

У Жуй-фын

Температурные напряжения в арочных плотинах с учетом ползучести бетона

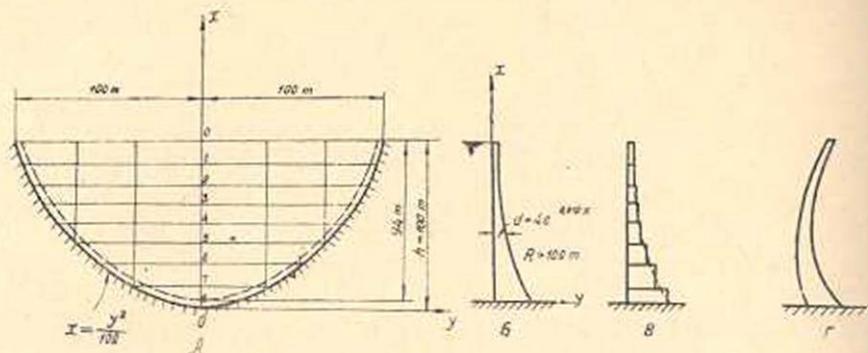
Метод расчета арочных плотин, когда последние рассматриваются как пространственные системы, за последнее время получает все более интенсивное развитие. Основы этого метода были разработаны и в дальнейшем усовершенствованы в работах [1—3]. Сущность этого метода заключается в следующем: арочную плотину разбиваем на систему горизонтальных арок и вертикальных консолей и рассматриваем их совместную работу. Это позволяет учесть влияние главных факторов, а именно: радиальные усилия и крутящие моменты, а также податливость упругого основания. При расчете арочных плотин по этому методу материал его, т. е. бетон, рассматривается как идеально-упругий. Однако, на основании данных многочисленных экспериментальных исследований установлено, что бетон обладает свойством ползучести, которое проявляется даже при малых напряжениях и нормальных температурах. При этом, как показывают опыты, деформации ползучести, развивающиеся в бетоне, могут внести существенное изменение в картину напряженного состояния сооружений.

В настоящей работе, на основании метода развитого в работах [1, 2] и линейной теории ползучести Маслова-Арутюняна [4], дается способ расчета температурных напряжений в арочных плотинах с учетом ползучести бетона.

§ 1. Постановка задачи

Арочная плотина рассматривается как система взаимно-поддерживающих горизонтальных арок и вертикальных консолей. В точках пересечения арок и консолей обеспечиваются условия совместности радиальных деформаций и углов поворота (фиг. 1).

При определении температурных напряжений в теле плотины учитываем только горизонтальные деформации, обусловленные изменением температуры. Предполагается, что напряжения, обусловленные вертикальными температурными деформациями, ничтожны и ими можно пренебречь. Далее, принимая гипотезу плоских сечений, предполагаем, что функция температуры зависит только от толщины плотины.



Фиг. 1.

тины. Тогда для рассматриваемой консоли можно записать связь между деформациями и напряжениями с учетом ползучести в следующем виде

$$yW''(t, x) - \alpha T(y) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \frac{1}{E(t)} \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau) K(t, \tau) d\tau^*, \quad (a)$$

где

$$K(t, \tau) = E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[C(t, \tau) + \frac{1}{E(\tau)} \right],$$

$C(t, \tau)$ — мера ползучести, $E(t)$ — модуль упругости, α — коэффициент линейного расширения, $W(t, x)$ — прогиб.

Решая (a) относительно $\sigma(t)$, находим

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & [E(t)yW''(t, x) - E(t)\alpha T(y)] + \\ & + \int_{\tau_1}^t [E(\tau)yW''(\tau, x) - E(\tau)\alpha T(y)] R(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (b)$$

где $R(t, \tau)$ — резольвента ядра $K(t, \tau)$.

Подставляя значение $\sigma(t)$ в уравнение равновесия

$$M = \int_{\omega} \sigma y d\omega,$$

где ω — площадь поперечного сечения консоли, получаем

$$\begin{aligned} M(t) = & E(t)IW''(t, x) - \Omega(t) + \\ & + \int_{\tau_1}^t [E(\tau)IW''(\tau, x) - \Omega(\tau)] R(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (b)$$

или

$$E(t)IW''(t, x) - \Omega(t) = M(t) -$$

* Здесь и в дальнейшем штрихами обозначаются производные по x .

$$- \int_{\tau_1}^t M(\tau) K(t, \tau) d\tau, \quad (r)$$

где

$$\Omega(t) = E(t) \alpha \int_{\omega} T(y) y d\omega, \quad I = \int_{\omega} y^2 d\omega.$$

Если температура по высоте консоли не меняется, то имеем следующие соотношения

$$M'(t, x) = E(t) [I W''(t, x)]' + \\ + \int_{\tau_1}^t E(\tau) [I W''(\tau, x)]' R(t, \tau) d\tau = Q(t)$$

$$M''(t, x) = Q'(t) = q(t) = E(t) [I W''(t, x)]'' + \\ + \int_{\tau_1}^t [E(\tau) I W''(\tau, x)]'' R(t, \tau) d\tau$$

или

$$[E(t) I W''(t, x)]'' = q(t) - \int_{\tau_1}^t q(\tau) K(t, \tau) d\tau. \quad (d)$$

Так как арочная плотина подвергается только температурному воздействию, то взаимные действия между аркой и консолью можно выразить следующим образом

$$q_{\text{конс.}} = -q_{\text{арка}}.$$

а

$$q_{\text{арка}} = -g_1(t, x) [W(t, x) - W_T(x)] + [g_2(t, x) W'(t, x)]', \quad (e)$$

где W_T — радиальное перемещение арки в месте рассматриваемой консоли от действия изменения температуры T , $g_1(t, x)$ — интенсивность равномерно распределенной радиальной нагрузки, вызывающей единичное перемещение в рассматриваемой точке арки, $g_2(t, x)$ — интенсивность равномерно распределенного крутящего момента, вызывающего единичный угол поворота рассматриваемого сечения вокруг оси арки.

Второй член в выражении (e) учитывает влияние кручения между аркой и консолью.

Таким образом, для определения прогиба консоли от воздействия температуры и сопротивления арок, получаем следующее интегродифференциальное уравнение

$$[E(t) I W''(t, x)]'' = g_1(t, x) W_T(t, x) -$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^t g_1(\tau, x) W_{\tau}(\tau, x) K(t, \tau) d\tau - \\
 & - g_1(t, x) W(t, x) - [g_2(t, x) W'(t, x)]' + \\
 & + \int_0^t [g_1(\tau, x) W(\tau, x) + [g_2(\tau, x) W'(\tau, x)]'] K(t, \tau) d\tau. \quad (1)
 \end{aligned}$$

§ 2. Решение уравнения (1)

Для решения уравнения (1) будем пользоваться методом Б. Г. Галеркина. Вначале рассмотрим несколько случаев стационарного потока тепла.

1°. *Консоль постоянного сечения с жесткой заделкой.*

В этом случае радиальное перемещение арки не зависит от x , y , а зависит только от t — $W_{\tau} = W(t)$, а $g_1(t)$, $g_2(t)$ вдоль высоты h консоли не меняются.

Будем искать $W(t, x)$ в виде ряда

$$W(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \varphi_n(x), \quad (2)$$

где $T_n(t)$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению в дальнейшем, $\varphi_n(x)$ — фундаментальная балочная функция, представляемая в виде

$$\varphi_n(x) = \sin \frac{\alpha_n x}{h} - \operatorname{sh} \frac{\alpha_n x}{h} - \beta_n \left(\cos \frac{\alpha_n x}{h} - \operatorname{ch} \frac{\alpha_n x}{h} \right), \quad (3)$$

$$\beta_n = \frac{\operatorname{sh} \alpha_n + \sin \alpha_n}{\operatorname{ch} \alpha_n - \cos \alpha_n}, \quad \alpha_1 = 1.875,$$

$$\alpha_2 = 4.694, \dots, \quad \alpha_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}. \quad (4)$$

Функция $\varphi_n(x)$ удовлетворяет всем граничным условиям:

$$\text{при } x=0 \quad W = W' = 0,$$

$$\text{при } x=h \quad W'' = W''' = 0.$$

Подставляя (2) в уравнение (1), умножим обе части на $\varphi_n(x) dx$ и интегрируя от 0 до h , получаем следующие интегральные уравнения для определения $T_n(t)$

$$T_n(t) \left\{ [E(t) I \alpha_n^4 + g_1(t)] \int_0^h \varphi_n^2(x) dx + g_2(t) \int_0^h \varphi_n'(x) \varphi_n(x) dx \right\} =$$

$$= \left[W_T(t) g_1(t) - \int_{\tau_1}^t W_T(\tau) g_1(\tau) K(t, \tau) \right] \int_0^h \varphi_n(x) dx + \\ + \int_{\tau_1}^t \left\{ \int_0^h [g_1(\tau) \varphi_n^2(x) + g_2(\tau) \varphi_n'(x) \varphi_n(x)] dx \right\} T_n(\tau) K(t, \tau) d\tau. \quad (5)$$

Уравнение (5) является линейным интегральным уравнением типа Вольтерра, которое нетрудно решается численным методом.

2. Консоль переменного сечения с жесткой заделкой.

