ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 4, 1960 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. А. Хачатрян

Об устойчивости и колебаниях трансверсально-изотропной сферической оболочки

1. Рассмотрим тонкую сферическую оболочку толщиною h, изготовленную из трансверсально-изотропного материала. Принимаем, что плоскости изотропии в каждой точке параллельны срединной поверхности оболочки.

За координатную поверхность принимаем срединную поверхность оболочки (сферическую поверхность радиуса R), которая отнесена к географическим координатам α и β (α—угол долготы, β—угол широты). Пусть γ предсталяет расстояние по нормали от точки (α, β) срединной поверхности до точки (α, β, γ) оболочки, причем положительное направление γ совпадает с внешней нормалью срединной поверхности.

В основу настоящей работы кладется предложенная С. А. Амбарцумяном [1] общая теория анизотропных оболочек, которая опирается на следующие гипотезы:

а) нормальный к срединной поверхности линейный элемент оболочки после деформации не меняет своей длины;

б) нормальное напряжение σ_γ пренебрегается по сравнению с прочими напряжениями;

в) касательные напряжения $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ по толщине оболочки изменяются по закону квадратной параболы

$$\tau_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \gamma^2\right)\varphi(\alpha, \beta), \quad \tau_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \gamma^2\right)\psi(\alpha, \beta), \tag{1.1}$$

где $\varphi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$—неизвестные функции координат α, β.

Эта теория дает возможность учитывать влияние поперечных сдвигов на напряженное и деформированное состояние оболочек. Она, как указывается в работе [2], улавливает главную часть поправки к классической теории.

Пользуясь выражениями для напряжений σ_α, σ_β и $\tau_{\alpha\beta}$, данными в работе [1], а также известными формулами [3], для определения тангенциальных сил (T_1, T_2, S_1, S_2), моментов (M_1, M_2, M_{12}, M_{21}) и перерезывающих сил (N_1, N_2) получим*:

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2) + T_1^*, \quad N_1 = \frac{h^3}{12}\varphi,$$

* В настоящей статье пренебрегаем величинами порядка h^2/R^2 по сравнению с единицей.

$$T_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\mu\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + T_2^*, \quad N_2 = \frac{h^3}{12}\psi,$$

$$S_1 = S_2 = S = \frac{Eh}{2(1+\mu)}\omega + S^*, \tag{1.2}$$

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\left[\varkappa_1 + \mu\varkappa_2 + \frac{1}{R}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2)\right] + M_1^*,$$

$$M_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\left[\mu\varkappa_1 + \varkappa_2 + \frac{1}{R}(\mu\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\right] + M_2^*,$$

$$M_{12} = M_{21} = H = \frac{Eh^3}{24(1+\mu)}\left(\tau + \frac{\omega}{R}\right) + H^*,$$

где

$$M_1^* = \frac{16R}{9}T_1^* = \frac{Eh^5}{120(1-\mu^2)G'}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{\mu}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varphi + \frac{\mu}{B}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right);$$

$$M_2^* = \frac{16R}{9}T_2^* = \frac{Eh^5}{120(1-\mu^2)G'}\left(\frac{\mu}{A}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varphi + \frac{1}{B}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right), \tag{1.3}$$

$$H^* = \frac{16R}{9}S^* = \frac{Eh^5}{240(1+\mu)G'}\left[\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\varphi}{A}\right) + \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\psi}{B}\right)\right];$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{w}{R},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}u + \frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{w}{R},$$

$$\omega = \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right) + \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{B}\right), \tag{1.4}$$

$$\varkappa_1 = -\left[\frac{w}{R^2} + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)\right],$$

$$\varkappa_2 = -\left[\frac{w}{R^2} + \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{A^2 B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right],$$

$$\tau = -\frac{2}{AB}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right);$$

E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона в плоскости изотропии; G' — модуль сдвига в плоскостях, нормальных к плоскости изотропии; u, v — тангенциальные и w — нормальное перемещения точек срединной поверхности; $A = R$, $B = R\sin\alpha$ — коэффициенты первой квадратичной формы.

