углом θ от точки M внешней полосы кристалла, пересекается с окружностью радиуса R в точке $M_1(x_1, y_1)$. Найдем зависимость координат этой точки от угла ω , т. е. от длины дуги MO' . Для этого найдем сначала координаты x_0 и y_0 точки пересечения прямой MM_1 с окружностью радиуса $R+d$ (где d — толщина кристалла).

Уравнение прямой AO , проходящей через точки $M(x_0, y_0)$ и $O(0,0)$, будет

$$y = -\operatorname{ctg} \omega \cdot x, \quad (1)$$

а уравнение окружности радиуса $R+d$ будет

$$x^2 + y^2 - 2Ry = 2Rd + d^2. \quad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), находим координаты x_0 и y_0 точки M

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= -\frac{1}{2} R \sin 2\omega \pm \sqrt{\frac{1}{4} R^2 \sin^2 2\omega + (2Rd + d^2) \sin^2 \omega}, \\ y_0 &= -\operatorname{ctg} \omega \left[-\frac{1}{2} R \sin 2\omega \pm \sqrt{\frac{1}{4} R^2 \sin^2 2\omega + (2Rd + d^2) \sin^2 \omega} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Для координат точки M перед радикалом надо взять знак минус. Действительно, для случая $\omega=0$ ордината точки M будет

$$y_0 = 2R + d, \quad (4)$$

с другой стороны, в случае $\omega=0$ для y_0 из (3) получим

$$\begin{aligned} y_0 &= - \left[-R \cos^2 \omega \pm \cos \omega \sqrt{R^2 \cos^2 \omega + (2Rd + d^2)} \right] = \\ &= - \left[-R \pm (R + d) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Как видно, (4) и (5) совпадают только в том случае, если перед радикалом взять знак минус.

Таким образом, из (3) получим

$$\begin{aligned}x_0 &= -\sin \omega [R \cos \omega + \sqrt{R^2 \cos^2 \omega + (2Rd + d^2)}], \\y_0 &= \cos \omega [R \cos \omega + \sqrt{R^2 \cos^2 \omega + (2Rd + d^2)}].\end{aligned}\quad (6)$$

$M(x_1, y_1)$, есть точка пересечения прямой ML и окружности радиуса R .
Уравнение прямой ML будет

$$y - y_0 = k_1(x - x_0), \quad (7)$$

$$\text{где } k_1 = \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{2} + (\omega - \theta) \right] = -\operatorname{ctg}(\omega - \theta) = \operatorname{ctg}(\theta - \omega). \quad (8)$$

Из (7) и (8) получим

$$\begin{aligned}y - \cos \omega [R \cos \omega + \sqrt{R^2 \cos^2 \omega + (2Rd + d^2)}] &= \\&= \operatorname{ctg}(\theta - \omega) [x + \sin \omega [R \cos \omega + \sqrt{R^2 \cos^2 \omega + (2Rd + d^2)}]].\end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}A &= \operatorname{ctg}(\theta - \omega), \\B &= [R \cos \omega + \sqrt{R^2 \cos^2 \omega + (2Rd + d^2)}] [\cos \omega + \sin \omega \operatorname{ctg}(\theta - \omega)],\end{aligned}\quad (9)$$

Тогда уравнение прямой ML можем переписать в виде

$$y - Ax = B. \quad (10)$$

Уравнение окружности радиуса R будет

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2. \quad (11)$$

Решая совместно (10) и (11), получим координаты точки $M_1(x_1, y_1)$

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{A(R - B)}{1 + A^2} \pm \sqrt{\frac{A^2(R - B)^2}{(1 + A^2)^2} - \frac{B(B - 2R)}{1 + A^2}}, \\y_1 &= \frac{A^2(R - B)}{1 + A^2} \pm \sqrt{\frac{A^2(R - B)^2}{(1 + A^2)^2} - \frac{B(B - 2R)}{1 + A^2}} + B.\end{aligned}\quad (12)$$

Сделаем следующие преобразования:

$$\frac{A}{1 + A^2} = \sin(\theta - \omega) \cos(\theta - \omega); \quad \frac{1}{1 + A^2} = \sin^2(\theta - \omega),$$

тогда из (12) получим:

$$\begin{aligned}x_1 &= \sin(\theta - \omega) [(R - B) \cos(\theta - \omega) \pm \\&\pm \sqrt{(R - B)^2 \cos^2(\theta - \omega) - B(B - 2R)}], \\y_1 &= \cos(\theta - \omega) [(R - B) \cos(\theta - \omega) \pm \\&\pm \sqrt{(R - B)^2 \cos^2(\theta - \omega) - B(B - 2R)}] + B.\end{aligned}\quad (13)$$

В этом случае нетрудно убедиться, что для точки $M_1(x_1, y_1)$ перед радикалом надо взять знак минус, а для точки M_2 — знак плюс. Действительно, из фиг. 2 видно, что

$$y_2 > y_1 \text{ и } |x_2| < |x_1| \text{ при } \theta > \omega, |x_2| > |x_1| \text{ при } \theta < \omega. \quad (14)$$

С другой стороны, в случае $\omega = 0$, неравенства (14) удовлетворяются только в том случае, если перед радикалом в (13) взять знак минус.