Для первого приближения получаем

$$T_1(t) \left\{ E(t) \int_0^h \varphi_1^2(x) l(x) dx + 2E(t) \int_0^h \varphi_1''(x) \varphi_1(x) l'(x) dx + \right. \\ + E(t) \int_0^h l''(x) \varphi_1'(x) \varphi_1(x) dx + \int_0^h g_2(t, x) \varphi_1'(x) \varphi_1(x) dx + \\ \left. + \int_0^h g_2'(t, x) \varphi_1'(x) \varphi_1(x) dx + \int_0^h g_1(t, x) \varphi_1^2(x) dx \right\} = \\ = \int_0^h [W_T(t) g_1(t, x) - \int_{\tau_1}^t W_T(\tau) g_1(\tau, x) K(t, x) d\tau] \varphi_1(x) dx + \\ + \int_{\tau_1}^t \left\{ \int_0^h [g_1(\tau, x) \varphi_1^2(x) + g_2(\tau, x) \varphi_1'(x) \varphi_1(x) + \right. \\ \left. + g_2'(\tau, x) \varphi_1'(x) \varphi_1(x)] dx \right\} T_1(\tau) K(t, \tau) d\tau \quad (6)$$

и

$$W_1 = T_1(t) \varphi_1(x).$$

Для второго приближения получим систему двух интегральных уравнений, которая в общем случае решается только численным методом.

При решении конкретной задачи при помощи уравнения (6), можно функции g_1 , g_2 и l , с достаточной для практического приложения точностью, аппроксимировать простыми функциями вида $Ae^{-\lambda x}$.

3. Консоль постоянного сечения с упругой заделкой.

В этом случае у основания консоли изгибающий момент M и перерезывающая сила Q будут равны

$$\left. \begin{aligned} M(0) &= \int_0^h [g_1(t) W_T(t) - g_1(t) W(t, x) - g_2(t) W''(t, x)] x dx, \\ Q(0) &= \int_0^h [g_1(t) W_T(t) - g_1(t) W(t, x) - g_2(t) W''(t, x)] dx. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Подставляя (2) в (7), получаем

$$\begin{aligned} M(t, 0) &= \frac{h^2}{2} g_1(t) W_T(t) - g_1(t) \left[W(t, 0) \cdot \frac{h^2}{2} + W'(t, 0) \frac{h^3}{3} \right] - \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) [g_1(t) A_n + g_2(t) B_n], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} Q(t, 0) &= h g_1(t) W_T(t) - g_1(t) \left[W(t, 0) h + W'(t, 0) \frac{h^2}{2} \right] - \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) [g_1(t) C_n + g_2(t) D_n], \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^h \varphi_n(x) x dx, & B_n &= \int_0^h \varphi_n'(x) x dx, \\ C_n &= \int_0^h \varphi_n(x) dx, & D_n &= \int_0^h \varphi_n'(x) dx. \end{aligned} \quad (10)$$

С другой стороны, следуя гипотезе Фогта, имеем

$$\begin{aligned} W(t, 0) &= \frac{k_2 M(t, 0)}{E_\Phi d} + \frac{k_3 Q(t, 0)}{E_\Phi}, \\ W'(t, 0) &= -\frac{k_1 M(t, 0)}{E_\Phi d^2} + \frac{k_5 Q(t, 0)}{E_\Phi d}, \end{aligned} \quad (11)$$

где k_1, k_2, k_3, k_5 — коэффициенты основания, E_Φ — модуль упругости основания, d — толщина консоли в месте заделки.

Из уравнений (8), (9) и (11) находим

$$\left. \begin{aligned} W(t, 0) &= b_1 - \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \gamma_n, \\ W'(t, 0) &= b_2 - \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \lambda_n, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где

$$b_1 = \frac{a_3 a_5 + a_2 a_6}{a_1 a_5 + a_2 a_4}, \quad b_2 = \frac{a_3 a_4 - a_1 a_6}{a_1 a_5 + a_2 a_4}$$

$$a_1 = 1 + \left(\frac{k_5}{E_\phi d} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{k_3}{E_\phi} h \right) g_1(t),$$

$$a_2 = \left(\frac{k_5}{E_\phi d} \cdot \frac{h^2}{3} + \frac{k_3}{E_\phi} \cdot \frac{h^2}{2} \right) g_1(t),$$

$$a_3 = \left(\frac{k_5}{E_\phi d} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{k_3}{E_\phi} h \right) g_1(t) W_T(t),$$

$$a_4 = \left(\frac{k_1}{E_\phi d^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{k_5 h}{E_\phi d} \right) g_1(t),$$

$$a_5 = 1 - \left(\frac{k_1}{E_\phi d^2} \cdot \frac{h^3}{3} + \frac{k_5}{E_\phi d} \cdot \frac{h^2}{2} \right) g_1(t),$$

$$a_6 = \left(\frac{k_1}{E_\phi d^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{k_5 h}{E_\phi d} \right) g_1(t) W_T(t),$$

$$\gamma_n = \frac{1}{a_1 a_5 + a_2 a_4} \left\{ \left\{ a_5 \left[\frac{k_5}{E_\phi d} |g_1(t) A_n + g_2(t) B_n| + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{k_3}{E_\phi} |g_1(t) C_n + g_2(t) D_n| \right] \right\} + a_2 \left[\frac{k_1}{E_\phi d^2} |g_1(t) A_n + g_2(t) B_n| + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{k_5}{E_\phi} |g_1(t) C_n + g_2(t) D_n| \right] \right\},$$

$$\lambda_n = \frac{1}{a_1 a_5 + a_2 a_4} \left\{ \left\{ a_3 \left[\frac{k_5}{E_\phi d} |g_1(t) A_n + g_2(t) B_n| + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{k_3}{E_\phi} |g_1(t) C_n + g_2(t) D_n| \right] \right\} - \right. \\ \left. - a_1 \left[\frac{k_1}{E_\phi d^2} |g_1(t) A_n + g_2(t) B_n| + \frac{k_5}{E_\phi d} |g_1(t) C_n + g_2(t) D_n| \right] \right\}.$$

Тогда выражение (2) принимает следующий вид

$$W(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) [\varphi_n(x) - \gamma_n - \lambda_n x] + b_1 + b_2 x, \quad (13)$$

которое удовлетворяет всем граничным условиям.

В первом приближении для определения $T_1(t)$ получаем интегральное уравнение

$$T_1(t) [x_1^4 E(t) I f_1(t) + g_1(t) f_2(t) + g_2(t) f_3(t)] = \\ = \int_0^h [W_T(t) g_1(t) - \int_0^t W_T(\tau) g_1(\tau) K(t, \tau) d\tau] [\varphi_1(x) - \gamma_1 - \lambda_1 x] dx +$$

$$+ \int_0^t [g_1(\tau) f_2(\tau) + g_2(\tau) f_3(\tau)] T_1(\tau) K(t, \tau) d\tau, \quad (14)$$

где

$$f_1(t) = \int_0^h \varphi_1(x) [\varphi_1(x) - \gamma_1 - \lambda_1 x] dx,$$

$$f_2(t) = \int_0^h [|\varphi_1(x) - \gamma_1 - \lambda_1 x| + b_1 + b_2 x] |\varphi_1(x) - \gamma_1 - \lambda_1 x| dx,$$

$$f_3(t) = \int_0^h |\varphi_1^*(x) [\varphi_1(x) - \gamma_1 - \lambda_1 x] dx.$$

4°. Консоль переменного сечения с упругой заделкой.

Здесь, подобно случаю 3, различие заключается только в том, что в данном случае g_1 , g_2 и W_T зависит как от x , так и от t , а l зависит от x . При этом имеем

$$\left. \begin{aligned} W(t, 0) &= b_1^* - \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \gamma_n^* \\ W'(t, 0) &= b_2^* - \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \lambda_n^* \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

и

$$W(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) [\varphi_n(x) - \gamma_n^* - \lambda_n^* x] + b_1^* + b_2^* x, \quad (16)$$

где

$$b_1^* = \frac{a_3^* a_5^* + a_2^* a_6^*}{a_1^* a_5^* + a_2^* a_4^*}, \quad b_2^* = \frac{a_3^* a_1^* - a_1^* a_6^*}{a_1^* a_5^* + a_2^* a_4^*},$$

$$a_1^* = 1 + \frac{k_5}{E_\Phi d} \int_0^h g_1(t, x) x dx + \frac{k_3}{E_\Phi} \int_0^h g_1(t, x) dx,$$

$$a_2^* = \frac{k_5}{E_\Phi d} \int_0^h g_1(t, x) x^2 dx + \frac{k^3}{E_\Phi} \int_0^h g_1(t, x) x dx,$$

$$a_3^* = \left(\frac{k_5}{E_\Phi d} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{k_2 h}{E_\Phi} \right) g_1(t, x) W_T(t, x),$$

$$a_4^* = \frac{k_1}{E_\Phi d^2} \int_0^h g_1(t, x) x dx + \frac{k_5}{E_\Phi d} \int_0^h g_1(t, x) dx,$$

$$\begin{aligned}
 a_5^* &= 1 - \frac{k_1}{E_\Phi d^2} \int_0^h g_1(t, x) x^2 dx - \frac{k_2}{E_\Phi d} \int_0^h g_1(t, x) x dx, \\
 a_6^* &= \left(\frac{k_1}{E_\Phi d^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{k_2 h}{E_\Phi d} \right) g_1(t, x) W_T(t, x), \\
 \gamma_n^* &= \frac{1}{a_1^* a_3^* + a_2^* a_4^*} \left\{ \left[a_5^* \left(\frac{k_3}{E_\Phi d} [A_n + B_n] + \frac{k_3}{E_\Phi d} [C_n + D_n] \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + a_2^* \left(\frac{k_1}{E_\Phi d^2} [A_n + B_n] + \frac{k_2}{E_\Phi d} [C_n + D_n] \right) \right] \right\}, \\
 \lambda_n^* &= \frac{1}{a_1^* a_3^* + a_2^* a_4^*} \left\{ \left[a_4^* \left(\frac{k_3}{E_\Phi d} [A_n + B_n] + \frac{k_3}{E_\Phi d} [C_n + D_n] \right) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - a_1^* \left(\frac{k_1}{E_\Phi d^2} [A_n + B_n] + \frac{k_2}{E_\Phi d} [C_n + D_n] \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Для первого приближения получаем следующее интегральное уравнение для определения $T_1(t)$