Внутренние силы и моменты (1.2) должны удовлетворять следующим дифференциальным уравнениям равновесия [3]

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \alpha}(BT_1) - T_2\frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta}(AS) + \frac{AB}{R}N_1 = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial \alpha}(BS) + S\frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta}(AT_2) + \frac{AB}{R}N_2 = 0,\\
&-\frac{1}{R}(T_1+T_2) + \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(BN_1) + \frac{\partial}{\partial \beta}(AN_2)\right] + Z = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial \alpha}(BM_1) - M_2\frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta}(AH) - ABN_1 = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial \alpha}(BH) + H\frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta}(AM_2) - ABN_2 = 0.
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Здесь предполагается, что тангенциальные состввляющие поверхностной нагрузки равны нулю; Z—нормальная составляющая поверхностной нагрузки.

Отметим, что при рассмотрении задачи статической устойчивости, а также задач динамической устойчивости и колебаний (в случае пренебрежения тангенциальныма силами инерции) замкнутой сферической оболочки под действием равномерной нормальной нагрузки, достаточно иметь одно разрешающее уравнение относительно прогиба w.

Приведем ход получения указанного разрешающего уравнения.

Из (1.7) в силу (1.2) имеем

$$
\frac{1}{A}\left[\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - \frac{h^2}{12R^3}\frac{\partial}{\partial \alpha}(\Delta+2)w\right] - (1-\mu)\frac{1}{B}\frac{\partial \chi}{\partial \beta} + \frac{1-\mu}{R}\left(\frac{u}{R} - \frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right) = -\frac{1-\mu^2}{Eh}\frac{1}{AB}L_1, \tag{1.6}
$$

$$
\frac{1}{B}\left[\frac{\partial \theta}{\partial \beta} - \frac{h^2}{12R^3}\frac{\partial}{\partial \beta}(\Delta+2)w\right] + (1-\mu)\frac{1}{A}\frac{\partial \chi}{\partial \alpha} + \frac{1-\mu}{R}\left(\frac{v}{R} - \frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta}\right) = -\frac{1-\mu^2}{Eh}\frac{1}{AB}L_2, \tag{1.7}
$$

$$
\left(\frac{h^2}{12R^3}\Delta - \frac{1+\mu}{R}\right)\theta - \frac{h^2}{12R^4}(\Delta+1-\mu)(\Delta+2)w + \frac{1-\mu^2}{Eh}Z = -\frac{1-\mu^2}{Eh}L_3, \tag{1.8}
$$

где

$$
\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(Bu) + \frac{\partial}{\partial \beta}(Av)\right] + \frac{2w}{R},
$$

$$
\chi = \frac{1}{2AB}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(Bv) - \frac{\partial}{\partial \beta}(Au)\right]. \tag{1.9}
$$

$$\Delta = \frac{R^2}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right];$$

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[B\left(T_1^* + \frac{M_1^*}{R}\right)\right] - \left(T_2^* + \frac{M_2^*}{R}\right)\frac{\partial B}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}\left[A\left(S^* + \frac{H^*}{R}\right)\right],$$

$$L_2 = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[B\left(S^* + \frac{H^*}{R}\right)\right] + \left(S^* + \frac{H^*}{R}\right)\frac{\partial B}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}\left[A\left(T_2^* + \frac{M_2^*}{R}\right)\right], \tag{1.10}$$

$$L_3 = -\frac{1}{R}\left(T_1^* + T_2^*\right) + \frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(BM_1^*\right) - M_2^*\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(AH^*\right)\right] + \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(BH^*\right) + H^*\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(AM_2^*\right)\right]\right\}.$$

Исключив χ из уравнений (1.6) и (1.7), получим

$$(\Delta + 1 - \mu)\,\theta - \frac{1}{R}\left(\frac{h^2}{12R^2}\Delta + 1 - \mu\right)(\Delta + 2)\,w =$$

$$= -\frac{1-\mu^2}{Eh}\frac{R^2}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{L_1}{A}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{L_2}{B}\right)\right]. \tag{1.11}$$

Пользуясь (1.3), для выражений, стоящих в правых частях уравнений (1.8) и (1.11), получим

$$\frac{R^2}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{L_1}{A}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{L_2}{B}\right)\right] =$$

$$= \frac{5h^5E}{384R(1-\mu^2)G'}(\Delta + 1 - \mu)\left\{\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\varphi) + \frac{\partial}{\partial\beta}(A\psi)\right]\right\},$$

$$L_3 = -\frac{3h^5E}{640R^2(1-\mu)G'}\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\varphi) + \frac{\partial}{\partial\beta}(A\psi)\right] + \tag{1.12}$$

$$+ \frac{h^5E}{120R^2(1-\mu^2)G'}(\Delta + 1 - \mu)\left\{\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\varphi) + \frac{\partial}{\partial\beta}(A\psi)\right]\right\}.$$