Таким образом, для координат точки $M_1(x_1, y_1)$ получим

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \sin(\theta - \omega) [(R - B) \cos(\theta - \omega) - \\ &- \sqrt{(R - B)^2 \cos^2(\theta - \omega) - B(B - 2R)}], \\ y_1 &= \cos(\theta - \omega) [(R - B) \cos(\theta - \omega) - \\ &- \sqrt{(R - B)^2 \cos^2(\theta - \omega) - B(B - 2R)}] + B. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Как видно из (15), координаты точки $M_1(x_1, y_1)$ зависят от угла ω , т. е. от длины кристалла. Значит лучи, отраженные от различных точек данной полосы, пересекутся с окружностью радиуса R в различных точках (не точечная фокусировка).

Легко показать, что с увеличением угла ω y_1 и $|x_1|$ увеличиваются (при $\theta > \omega$), т. е. точка $M_1(x_1, y_1)$ перемещается по окружности радиуса R и, таким образом, увеличивается область сходимости отраженных волн и ширина спектральной линии.

Вычислим, с помощью (15), численные значения координат x_1 и y_1 в случае $\theta = 30^\circ$, $d = 0,2$ мм, $R = 500$ мм для различных углов ω (для различных длин кристалла).

Численные значения $|x_1|$ и y_1 , приведенные в таблице, показывают, что с увеличением угла ω (при $\theta > \omega$) $|x_1|$ и y_1 увеличиваются, т. е. размеры области сходимости, следовательно, и ширина спектральной линии, увеличиваются с увеличением длины кристалла.

R в мм	d в мм	θ	ω	$ x_1 $	y_1
500	0,2	30°	0°	433,17	250,95
500	0,2	30°	1°	433,29	251,84
500	0,2	30°	2°	433,34	252,73
500	0,2	30°	3°	433,46	253,27

Как уже выше было сказано, в случае $d = 0$ получается точечная фокусировка. Действительно, в случае $d = 0$ из (15) получаем

$$x_1 = -R \sin 2\theta,$$

$$y_1 = 2R \sin^2 \theta,$$

т. е. координаты точки $M_1(x_1, y_1)$ только в случае $d = 0$ не зависят от угла ω (от длины кристалла) и все лучи, отраженные от точек дуги, совпадающей с окружностью радиуса R , пересекутся точно в одной точке $M_1(x_1, y_1)$ окружности радиуса R .

Таким образом, и в случае фокусировки по Иогансону, ширина спектральной линии зависит от длины отражающего кристалла.

Ереванский государственный
университет

Поступила 9 X 1959

Պ. Ա. Բեզիրգանյան

ՌԵՆՏԳԵՆՅԱՆ ՃԱՌԱԳԱՅՔՆԵՐԻ ՃՎԱԾ ԲՅՈՒՐԵՂՈՎ ՖՈԿՈՒՍԱՑՄԱՆ ՃՇԳՐՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Մի քանի հեղինակների կողմից արտահայտված է այն միտքը, որ իբրև թե, ալպակո կոչված, Իոհանսոնի մեթոդով ֆոկուսացնելիս սենտրոնյան ալպակո տրալ գծերի երկարությունը կախված չի լինի բյուրեղի գործող մասի երկարությունից:

Տվյալ հոդվածում ապացուցվում է, որ հորիզոնական ֆոկուսացման բոլոր դեպքերում, նույն թվում և Իոհանսոնի ֆոկուսացման դեպքում, սենտրոնյան ալպակո տրալ գծերի լայնությունը կախված է անդրադարձնող բյուրեղի գործող մասի երկարությունից և հաստատվում է:

Ալպակո տրալ գծի լայնությունը պատկերացվում է երկու մասից բաղկացած:

Ոչ մասերից մեկը կախված է միայն բյուրեղի երկարությունից և չափանշանում նույնիսկ անսահման բարակ բյուրեղի դեպքում, իսկ մյուսը կախված է բյուրեղի և՛ երկարությունից, և՛ հաստությունից:

Ալպակո տրալ գծի լայնության աղբյուրը մասը անհատաբար է անսահման բարակ բյուրեղի դեպքում, իսկ վերջավոր հաստություն ունեցող բյուրեղի դեպքում մեծանում է բյուրեղի գործող մասի երկարության մեծացման հետ միասին: Հոդվածում տեսական հաշիվներով ցույց է տրվում, որ ալպակո տրալ գծի լայնությունը բյուրեղի վերջավոր հաստության դեպքում կախված է ֆոկուսացնող մասի երկարությունից:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Исследование радиоактивных излучений кристалл-дифракционным методом (сборник статей под редакцией Боровского И. Б., Издат. ност. литер., Москва, 1949 г.), статья Д. Дю Монда, стр. 52—64.
2. Безирганиян П. А. Диссертация, МГУ, 1953 г.
3. Боровский Б. И. и Безирганиян П. А. Дифракция рентгеновских лучей на изогнутых кристаллах. «Научные труды Ереванского университета», 48, 1956 г.