$$\begin{aligned}
 T_1(t) &\left\{ a_1^* E(t) \int_0^h \varphi_1(x) [\varphi_1(x) - \gamma_1^* - \lambda_1^* x] dx + 2E(t) \int_0^h I'(x) \varphi_1'''(x) \times \right. \\
 &\quad \times [\varphi_1(x) - \gamma_1^* - \lambda_1^* x] dx + E(t) \int_0^h [I''(x) + g_2(t, x)] \times \\
 &\quad \times [\varphi_1(x) - \gamma_1^* - \lambda_1^* x] \varphi''(x) dx + \int_0^h g_2'(t, x) [\varphi_1'(x) - \lambda_1^*] [\varphi_1(x) - \gamma_1^* - \lambda_1^* x] dx + \\
 &\quad \left. + \int_0^h g_1(t, x) [\varphi_1(x) - \gamma_1^* - \lambda_1^* x] [\varphi_1(x) + (b_1^* - \gamma_1^*) + (b_2^* - \lambda_1^*) x] dx \right\} = \\
 &= \int_0^h \left\{ W_T(t, x) g_1(t, x) - \int_{\tau_1}^t W_T(\tau, x) g_1(\tau, x) K(t, \tau) d\tau \right\} \times \\
 &\quad \times [\varphi_1(x) - \gamma_1^* - \lambda_1^* x] dx + \int_{\tau_1}^t \int_0^h \left\{ g_1(\tau, x) [\varphi_1(x) + (b_1^* - \gamma_1^*) + (b_2^* - \lambda_1^*) x] + \right. \\
 &\quad \left. + g_2'(\tau, x) [\varphi_1'(x) - \lambda_1^*] [\varphi_1(x) - \gamma_1^* - \lambda_1^* x] + \right. \\
 &\quad \left. + g_2(\tau, x) \varphi_1''(x) [\varphi_1(x) - \gamma_1^* - \lambda_1^* x] \right\} dx T_1(\tau) K(t, \tau) d\tau. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Для каждой конкретной задачи, как принято в пункте 2°, можно подобрать простые аппроксимирующие функции для $I(x)$, $g_1(t, x)$ и $g_2(t, x)$ относительно x . Нужно отметить, что если при определении

g_1 и g_2 примем арки с жестко заделанными пятнами, а учет влияния податливости основания произведем удлинением оси арки, то задача очень упростится. В этом случае, при интегрировании фундаментальных функций и их производных, можно пользоваться готовыми формулами, приведенными в работах [5, 6].

§ 2. Метод преобразованных параметров

Разобьем консоль на n участков, число которых равно числу арок. Рассмотрим каждый участок как балку постоянного сечения с высотой h_i (фиг. 1 в). В каждом сечении имеем 4 неизвестных: изгибающий момент $M_i(t)$, перерезывающую силу $Q_i(t)$, радиальный прогиб $W_i(t)$ и угол поворота $\varphi_i(t)$.

Принимая гипотезу плоских сечений, с учетом воздействия теплового потока и ползучести материала, получаем следующее соотношение

$$E(t)IW''(t, x) - Q(t) = M(t) - \int_0^t M(\tau) K(t, \tau) d\tau, \quad (18)$$

где

$$Q(t) = E(t)\alpha \int_0^t T(\tau) y d\omega, \quad I = \int_0^t y^2 d\omega,$$

α — коэффициент расширения, T — функция изменения температуры, которая по высоте консоли не меняется.

Вдоль консоли еще действует сопротивление арок. Для простоты заменяем распределенные силы сопротивления сосредоточенными силами $R_i(t)$ и $S_i(t)$ (фиг. 2).

$$\left. \begin{aligned} R_i(t) &= r_i(t) W_i(t), \\ S_i(t) &= s_i(t) \varphi_i(t). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

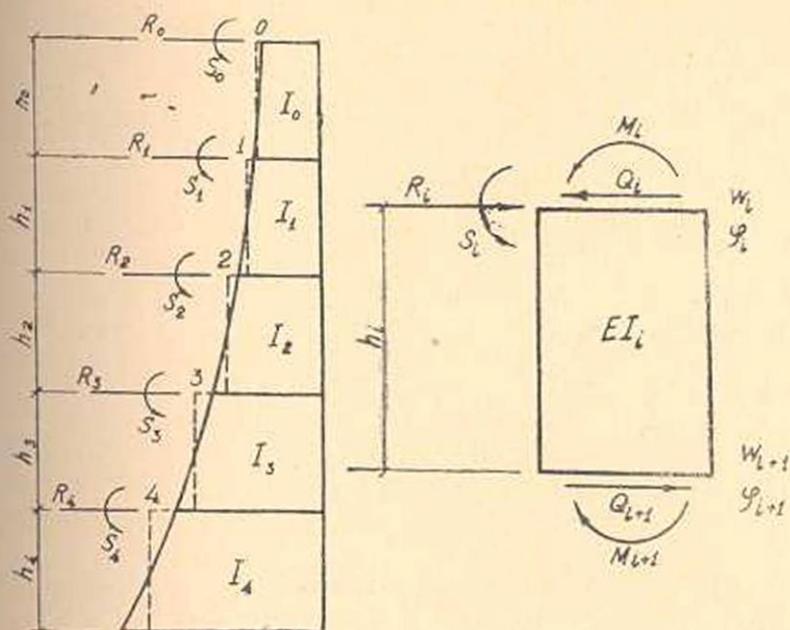
Пользуясь соотношениями (18), нетрудно записать следующие выражения:

$$Q_{i+1}(t) = Q_i(t) - r_i(t) W_i(t) + r_i(t) W_{iT}(t), \quad (20)$$

$$M_{i+1}(t) = M_i(t) + s_i(t) \varphi_i(t) + [Q_i(t) - r_i(t) W_i(t) + r_i(t) W_{iT}(t)] h_i, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{i+1}(t) &= \varphi_i(t) + \frac{h_i}{E(t)I_i} Q_i(t) + \frac{h_i}{E(t)I_i} L [M_i(t) + s_i(t) \varphi_i(t)] + \\ &+ \frac{h_i^2}{2E(t)I_i} L [Q_i(t) - r_i(t) W_i(t) + r_i(t) W_{iT}(t)], \end{aligned} \quad (22)$$

$$W_{i+1}(t) = W_i(t) + \varphi_i(t) h_i + \frac{h_i^2}{2E(t)I_i} Q_i(t) +$$



Фиг. 2.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{h_i^2}{2E(t)I_i} L [M_i(t) + s_i(t) \varphi_i(t)] + \\
 & + \frac{h_i^3}{6E(t)I_i} L [Q_i(t) - r_i(t) W_i(t) + r_i(t) W_{iR}(t)], \quad (23)
 \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 r_i(t) &= \frac{h_{i-1} + h_i}{2} & g_{1i}(t) &= \frac{h_{i-1} + h_i}{2} \cdot \frac{1}{f_{i0}(t)} \\
 s_i(t) &= \frac{h_{i-1} + h_i}{2} & g_{2i}(t) &= \frac{h_{i-1} + h_i}{2} \cdot \frac{1}{\gamma_{i0}(t)}
 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

L — интегральный оператор, $L[x(t)] = x(t) - \int_{\tau_1}^t x(\tau) K(t, \tau) d\tau$, f_{i0} — радиальный прогиб сечения θ арки под действием единичной равномерно распределенной нагрузки, γ_{i0} — угол поворота сечения θ арки под действием единичного равномерно распределенного крутящего момента.

Из соотношений (20) и (21) имеем

$$W_i(t) = \frac{1}{r_i(t)} Q_i(t) - \frac{1}{r_i(t)} Q_{i+1}(t) + W_{iR}(t), \quad (25)$$

$$\varphi_i(t) = -\frac{h_i}{s_i(t)} Q_{i+1}(t) - \frac{M_i(t)}{s_i(t)} + \frac{M_{i+1}(t)}{s_i(t)}, \quad (26)$$

Подставляя (25), (26) в (22), (23) и заменяя индексы $i+1$ на i , i на $i-1$, находим

$$\begin{aligned} \varphi_i(t) = & \left[-\frac{h_{i-1}}{s_{i-1}(t)} - \frac{h_{i-1}^2}{2E(t)l_{i-1}} L \right] Q_i(t) - \frac{M_{i-1}(t)}{s_{i-1}(t)} + \\ & + \left[\frac{1}{s_{i-1}(t)} + \frac{h_{i-1}}{E(t)l_{i-1}} L \right] M_i(t) + \frac{h_{i-1}}{E(t)l_{i-1}} \cdot \Omega_{i-1}(t), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} W_i(t) = & \frac{Q_{i-1}(t)}{r_{i-1}(t)} - \left[\frac{1}{r_{i-1}(t)} + \frac{h_{i-1}^2}{s_{i-1}(t)} + \frac{h_{i-1}^2}{3E(t)l_{i-1}} L \right] Q_i(t) - \\ & - \frac{h_{i-1}}{s_{i-1}(t)} M_{i-1}(t) + \left[\frac{h_{i-1}}{s_{i-1}(t)} + \frac{h_{i-1}^2}{2E(t)l_{i-1}} L \right] M_i(t) + \\ & + W_{i-1,r}(t) + \frac{h_{i-1}^2}{2E(t)l_{i-1}} \cdot \Omega_{i-1}(t). \end{aligned} \quad (28)$$