Третье уравнение системы (1.5) с учетом (1.2) и (1.9) (пренебрегая членами порядка h^2/R^2 по сравнению с единицей) приводится к виду

$$\frac{h^3}{12}\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\varphi) + \frac{\partial}{\partial\beta}(A\psi)\right] = -Z + \frac{Eh}{R(1-\mu)}\theta. \tag{1.13}$$

Уравнения (1.11) и (1.8), в силу (1.12) и (1.13), принимают вид

$$(\Delta + 1 - \mu)\,\theta - \frac{1}{R}\left(\frac{h^2}{12R^2}\Delta + 1 - \mu\right)(\Delta + 2)\,w =$$

$$= \frac{5h}{32RG'} (\Delta + 1 - \mu) Z,$$

$$\left\{ \frac{1+\mu}{R} - \frac{h^2}{12R^3} \left[1 + \frac{6E}{5(1-\mu)G'} \right] \Delta \right\} \theta + \frac{h^2}{12R^4} (\Delta + 1 - \mu)(\Delta + 2) w = \tag{1.14}$$

$$= \frac{1-\mu^2}{Eh} \left[1 - \frac{Eh^2}{10R^2(1-\mu^2)G'} \Delta \right] Z.$$

Исключив θ из этих уравнений, окончательно получим следующее уравнение относительно w

$$[c^2(\Delta+1)^2 + 1 - k\Delta](\Delta+2) w =$$

$$= \frac{R^2}{Eh} (1 - k\Delta)(\Delta + 1 - \mu) Z, \tag{1.15}$$

где

$$c^2 = \frac{h^2}{12(1-\mu^2)R^2}, \quad k = \frac{Eh^2}{10(1-\mu^2)R^2G'}. \tag{1.16}$$

Уравнение (1.15) является исходным уравнением при рассмотрении задач устойчивости и колебаний замкнутой сферической оболочки.

2. Пусть замкнутая сферическая оболочка находится под действием равномерно распределенного по поверхности нормального внешнего давления $q = \text{const}$.

Учитывая, что оболочка до потери устойчивости находится в безмоментном напряженном состоянии, уравнение статической устойчивости получим, если в (1.15) примем [3]

$$Z = -\frac{q}{2R} (\Delta + 2) w, \tag{2.1}$$

где Δ—безразмерный обобщенный оператор Лапласа, определяемый на сфере в произвольных ортогональных координатах формулой (1.9), а в принятых здесь географических координатах имеющий вид

$$\Delta = \frac{1}{\sin\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\sin\alpha \frac{\partial}{\partial\alpha} \right) + \frac{1}{\sin\alpha} \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} \right]. \tag{2.2}$$

Подставляя (2.1) и (1.15), получим

$$[c^2(\Delta+1)^2 + 1 - k\Delta](\Delta+2) w +$$

$$+ \frac{qR}{2Eh} (1 - k\Delta)(\Delta + 1 - \mu)(\Delta + 2) w = 0. \tag{2.3}$$

Следуя В. З. Власову [3], положим в этом уравнении

$$\Delta w = -\lambda w. \tag{2.4}$$

Тогда для характеристического числа λ получим следующее уравнение

$$\left[c^2(1-\lambda)^2+1+k\lambda+\frac{qR}{2Eh}(1+k\lambda)(1-\mu-\lambda)\right](2-\lambda)=0. \qquad (2.5)$$

Отбрасывая тривиальное решение $\lambda=2$, получим

$$c^2(1-\lambda)^2+1+k\lambda-\frac{qR}{2Eh}(1+k\lambda)(\lambda-1+\mu)=0. \qquad (2.6)$$

Отсюда критическая сила через параметр λ выразится следующим образом

$$q^*=\frac{2Eh}{R}\frac{c^2(\lambda-1)^2+1+k\lambda}{(1+k\lambda)(\lambda-1+\mu)}. \qquad (2.7)$$

Из (2.7) наименьшее значение критической нагрузки будет

$$q^*_{\min}=\frac{2Eh}{R}\frac{2c-2\mu c^2+3k}{1+2k/c}, \qquad (2.8)$$

которое можно представить еще в следующем виде

$$q^*_{\min}=\frac{2Eh}{R}(2c-2\mu c^2-k). \qquad (2.9)$$

В полученных формулах коэффициент k (1.16) дает поправку к классической теории оболочек. Этой поправкой и учитывается влияние поперечных сдвигов.

В (2.8) или (2.9) полагая $k=0$, получим формулу В. З. Власова

$$q^*_{\min}=\frac{2Eh}{R(1-\mu^2)}\left[\sqrt{\frac{1-\mu^2}{3}}\frac{h}{R}-\frac{\mu h^2}{6R^2}\right]. \qquad (2.10)$$

Из полученных формул, как и в случае пластинок [4], замечаем, что при увеличении коэффициента k увеличивается расхождение между найденной критической силой и критической силой, вычисленной по классической теории оболочек ($k=0$).

3. При рассмотрении свободных колебаний ненагруженной сферической оболочки пренебрегаем тангенциальными силами инерции. Тогда уравнение свободных колебаний ненагруженной сферической оболочки получим, если в (1.15) примем

$$Z=-\frac{\gamma_0 h}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad (3.1)$$

где γ_0—удельный вес материала оболочки; g—ускорение силы тяжести.

Подставляя (3.1) в (1.15), получим

$$[c^2(\Delta+1)^2+1-k\Delta](\Delta+2)w+$$

$$+\frac{\gamma_0 R^2}{gE}(1-k\Delta)(\Delta+1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0. \qquad (3.2)$$

Принимая

$$w(\alpha,\beta,t)=W(\alpha,\beta)\sin\omega t$$

и подставляя в (3.2), получим

$$[c^2(\Delta+1)^2+1-k\Delta](\Delta+2)W-$$

$$-\omega^2\frac{\gamma_0 R^2}{gE}(1-k\Delta)(\Delta+1-\mu)W=0. \tag{3.3}$$

Нахождение общего решения уравнения (3.3) весьма затруднительно. Поэтому ограничимся классом решений, являющихся решениями (собственными функциями) следующего дифференциального уравнения

$$\Delta W+\lambda W=0 \tag{3.4}$$

удовлетворяющих граничным условиям для w—условиям непрерывности и однозначности на сфере.

Из (3.3), учитывая (3.4), для частот собственных колебаний получим

$$\omega^2=\frac{gE}{\gamma_0 R^2}(\lambda-2)\frac{c^2(\lambda-1)^2+1+k\lambda}{(1+k\lambda)(\lambda-1+\mu)}. \tag{3.5}$$

Как известно [5], решения уравнения (3.4) на сферической поверхности выражаются через сферические функции. Для того, чтобы эти решения были непрерывными и однозначными на сфере, необходимо и достаточно, чтобы параметр λ принимал значения

$$\lambda_n=n(n+1)\ (n=1,2,3,\cdots), \tag{3.6}$$

представляющие собой собственные значения уравнения (3.4) при указанных граничных условиях.

Общий вид сферической функции порядка n, являющейся решением уравнения (3.4) и удовлетворяющей вышеуказанным граничным условиям, есть

$$W_n(\alpha,\beta)=b_0 P_n(\cos\alpha)+\sum_{m=1}^{n}(b_m\cos m\beta-c_m\sin m\beta)P_{n,m}(\cos\alpha),$$

где b,c—некоторые постоянные; $P_n(x)$—полиномы Лежандра

$$P_n(x)=\frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n];$$

$P_{n,m}(x)$—присоединенные полиномы Лежандра

$$P_{n,m}(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m}=\frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{n!2^n}\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}[(x^2-1)^n].$$

Как известно, $\sin n\beta$ и $\cos n\beta$ обращаются в нуль на $2n$ меридианах, а $P_{n,m}(\cos\alpha)$ (в интервале $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$)—на $n-m$ широтах. Следовательно, этими меридианами и широтами (узловыми линиями) сфера разбивается на участки, внутри которых $W_n(\alpha,\beta)$ (тем самым и прогиб w) сохраняет постоянный знак. Это значит, что параметр λ (3.6) определяет вид формы колебаний.

В (3.5) полагая $k=0$, получим собственные частоты рассматриваемой оболочки, вычисленные по классической теории оболочек.

4. Пусть внешнее нормальное давление, равномерно распределенное по поверхности замкнутой сферической оболочки, меняется периодически во времени

$$q = q_0 + q_1 \cos\theta t. \tag{4.1}$$

При рассмотрении вопроса динамической устойчивости рассматриваемой оболочки, как и в пункте [3], пренебрегаем тангенциальными силами инерции, а также предполагаем, что оболочка до потери устойчивости находится в безмоментном напряженном состоянии.