Приравняв (25), (26) и (27), (28), получаем следующие основные уравнения метода преобразованных параметров

$$\begin{aligned} -\frac{Q_{i-1}(t)}{r_{i-1}(t)} + \left[\frac{1}{r_i(t)} - \frac{1}{r_{i-1}(t)} + \frac{h_{i-1}^2}{s_{i-1}(t)} + \frac{h_{i-1}^2}{3E(t)l_{i-1}} L \right] Q_i(t) - \\ - \frac{Q_{i+1}(t)}{r_i(t)} + \frac{h_{i-1}}{s_{i-1}(t)} \cdot M_{i-1}(t) - \left[\frac{h_{i-1}}{s_{i-1}(t)} + \frac{h_{i-1}^2}{2E(t)l_{i-1}} L \right] M_i(t) = \\ = W_{i-1,r}(t) - W_{i,r}(t) + \frac{h_{i-1}^2}{2E(t)l_{i-1}} \cdot \Omega_{i-1}(t), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{h_{i-1}}{s_{i-1}(t)} + \frac{h_{i-1}^2}{2E(t)l_{i-1}} L \right] Q_i(t) - \frac{h_i}{s_i(t)} Q_{i-1}(t) + \frac{M_{i-1}(t)}{s_{i-1}(t)} - \\ - \left[\frac{1}{s_i(t)} + \frac{1}{s_{i-1}(t)} + \frac{h_{i-1}}{E(t)l_{i-1}(t)} L \right] M_i(t) + \frac{M_{i+1}(t)}{s_i(t)} = \\ = \frac{h_{i-1}}{E(t)l_{i-1}} \cdot \Omega_{i-1}(t). \end{aligned} \quad (30)$$

Пользуясь уравнениями (29) и (30), для каждого участка консоли можно написать следующие соотношения:

$$\text{при } i=1 \quad Q_1(t), M_1(t) = f[Q_0(t), M_0(t), Q_2(t), M_2(t)] \quad (31)$$

$$\text{при } i=2 \quad Q_2(t), M_2(t) = f[Q_3(t), M_3(t)]. \quad (32)$$

$$\text{при } i=n-1 \quad Q_{n-1}(t), M_{n-1}(t) = f[Q_n(t), M_n(t)]. \quad (33)$$

Таким образом, получаем систему $2(n-1)$ рекуррентных интегральных уравнений. Параметры, входящие в эти уравнения, определяются из граничных условий консолей:

на гребне плотины

$$Q_0(t) = M_0(t) = 0, \quad (34)$$

у основания плотины для жестко защемленного контура

$$z_n(t) = W_n(t) = 0, \quad (35)$$

для упруго защемленного контура (по гипотезе Фогта)

$$\begin{aligned} W_n &= W_\Phi = \frac{k_3 M_n(t)}{E_\Phi d} - \frac{k_3 Q_n(t)}{E_\Phi}, \\ z_n &= z_\Phi(t) = \frac{k_1 M_n(t)}{E_\Phi d^2} - \frac{k_1 Q_n(t)}{E_\Phi d}. \end{aligned} \quad (36)$$

Подставляя (27) и (28) в (35), для случая жестко защемленного контура, или в (36), для случая упруго защемленного контура, получим два уравнения

$$\begin{aligned} z_n(t) &= f [Q_{n-1}(t), Q_n(t), M_{n-1}(t), M_n(t)] = \begin{cases} 0, \\ z_\Phi, \end{cases} \\ W_n(t) &= j [Q_{n-1}(t), Q_n(t), M_{n-1}(t), M_n(t)] = \begin{cases} 0, \\ W_\Phi. \end{cases} \end{aligned} \quad (37)$$

Совместно решая (33) и (37), определим $Q_{n-1}(t)$, $Q_n(t)$, $M_{n-1}(t)$, $M_n(t)$. Определив $Q_{n-1}(t)$, $Q_n(t)$, $M_{n-1}(t)$ и $M_n(t)$, в обратной последовательности находим все $Q_i(t)$ и $M_i(t)$. Значения остальных неизвестных $z_i(t)$, $W_i(t)$, $R_i(t)$ и $S_i(t)$ можно определить по формулам (27), (28) и (19).

Нагрузка, приходящаяся на арку, равна

$$p_n(t) = \frac{2W_i(t)r_i(t)}{h_{i-1} + h_i} \quad (38)$$

Воспользовавшись известным в теории ползучести методом Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, решение системы интегральных уравнений приведем к системе алгебраических уравнений следующего вида [7]

$$\begin{aligned} &\frac{Q_{i-1}(t_n)}{r_{i-1}(t_n)} + \left[\frac{1}{r_{i-1}(t_n)} + \frac{1}{r_i(t)} + \frac{h_{i-1}^2}{s_{i-1}(t_n)} \right] Q(t_n) + \\ &+ \frac{h_{i-1}^3}{3l_{i-1}} [Q_i(t_n) \varphi_n - A_n] - \frac{Q_{i+1}(t_n)}{r_i(t_n)} - \frac{h_{i-1}}{s_{i-1}(t_n)} M_{i-1}(t_n) - \\ &- \frac{h_{i-1}}{s_{i-1}(t_n)} M_i(t_n) - \frac{h_{i-1}^2}{2l_{i-1}} [M_i(t_n) \varphi_n - B_n] = \\ &= W_{i-1, r}(t_n) - W_{i, r}(t_n) + \frac{h_{i-1}^2}{2E(t_n) l_{i-1}} \Omega_{i-1}(t_n), \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & \frac{h_{i-1}}{s_{i-1}(t_n)} Q_i(t_n) + \frac{h_{i-1}^2}{2I_{i-1}} [Q_i(t_n) \psi_n - A_n] - \frac{h_i}{s_i(t_n)} Q_{i+1}(t_n) + \\ & + \frac{1}{s_{i-1}(t_n)} \cdot M_{i-1}(t_n) - \left[\frac{1}{s_{i-1}(t_n)} + \frac{1}{s_i(t_n)} \right] M_i(t_n) - \\ & - \frac{h_{i-1}}{I_{i-1}} [M_i(t_n) \psi_0 - B_n] + \frac{1}{s_i(t_n)} \cdot M_{i+1}(t_n) = \frac{h_{i-1}}{E(t_n) I_{i-1}} \cdot \Omega_i(t_n), \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_n &= \frac{1}{E\left(\frac{t_n + t_{n-1}}{2}\right)} + C\left(t_n, \frac{t_n + t_{n-1}}{2}\right), \\ A_n &= \sum_{j=0}^n Q_j(t_{j-1}) \left[\frac{1}{E\left(\frac{t_{j-1} + t_{j-2}}{2}\right)} - \frac{1}{E\left(\frac{t_j + t_{j-1}}{2}\right)} + \right. \\ B_n &+ \left. C\left(t_n, \frac{t_{j-1} + t_{j-2}}{2}\right) - C\left(t_n, \frac{t_j + t_{j-1}}{2}\right) \right], \\ \psi_0 &= \frac{1}{E(\tau_1)}, \quad A_0 = B_0 = 0, \\ t_{-2} &= t_{-1} = t_0 = \tau_1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

§ 3. Метод эквивалентной нагрузки

Как показано в работе [1], при упругом расчете арочных плотин воздействие стационарного теплового потока можно заменить эквивалентным гидростатическим давлением по формуле

$$q_i = \mp \frac{\alpha E d \cdot \Delta T^*}{R_N},$$

где α — коэффициент линейного расширения, R_N — радиус средней осевой линии арки, d — толщина арки, ΔT^* — изменение температуры, определяемое метеорологическими и экспериментальными данными. Если годовая амплитуда температуры колеблется от $8^\circ \sim 12^\circ$, то можно принять [8]

$$\Delta T = \frac{57,47}{d + 2,44}.$$

В этом параграфе мы распространяем вышеуказанный метод на случай расчета арочных плотин с учетом ползучести бетона. Для этого, влияние податливости основания при расчете перемещений арки осуществим путем удлинения оси арки, т. е. пята арки считаем жестко заделанными. При расчете напряжений в арке будем непосредственно учитывать податливость основания, что не только упро-

* Знак минус соответствует повышению температуры.

шает вычисление, но и удовлетворяет требованиям метода эквивалентной нагрузки.

Расчет консоли производим методом преобразованных параметров. При этом все формулы и ход расчета, изложенные в работе [7], будут полностью сохранены и нужно только в правой части, вместо гидростатической нагрузки, поставить эквивалентную нагрузку q_i . Основные уравнения для каждого участка консоли имеют вид

$$\begin{aligned} & -\frac{Q_{i-1}(t)}{r_i(t)} + \left[\frac{1}{r_{i-1}(t)} + \frac{1}{r_i(t)} + \frac{h_{i-1}^2}{s_{i-1}(t)} \right] Q_i(t) + \frac{h_{i-1}^3}{3E(t)l_{i-1}} L [Q_i(t)] - \\ & -\frac{Q_{i+1}(t)}{r_i(t)} + \frac{h_{i-1}}{s_{i-1}(t)} M_{i-1}(t) - \frac{h_{i-1}}{s_{i-1}(t)} M_i(t) - \frac{h_{i-1}^2}{2E(t)l_{i-1}} L [M_i(t)] = \\ & = \left[\frac{h_{i-1}}{2r_{i-1}(t)} + \frac{h_{i-1}^3}{6s_{i-1}(t)} + \frac{h_{i-1}^4}{30E(t)l_{i-1}} L \right] q_{t,i-1} + \\ & + \left[\frac{h_{i-1}}{2r_{i-1}(t)} - \frac{h_i}{2r_i(t)} + \frac{h_{i-1}^3}{3s_{i-1}(t)} + \frac{11h_{i-1}^4}{120E(t)l_{i-1}} L \right] q_{t,i} - \\ & - \frac{h_i}{2r_i(t)} q_{t,i+1}, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} & \frac{h_{i-1}}{s_{i-1}(t)} Q_i(t) + \frac{h_{i-1}^2}{2E(t)l_{i-1}} L [Q_i(t)] - \frac{h_i}{s_i(t)} Q_{i+1}(t) + \\ & + \frac{1}{s_{i-1}(t)} M_{i-1}(t) - \left[\frac{1}{s_{i-1}(t)} + \frac{1}{s_i(t)} \right] M_i(t) - \frac{h_{i-1}}{E(t)l_{i-1}} L [M_i(t)] + \\ & + \frac{M_{i+1}(t)}{s_i(t)} = \left[\frac{h_{i-1}^2}{6s_{i-1}(t)} + \frac{h_{i-1}^3}{24E(t)l_{i-1}} L \right] q_{t,i-1} + \\ & + \left[\frac{h_{i-1}^2}{3s_{i-1}(t)} - \frac{h_i^2}{6s_i(t)} + \frac{h_{i-1}^3}{8E(t)l_{i-1}} L \right] q_{t,i} - \frac{h_i^2}{3s_i(t)} q_{t,i+1}. \end{aligned} \quad (42)$$

Для решения этой системы, содержащей $2(n-1)$ интегральных уравнений, воспользуемся методом Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова и приведем ее к системе алгебраических уравнений, подобных (39) и (40). Нагрузку, приходящуюся на арку, определяем по формуле (38).

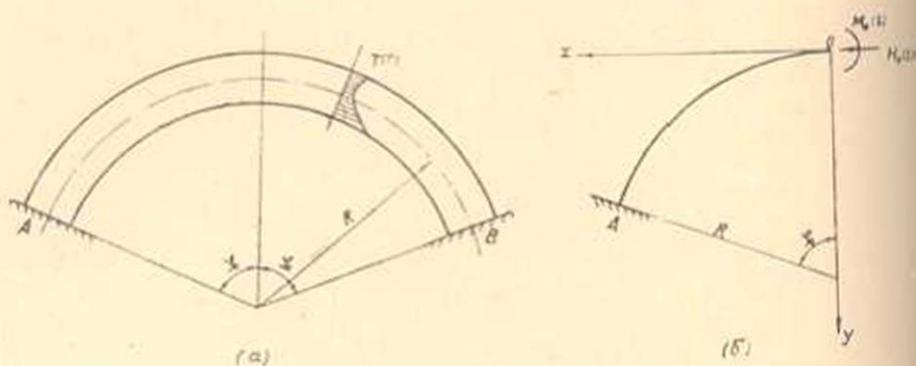
Нужно отметить, что на напряжения арки, вызванные нагрузкой вида (38), должны быть наложены напряжения от осевой силы

$$N_T = \pm \alpha E d \cdot \Delta T^*, \quad (43)$$

которая возникает при введении эквивалентной нагрузки, как это отмечается в работе [1].

§ 4. Определение радиального перемещения W_T круговой арки при воздействии стационарного потока тепла с учетом ползучести бетона и податливости основания

Принимаем схему арки, показанную на фиг. 3б за основную статически определимую систему. Напишем для нее канонические уравнения



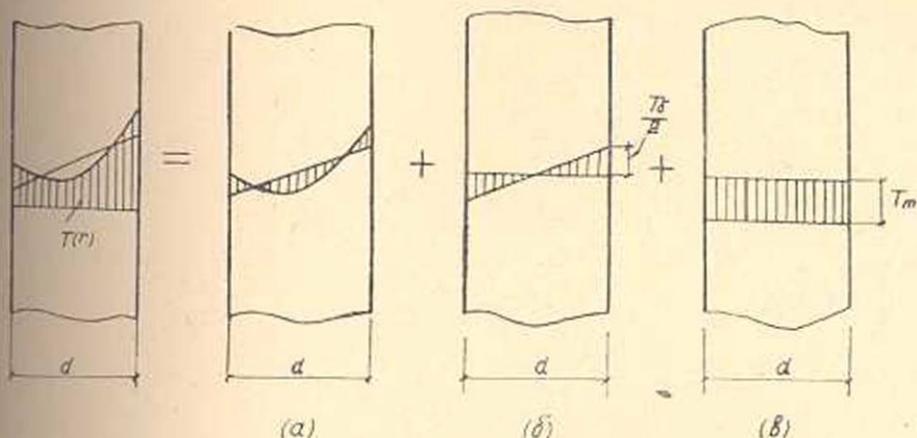
Фиг. 3.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}LH_0(t) + \delta_{12}LM_0(t) + aH_0(t) + bM_0(t) + \Delta_T &= 0, \\ \delta_{12}LH_0(t) + \delta_{22}LM_0(t) + bH_0(t) + cM_0(t) + \theta_T &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

где δ_{ij} — перемещения от $H_0(t)=1$ или $M_0(t)=1$ основной статически определимой системы в виде двух полуарок, свободных в замке. Эти перемещения не зависят от нагрузки. Первый индекс при δ указывает, по какому направлению происходит перемещение, второй — под действием какой силы. Δ_T , θ_T — тангенциальное перемещение и угол поворота в ключе от воздействия изменения температуры, L — интегральный оператор, a , b , c — перемещения от податливости основания.

Если принята мера ползучести $C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\lambda(t-\tau)}]$, то в общем случае, при учете изменения мгновенного модуля упругости $E(t)$ и старения бетона $\varphi(\tau)$, (44) в замкнутом виде не интегрируется. В этом случае интегрирование можно выполнить приближенным методом Ю. Д. Соколова, обобщенным нами на случай системы двух интегральных уравнений [7]. Предположим, что распределение температуры по толщине арки имеет вид, показанный на фиг. 4.

Представим график распределения температуры в виде трех составляющих: на графике (а) представлено распределение температуры между верхним и нижним бьефами в виде кривой, статический момент площади которой равен нулю; на графике (б) представлено распределение температуры по линейному закону, ординаты на бьефах равны $\frac{T_s}{2}$ и на графике (в) принята равномерная средняя температура T_m . Распределение температуры по графику (а) не будет вызывать ин-



Фиг. 4.

каких перемещений в арке, распределение температуры по графику (б) вызывает радиальное перемещение и угол поворота, а распределение температуры по (в) вызовет только радиальное перемещение. При этом в ключе арки будут следующие перемещения:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_T &= \frac{\alpha R^2 T_0}{d} (\sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0) + \alpha T_m R \sin \varphi_0, \\ \theta_T &= \frac{\alpha I_0 R \varphi_0}{d}. \end{aligned} \right\} (45)$$

Используя решение, приведенное в работе [7], для $H_0(t)$ и $M_0(t)$ в первом приближении получим

$$\left. \begin{aligned} H_0(t) &= \left[-C_1 \Delta_T + b_1 \theta_T + A_2 \alpha_1 \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) d\tau + A_3 \alpha_2 \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) d\tau \right] \frac{1}{A_1}, \\ M_0(t) &= \left[b_1 \Delta_T - a_1 \theta_T - A_4 \alpha_1 \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) d\tau + A_5 \alpha_2 \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) d\tau \right] \frac{1}{A_1}. \end{aligned} \right\} (46)$$

где

$$\alpha_1 =$$

$$\left[t - \tau_1 - \int_{\tau_1}^t \frac{A_3(\tau)}{A_1(\tau)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} K(\tau, \xi) d\xi \right] \int_{\tau_1}^t \frac{b_1(\tau) \theta_T - c_1(\tau) \Delta_T}{A_1(\tau)} d\tau -$$

$$\left[t - \tau_1 - \int_{\tau_1}^t \frac{A_3(\tau)}{A_1(\tau)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} K(\tau, \xi) d\xi \right] \left[t - \tau_1 + \int_{\tau_1}^t \frac{A_3(\tau)}{A_1(\tau)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} K(\tau, \xi) d\xi \right] +$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\int_{\tau_1}^t \frac{A_3(\tau)}{A_1(\tau)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} K(\tau, \xi) d\xi \right] \int_{\tau_1}^t \frac{c_1(\tau) \theta_T - b_1(\tau) \Delta_T}{A_1(\tau)} d\tau \\
& + \left[\int_{\tau_1}^t \frac{A_3(\tau)}{A_1(\tau)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} K(\tau, \xi) d\xi \right] \int_{\tau_1}^t \frac{A_4(\tau)}{A_2(\tau)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} K(\tau, \xi) d\xi \\
& \qquad \qquad \qquad x_2 = \\
& = \frac{\left[t - \tau_1 - \int_{\tau_1}^t \frac{A_2(\tau)}{A_1(\tau)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} K(\tau, \xi) d\xi \right] \int_{\tau_1}^t \frac{b_1(\tau) \Delta_T - a_1(\tau) \theta_T}{A_1(\tau)} d\tau -}{\left[t - \tau_1 + \int_{\tau_1}^t \frac{A_3(\tau)}{A_1(\tau)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} K(\tau, \xi) d\xi \right] \left[t - \tau_1 - \int_{\tau_1}^t \frac{A_2(\tau)}{A_1(\tau)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} K(\tau, \xi) d\xi \right] -} \\
& - \left[\int_{\tau_1}^t \frac{b_1(\tau) \theta_T - c_1(\tau) \Delta_T}{A_1(\tau)} d\tau \right] \int_{\tau_1}^t \frac{A_4(\tau)}{A_1(\tau)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} K(\tau, \xi) d\xi \\
& + \left[\int_{\tau_1}^t \frac{A_3(\tau)}{A_1(\tau)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} K(\tau, \xi) d\xi \right] \int_{\tau_1}^t \frac{A_4(\tau)}{A_1(\tau)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} K(\tau, \xi) d\xi \\
& \qquad A_1(t) = a_1(t) c_1(t) - b_1^2(t), \\
& \qquad A_2(t) = a_2(t) c_1(t) - b_1(t) b_2(t), \\
& \qquad A_3(t) = b_2(t) c_1(t) - b_1(t) c_2(t), \\
& \qquad A_4(t) = a_2(t) b_1(t) - a_1(t) b_2(t), \\
& \qquad A_5(t) = b_1(t) b_2(t) - a_1(t) c_2(t), \\
& \qquad a_1(t) = \delta_{11}(t) + a, \qquad a_2(t) = \delta_{11}(t), \\
& \qquad b_1(t) = \delta_{12}(t) + b, \qquad b_2(t) = \delta_{12}(t), \\
& \qquad c_1(t) = \delta_{22}(t) + c, \qquad c_2(t) = \delta_{22}(t).
\end{aligned} \tag{47}$$

В случае старого бетона, т. е. $E(t) = E = \text{const.}$, $C(t, \tau) = C_0 [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]$, задача решается точно, в замкнутом виде. В самом деле, путем дифференцирования, систему (44) приводим в систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} M_0'(t) + UM_0'(t) + VM_0(t) &= F_1, \\ H_0'(t) + UH_0'(t) + VH_0(t) &= F_2, \end{aligned} \right\} \tag{48}$$

где

$$\begin{aligned} U &= \gamma \{ 2(\delta_{12} + b) [\delta_{12}(1 + EC_0) + b] - 2(\delta_{11} + a)(\delta_{22} + c) - \\ & \quad - EC_0 [(\delta_{11} + a)\delta_{22} + (\delta_{22} + c)\delta_{11}] \} \Omega, \end{aligned}$$

$$V = \gamma^2 \{ [\delta_{12}(1 + EC_0) + b]^2 - [\delta_{11}(1 + EC_0) + a][\delta_{22}(1 + EC_0) + c] \} \Omega.$$

$$\Omega = [(\delta_{12} + b)^2 - (\delta_{11} + a)(\delta_{22} + c)]^{-1}.$$

$$F_1 = \gamma^2 [(1 + EC_0) \delta_{11} + a] \theta_T - [(1 + EC_0) \delta_{12} + b] \Delta_T \Omega,$$

$$F_2 = \gamma^2 [(1 + EC_0) \delta_{22} + c] \Delta_T - [(1 + EC_0) \delta_{12} + b] \theta_T \Omega.$$

Решая (48), для $H_0(t)$ и $M_0(t)$ получим

$$\begin{aligned} M_0(t) &= \frac{F_1}{m_1 m_2} + \frac{e^{-m_1(t-\tau_1)}}{(m_2 - m_1) m_1} [-F_1 + m_1 m_2 M_0(\tau_1) + m_1 M_0'(\tau_1)] - \\ &\quad - \frac{e^{-m_2(t-\tau_1)}}{(m_2 - m_1) m_2} [-F_2 + m_1 m_2 M_0(\tau_1) + m_2 M_0'(\tau_1)], \\ H_0(t) &= \frac{F_2}{m_1 m_2} + \frac{e^{-m_1(t-\tau_1)}}{(m_2 - m_1) m_1} [-F_2 + m_1 m_2 H_0(\tau_1) + m_1 H_0'(\tau_1)] - \\ &\quad - \frac{e^{-m_2(t-\tau_1)}}{(m_2 - m_1) m_2} [-F_2 + m_1 m_2 H_0(\tau_1) + m_2 H_0'(\tau_1)]. \end{aligned} \quad (49)$$

Учитывая начальные условия, получим

$$M_0(\tau_1) = [\theta_T (\delta_{11} + a) - \Delta_T (\delta_{12} + b)] \Omega, \quad (50)$$

$$H_0(\tau_1) = [\Delta_T (\delta_{22} + c) - \theta_T (\delta_{12} + b)] \Omega, \quad (51)$$

$$\begin{aligned} M_0'(\tau_1) &= \gamma EC_0 \Omega^2 \{ \Delta_T [(\delta_{12} + b)^2 \delta_{12} - \delta_{12} (\delta_{11} \delta_{22} + ac) - \\ &\quad - b (2\delta_{11} \delta_{22} + a \delta_{22} + c \delta_{11})] + \\ &\quad + \theta_T [(\delta_{11} + a)^2 \delta_{22} - (\delta_{12} + b) (\delta_{11} b - 2\delta_{11} a - \delta_{11} \delta_{12})] \}, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} H_0'(\tau_1) &= \gamma EC_0 \Omega^2 \{ \Delta_T [\delta_{11} (\delta_{22} + c)^2 - \delta_{12}^2 (\delta_{22} + 2c) - \\ &\quad - b (2c \delta_{12} - \delta_{22} b)] + \theta_T [(\delta_{12} + b)^2 + \\ &\quad + \delta_{12} (ac - \delta_{22} \delta_{11}) - b \delta_{22} (\delta_{11} + a) - b \delta_{11} (\delta_{22} + c)] \}, \end{aligned} \quad (53)$$

где

$$m_1, m_2 = [U \pm \sqrt{U^2 - 4V}] \cdot \frac{1}{2}.$$

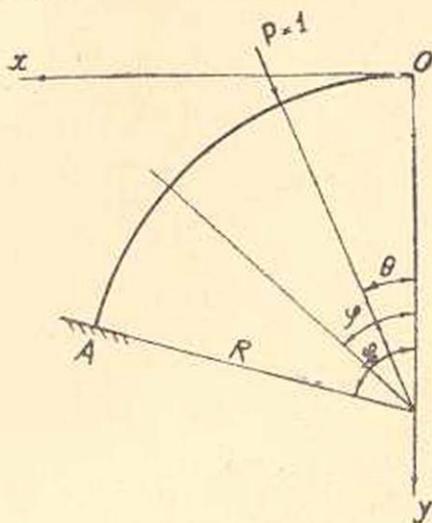
В случае жестко заделанных пят, когда $a = b = c = 0$,

$$\left. \begin{aligned} M_0(t) &= \frac{M_0(\tau_1)}{1 + EC_0} [1 + EC_0 e^{-\gamma(1+EC_0)(t-\tau_1)}], \\ H_0(t) &= \frac{H_0(\tau_1)}{1 + EC_0} [1 + EC_0 e^{-\gamma(1+EC_0)(t-\tau_1)}], \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

где

$$M_0(\tau_1) = \frac{\delta_{11} \theta_T - \delta_{12} \Delta_T}{\delta_{12}^2 - \delta_{11} \delta_{22}}, \quad H_0(\tau_1) = \frac{\delta_{22} \Delta_T - \delta_{12} \theta_T}{\delta_{12}^2 - \delta_{11} \delta_{22}}.$$

Радиальное перемещение в сечении θ находим по формуле Максвелла-Мора (фиг. 5)



Фиг. 5.

$$W_{r\theta} = \int_0^{\varphi_0} \frac{M_1}{EI} L M_2(t) ds + \int_0^{\varphi_0} \frac{N_1}{EF} L N_2(t) ds + \Delta_{\phi}, \quad (5)$$

где

$$M_1 = -R \sin(\varphi - \theta),$$

$$N_1 = \sin(\varphi - \theta),$$

$$M_2 = H_0(t) y - M_0(t) = H_0(t) R (1 - \cos \varphi) - M_0(t),$$

$$N_2 = H_0(t) \cos \varphi,$$

F — площадь радиального сечения

Δ_{ϕ} — перемещение основания.

После несложного вычисления имеем

$$\begin{aligned} W_{r\theta} = & \frac{R^2}{EI} [1 - \cos(\varphi_0 - \theta)] L M_0(t) - \frac{R^3}{EI} [1 - \cos(\varphi_0 - \theta) + \\ & + \frac{\cos \theta}{2} (\sin^2 \theta - \sin^2 \varphi_0) + \sin \theta \left(\frac{\varphi_0 - \theta}{2} + \frac{\sin 2\varphi_0 - \sin 2\theta}{4} \right)] L H_0(t) - \\ & - \frac{R}{EF} \left[\frac{\cos \theta}{2} (\sin^2 \theta - \sin^2 \varphi_0) + \sin \theta \left(\frac{\varphi_0 - \theta}{2} + \frac{\sin 2\varphi_0 - \sin 2\theta}{4} \right) \right] L H_0(t) - \\ & - \left[\frac{k_1 R}{E_{\phi} d^2} \sin(\varphi_0 - \theta) + \frac{k_5}{E_{\phi} d} \cos(\varphi_0 - \theta) \right] M_0(t) + \\ & + \left[\frac{k_1 R^2}{E_{\phi} d^2} (1 - \cos \varphi_0) \sin(\varphi_0 - \theta) + \frac{k_5 R}{E_{\phi} d} \sin \varphi_0 \sin(\varphi_0 - \theta) + \right. \\ & \left. + \frac{k_5 R}{E_{\phi} d^2} (1 - \cos \varphi_0) \cos(\varphi_0 - \theta) + \frac{k_3}{E_{\phi}} \sin \varphi_0 \cos(\varphi_0 - \theta) \right] H_0(t). \quad (5) \end{aligned}$$

Радиальное перемещение в ключе будет равно

$$\begin{aligned} W_{r0} = & \frac{R^2}{EI} [1 - \cos \varphi_0] L M_0(t) - \frac{R^3}{EI} \left[1 - \cos \varphi_0 - \frac{\sin^2 \varphi_0}{2} \right] L H_0(t) + \\ & + \frac{R}{EF} \left(\frac{\sin^2 \varphi_0}{2} \right) L H_0(t) - \left[\frac{k_1 R}{E_{\phi} d^2} \sin \varphi_0 + \frac{k_5}{E_{\phi} d} \cos \varphi_0 \right] M_0(t) + \\ & + \left[\frac{k_1 R^2}{E_{\phi} d^2} (1 - \cos \varphi_0) \sin \varphi_0 + \frac{k_5 R}{E_{\phi} d} \sin^2 \varphi_0 + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{k_5 R}{E_\Phi d^2} (1 - \cos \varphi_0) \cos \varphi_0 + \frac{k_4}{E_\Phi} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \Big] H_0(t). \quad (57)$$

В случае жестко заделанных пят арки, при воздействии изменяющейся температуры учет ползучести не оказывает влияния на деформации арки и радиальные перемещения будут

$$W_{T5} = \frac{R^2}{EI} [1 - \cos(\varphi_0 - \theta)] M_0(\tau_1) - \frac{R^3}{EI} \left[1 - \cos(\varphi_0 - \theta) + \frac{\cos \theta}{2} (\sin^2 \theta - \sin^2 \varphi_0) + \sin \theta \left(\frac{\varphi_0 - \theta}{2} + \frac{\sin 2\varphi_0 - \sin 2\theta}{4} \right) \right] H_0(\tau_1) - \frac{R}{EF} \left[\frac{\cos \theta}{2} (\sin^2 \theta - \sin^2 \varphi_0) + \sin \theta \left(\frac{\varphi_0 - \theta}{2} + \frac{\sin 2\varphi_0 - \sin 2\theta}{4} \right) \right] H_0(\tau_1), \quad (58)$$

$$W_{T0} = \frac{R^2}{EI} (1 - \cos \varphi_0) M_0(\tau_1) - \frac{R^3}{EI} \left(1 - \cos \varphi_0 - \frac{\sin^2 \varphi_0}{2} \right) H_0(\tau_1) + \frac{R}{EF} \sin^2 \varphi_0 H_0(\tau_1). \quad (59)$$

Для отдельных арок, значения $g_1(t, x)$, $g_2(t, x)$ или $r_1(t, x)$, $r_2(t, x)$ в сечении θ получены в работе [7] в виде

$$\begin{aligned} f_1(t) = & \frac{R^2}{E(t)I} [1 - \cos(\varphi_0 - \theta)] LM_0(t) - \frac{R^3}{E(t)I} \left[1 - \cos(\varphi_0 - \theta) + \right. \\ & \left. + \frac{\cos \theta}{2} (\sin^2 \theta - \sin^2 \varphi_0) + \sin \theta \left(\frac{\varphi_0 - \theta}{2} + \frac{\sin 2\varphi_0 - \sin 2\theta}{4} \right) \right] LH_0(t) - \\ & - \frac{R}{E(t)F} \left[\frac{\cos \theta}{2} (\sin^2 \theta - \sin^2 \varphi_0) + \sin \theta \left(\frac{\varphi_0 - \theta}{2} + \frac{\sin 2\varphi_0 - \sin 2\theta}{4} \right) \right] \\ & + \frac{\sin 2\varphi_0 - \sin 2\theta}{4} \Big] LH_0(t) + \left(\frac{R^4}{E(t)I} + \frac{R^2}{E(t)F} \right) \left[1 - \cos(\varphi_0 - \theta) + \right. \\ & \left. + \frac{\cos \theta}{2} (\sin^2 \theta - \sin^2 \varphi_0) + \sin \theta \left(\frac{\varphi_0 - \theta}{2} + \frac{\sin 2\varphi_0 - \sin 2\theta}{4} \right) \right] Lq_a - \\ & - \left[\frac{k_1 R}{E_\Phi d^2} \sin(\varphi_0 - \theta) + \frac{k_5}{E_\Phi d} \cos(\varphi_0 - \theta) \right] M_0(t) + \\ & + \left[\frac{k_1 R^2}{E_\Phi d^2} (1 - \cos \varphi_0) \sin(\varphi_0 - \theta) + \frac{k_5 R}{E_\Phi d} \sin \varphi_0 \sin(\varphi_0 - \theta) + \right. \\ & \left. + \frac{k_5 R}{E_\Phi d^2} (1 - \cos \varphi_0) \cos(\varphi_0 - \theta) + \frac{k_3}{E_\Phi} \sin \varphi_0 \cos(\varphi_0 - \theta) \right] H_0(t) - \\ & - \frac{q_a R^2 k_5}{E_\Phi d} [(1 - \cos \varphi_0) \cos(\varphi_0 - \theta) + \sin \varphi_0 \sin(\varphi_0 - \theta)] - \\ & - \frac{k_3 q_a R}{E_\Phi} \sin \varphi_0 \cos(\varphi_0 - \theta), \quad (60) \end{aligned}$$

Для определения $f_0(t)$ в ключевом сечении арки нужно в формуле (60) подставить $\theta = 0$, а в случае жестко заземленных плит $k_1 = k_3 = k_5 = 0$.

Если $k_1 = k_3 = k_5 = 0$ и $LM_0(t) = M_0(\tau_1)$, $LH_0(t) = H_0(\tau_1)$, что соответствует отсутствию податливости основания и ползучести бетона, то (60) совпадает с формулой, полученной Чен Лен-си в работе [1]

$$f_0 = \frac{q_a R^2}{Ed} \cdot \frac{1}{\left(\varphi_0 + \frac{\sin 2\varphi_0}{2}\right) - \frac{2 \sin^2 \varphi_0}{\varphi_0 \left(1 + \frac{d^2}{12 R^2}\right)}} \left[\left(\frac{\sin 2\varphi_0}{2} + \varphi_0 \right) \times \right. \\ \left. \times (1 - \cos \varphi_0 \cos \theta) - \cos \theta \sin^3 \varphi_0 - \theta \sin \theta \sin \varphi_0 \right]. \quad (61)$$

Для $\gamma_0(t)$ в сечении θ получена формула

$$\gamma_0(t) = \frac{R^2 [1 + E(t) C(t, \tau_1)]}{2GI_0} [(\varphi_0 - \theta) \sin \theta + \sin \varphi_0 \sin(\varphi_0 - \theta)] + \\ + k_5 R \sin \varphi_0, \quad (62) \\ GI_0 = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{d^3}{3},$$

где μ — коэффициент Пуассона.

Найдя f_0 и γ_0 , значения $g_1(t, x)$ и $g_2(t, x)$ определяются по формуле (24).

§ 5. Численный пример

Чтобы сравнить результаты расчета арочных плотин данным способом с существующими решениями, возьмем арочную плотину, которая рассматривалась в работе [1]. Постоянный радиус этой плотины равен 100 м. Геометрические размеры показаны на развернутом профиле (фиг. 1). Поперечное сечение арочной плотины в действительности выгнуто к верхнему бьефу (фиг. 1г) и тогда изгибающий момент от собственного веса плотины направлен противоположно направлению изгибающего момента от давления воды. В расчетной схеме верхний бьеф принят прямолинейным, что идет в запас прочности.

Геометрические и статические данные приведены в таблице 1. Вдоль высоты плотины центральная консоль разбивается на 8 частей.

$$E = 1,6 \times 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad C_0 = 2,8 \times 10^{-6}, \quad \gamma = 0,03, \\ \mu = 0, \quad E_\Phi = E, \quad k_1 = 5,43, \quad k_3 = 2,80, \quad k_5 = 0,67.$$

Результаты расчетов для центральной консоли приведены в таблицах №№ 2—9.

Таблица 1

l	$h_f, м$	$d_f, м^2$	$F_f, м^2$	$\frac{d_f^3}{12}, м^3$	$I_f, м^4$	α_f	Ключевая консоль		Давление воды	Эквивал. нагрузка
							$\frac{1}{r_f}, м^{-2}/м$	$\frac{1}{s_f}, м^{-1}/м$	$q_f, м/м$	$qf_f, м/м$
0	12,5	4,00	4,325	5,333	6,848	57°17'	752	53,107	0	5,039
1	12,5	4,85	5,025	8,364	10,741	53°38'	321,2	15,516	12,79	5,304
2	12,5	5,40	5,835	13,117	16,645	49°35'	274	8,850	25,675	5,550
3	12,5	6,27	6,780	20,573	26,419	45°17'	232,4	4,909	38,67	5,776
4	12,5	7,29	7,880	32,265	41,433	40°30'	194,4	2,614	51,82	5,975
5	12,5	8,47	9,155	50,601	64,980	35°12'	150,4	1,313	65,144	6,164
6	12,5	9,84	10,635	79,358	101,909	28°38'	96	0,579	78,68	6,320
7	6,5	11,43	12,355	124,46	140,906	24°14'	48,11	0,253	92,505	6,452
8	—	12,36	—	157,35	—	0	—	—	99,809	6,527

Таблица 2

Изгибающий момент (в $т/м$) под действием давления воды

$t - \tau_1$ (дней)	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8
0	-242,88	-1030,52	-1944,50	-2295,59	-832,35	4122,22	14228,45	19548,17
5	-243,03	-1032,66	-1948,06	-2295,62	-763,83	4292,52	14633,43	20227,32
15	-243,96	-1037,18	-1952,08	-2295,70	-730,03	4380,88	14880,46	20280,63
30	-244,35	-1040,29	-1955,15	-2296,03	-722,57	4523,50	15142,45	21114,33
60	-245,60	-1047,39	-1958,16	-2296,13	-710,60	4527,15	15287,70	21510,03
90	-248,80	-1051,59	-1968,62	-2296,33	-707,34	4559,64	15400,23	21712,92
135	-249,22	-1052,52	-1974,64	-2296,52	-707,21	4565,13	15438,16	21793,23
∞	-249,72	-1052,73	-1975,37	-2296,59	-706,90	4574,72	15442,76	21804,73

Таблица 3

Перерезывающая сила (в $т$) под действием давления воды

$t - \tau_1$ (дней)	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8
0	30,04	59,20	130,06	269,97	538,78	991,75	1660,19	1991,07
5	29,89	58,86	129,83	270,12	542,90	1000,77	1677,94	2022,11
15	28,89	58,64	129,77	271,36	544,02	1002,52	1689,25	2045,14
30	28,21	58,21	129,48	271,90	547,35	1014,14	1702,71	2069,21
60	27,89	56,80	129,22	273,04	549,30	1017,53	1713,25	2091,90
90	27,23	55,60	128,10	273,28	550,67	1020,30	1719,35	2102,13
135	26,10	54,79	128,68	273,36	551,02	1021,39	1721,26	2107,05
∞	25,81	54,69	128,81	273,38	551,14	1021,50	1722,12	2107,66

Таблица 4

 $E\mathbb{W}_i$ (в m/m) под действием давления воды

i	$(t-\tau_1)$ (дней)							
	0	5	15	30	60	90	135	∞
0	37522,9	39984,9	44623,2	49239,5	53759,9	56199,1	58304,5	58942,3
1	67852,3	72149,5	78644,3	85648,0	92816,1	96566,9	98123,5	93795,5
2	90775,2	96409,2	105428,8	114769,2	124084,6	127683,5	129380,4	130150,4
3	98922,8	104999,9	114526,7	124482,1	134610,5	138853,4	140867,9	141668,9
4	89854,2	94786,5	103570,3	112107,8	121416,1	125038,1	126929,9	127590,3
5	67068,0	70470,7	76989,9	82267,0	88959,2	91541,4	92820,9	93327,0
6	38540,7	40054,8	42756,5	46341,4	49334,8	50481,1	51159,7	51334,2
7	14149,5	14353,6	15048,8	15742,1	16276,9	16522,2	16573,9	16682,7
8	6629,8	6758,4	6825,8	6938,4	7023,4	7063,0	7081,2	7083,5

Таблица 5

 $E\varphi_i$ (в m/m^2) под действием давления воды

i	$(t-\tau_1)$ (дней)							
	0	5	15	30	60	90	135	∞
0	2536,71	2792,71	3772,14	4649,34	5250,00	5795,22	6932,73	7215,79
1	2213,71	2388,22	2628,02	2934,10	3338,22	3795,44	4070,11	4126,02
2	1265,13	1357,93	1498,96	1673,55	1904,04	1906,21	1938,58	1954,78
3	-96,83	-91,43	-168,87	-208,75	-303,29	-262,41	-232,60	-230,89
4	-1383,10	-1422,10	-1585,47	-1740,56	-1932,70	-2045,96	-2093,20	-2108,93
5	-2163,73	-2313,97	-2481,25	-2719,74	-3042,15	-3150,83	-3215,95	-3218,23
6	-2199,75	-2316,75	-2523,17	-2783,52	-3012,34	-3106,92	-3148,68	-3178,79
7	-1430,48	-1476,47	-1716,42	-1736,33	-1848,01	-1899,01	-1925,41	-1926,16
8	-799,48	-828,50	-831,64	-862,58	-877,87	-885,63	-888,76	-889,20

Таблица 6

Изгибающий момент (в m/m) при воздействии температуры

$(t-\tau_1)$ (дни)	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8
0	17,23	22,15	28,42	88,23	294,91	749,87	1519,62	1824,71
5	18,12	23,33	27,19	85,20	276,64	721,18	1475,31	1777,37
15	19,80	25,08	26,53	75,76	262,85	686,84	1413,78	1705,91
30	21,91	29,05	29,55	76,24	247,99	651,56	1354,12	1637,08
60	24,61	36,08	39,01	77,93	240,05	624,37	1302,73	1576,03
90	25,12	36,97	39,86	77,52	236,53	615,41	1286,44	1556,38
135	25,59	37,65	40,22	77,36	235,33	612,41	1280,61	1549,38
∞	25,64	38,13	41,02	76,85	229,28	591,97	1226,75	1439,06

Таблица 7

Перерезывающая сила (в m) при воздействии температуры

$t - \tau_1$ (дни)	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8
0	34,09	35,52	38,39	46,54	64,43	94,05	134,91	151,57
5	34,17	35,24	38,04	46,19	63,91	93,25	133,91	150,78
15	34,26	35,50	38,00	45,65	62,86	91,91	132,19	149,36
30	34,41	35,61	37,79	45,17	61,87	90,37	130,63	148,06
60	34,60	35,93	38,01	44,77	60,94	89,01	129,07	146,74
90	34,64	35,96	38,00	44,66	60,69	88,61	128,60	146,33
135	34,67	35,97	37,98	44,61	60,60	88,48	128,42	146,18
∞	34,67	36,00	37,98	44,46	60,06	87,21	125,97	142,53

Таблица 8

 EW_i (в m/m) при воздействии температуры

i	$t - \tau_1$ (дни)							
	0	5	15	30	60	90	135	∞
0	22979,1	22918,7	22848,7	22738,2	22591,1	22565,2	22540,7	22537,6
1	21333,14	21453,4	21400,5	21408,0	21370,2	21373,0	21378,9	21370,7
2	18607,2	18598,7	18709,9	18798,6	18826,5	18838,2	18846,9	18853,2
3	15173,8	15199,7	15289,9	15353,9	15497,6	15521,5	15526,4	15563,1
4	11271,8	11303,3	11403,1	11501,9	11605,3	11632,7	11640,6	11715,9
5	7280,3	7326,2	7369,5	7453,0	7516,9	7539,5	7546,1	7655,0
6	3740,8	3760,2	3796,1	3797,9	3748,0	3824,5	3828,7	3943,0
7	1225,1	1218,0	1204,0	1191,1	1214,3	1176,4	1175,3	1233,0
8	523,3	518,2	510,7	503,3	496,3	494,1	493,3	477,1

Таблица 9

 $E\varphi_i$ (в m/m^2) при воздействии температуры

i	$t - \tau_1$ (дни)							
	0	5	15	30	60	90	135	∞
0	-75,01	-79,29	-51,61	-37,13	-23,39	-19,49	-16,39	-16,46
1	-183,33	-175,24	-174,26	-168,55	-162,84	-161,91	-161,50	-160,53
2	-249,47	-233,28	-249,41	-235,04	-237,45	-236,93	-236,85	-234,75
3	-296,03	-293,32	-293,50	-291,29	-290,00	-289,41	-289,07	-286,16
4	-318,88	-341,91	-319,03	-318,98	-321,46	-321,38	-321,21	-336,04
5	-303,30	-303,83	-308,85	-310,34	-313,30	-313,85	-314,08	-312,01
6	-240,73	-242,64	-246,00	-248,81	-251,53	-252,35	-252,68	-254,28
7	-73,07	-71,34	-68,73	-66,21	-63,97	-63,25	-62,99	-58,87

Расчеты произведены по методу эквивалентной нагрузки.

В данном примере под действием давления воды изгибающий момент у основания плотины увеличивается со временем на 12%, перерезывающая сила — на 5,8%, а при воздействии изменения температуры изгибающий момент у основания уменьшается на 21,1% и перерезывающая сила — на 6%. Но отсюда нельзя поспешно сделать вывод о том, что учет ползучести мало влияет на напряженное состояние, так как это зависит от многих факторов: меры ползучести, коэффициентов основания, размеров плотины и т. д. Кроме того, если при расчете $r_i(t)$ и $s_i(t)$ непосредственно учитывать податливость основания, то напряженное состояние изменится.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 23 VI 1960

Ու ժողովրդի

ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԿԱՍԱՐԱՅԻՆ ՊԱՏՎԱՐՆԵՐՈՒՄ ԲԵՏՈՆԻ ՍՈՂՔԻ ՇԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Սովորաբար, կամարային պատվարներում լարումները հաշվելիս, կամարային պատվարը բաժանվում է հորիզոնական կամարների և ուղղահիվ կոնսոլների, որոնք աշխատում են համատեղ: Այդ հնարավորություն է ապիս հաշվի առնելու ինչպես շատավղային և ուրրոդ ճիգերը, այնպես էլ հիմքի ղեկորմացիաները: Ներկա հոդվածում, հիմնվելով [1—2] աշխատություններում զարգացրած մեթոդի և Մասարյի-Հարությունյանի [4] դժային սողքի տեսություն վրա, որոշվում են ջերմային լարումները կամարային պատվարներում՝ սողքի հաշվառումով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Чен Лен-си. К расчету арочных плотин—метод арок-консоль с учетом влияния кручения. „Труды Дальневосточного политехнического института“, № 5, 1959.
2. Ганев Х. Г. К расчету арочных плотин как пространственных систем. „Сборник МИСИ“, № 29, 1959.
3. Розин Л. А. и Гримзе Л. Б. Расчет арочных плотин. Отчет Ленинграда, 1960.
4. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М.—Л. 1952.
5. Власов В. З. Строительная механика тонкостенных пространственных систем. Стройиздат, М., 1949.
6. Степанов Р. Д. О некоторых квадратурных балочных фундаментальных функциях. „Инженерный сборник ин-та Механики АН СССР“, 26, 1958.
7. У Жуй-фын. Расчет арочных плотин с учетом ползучести бетона. „ДАН АрмССР“, № 2, 1960.
8. Пан Цзя-цзин. Некоторые вопросы в проектировании арочной плотины № 502. Отчет Шанхайгидэп, 1957.