В силу сказанного, уравнение динамической устойчивости получим, если в (1.15) примем

$$Z = -\frac{q}{2R}(\Delta+2)\,w - \frac{\gamma_0 h}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{4.2}$$

Подставляя (4.2) в (1.15), получим

$$[c^2(\Delta+1)^2 + 1 - k\Delta](\Delta+2)\,w +$$
$$+\frac{R^2}{Eh}(1-k\Delta)(\Delta+1-\mu)\left[\frac{q}{2R}(\Delta+2)+\frac{\gamma_0 h}{g}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]w = 0. \tag{4.3}$$

Ищем решение этого уравнения в виде

$$w(\alpha,\beta,t) = T(t)\,W(\alpha,\beta), \tag{4.4}$$

где $T(t)$—неизвестная функция времени, а $W(\alpha,\beta)$ является решением уравнения (3.4), удвлетворяющим граничным условиям для w—условиям непрерывности и однозначности на сфере.

Подставляя (4.4) в (4.3), при этом учитывая (3.4), (2.7), (3.5) и (4.1), относительно $T(t)$ получим следующее уравнение

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2\left(1-\frac{q_0+q_1\cos\theta t}{q^*}\right)T = 0. \tag{4.5}$$

Это уравнение перепишем в виде

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \Omega^2(1-2\eta\cos\theta t)\,T = 0, \tag{4.6}$$

где

$$\Omega = \omega\sqrt{1-q_0/q^*}, \quad \eta = \frac{q_1}{2(q^*-q_0)}. \tag{4.7}$$

Здесь Ω—частоты собственных колебаний рассматриваемой сферической оболочки, загруженной постоянной составляющей внешнего нормального давления (q_0).

Уравнение (4.6) представляет собой известное уравнение Матье, которое при некоторых соотношениях между его коэффициентами (в данном случае Ω, η) имеет неограниченно возрастающие решения. Этим решениям будут соответствовать области динамической неустойчивости рассматриваемой оболочки.

Границы первых трех областей динамической неустойчивости могут быть определены по следующим приближенным формулам [6]:

$$\frac{\theta^*}{2\Omega} = \sqrt{1 \pm \eta} \tag{4.8}$$

для первой (главной) области неустойчивости,

$$\frac{\theta^*}{2\Omega} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{3}\eta^2}$$

$$\frac{\theta^*}{2\Omega} = \frac{1}{2}\sqrt{1 - 2\eta^2} \tag{4.9}$$

для второй области неустойчивости,

$$\frac{\theta^*}{2\Omega} = \frac{1}{3}\sqrt{1 - \frac{9\eta^2}{8 \pm 9\eta}} \tag{4.10}$$

для третьей области неустойчивости.

Здесь θ^*—критические частоты внешней нагрузки, т. е. частоты внешней нагрузки, соответствующие границам областей неустойчивости.

Институт математики и
механики АН Армянской ССР

Поступила 4 IV 1960

Ա. Ա. Խաչատրյան

ԳՆԴԱՅԻՆ ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ-ԻԶՈՏՐՈՊ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատության մեջ դիտարկվում են տրանսվերսալ-իզոտրոպ նյութից պատրաստված փակ գնդային թաղանթի տատանումների և ստատիկ ու դինամիկ կայունության խնդիրները։

Հետազոտության հիմքում ընկած են Ս. Ա. Համբարձումյանի կողմից առաջադրված [1] հետևյալ հիպոթեզները՝

ա) թաղանթի միջին մակերևույթին նորմալ գծային էլեմենտը դեֆոր-

մացիայից հետո չի փոխում իր երկարությունը.

բ) թաղանթի միջին մակերևույթին զուգահեռ հարթություններում գործող σ_γ նորմալ լարումներն արհամարհվում են մյուս լարումների նկատմամբ.

գ) $\tau_{\alpha\gamma}$ և $\tau_{\beta\gamma}$ շոշափող լարումները ըստ թաղանթի հաստության փոփոխվում են պարաբոլական օրենքով (1.1):

Տվյալ տեսությունը հնարավորություն է տալիս հաշվի առնելու լայնական սահքերի ազդեցությունը թաղանթների լարվածային և դեֆորմացիոն վիճակի վրա:

Այս գրվածքով ստացված է ճկվածքի համար մի հավասարում (1.15), որը ելակետային հավասարում է հանդիսանում տատանումների և կայունության խնդիրներն ուսումնասիրելիս:

Լուծված են հետևյալ խնդիրները՝ ա) ստատիկ կայունության խնդիրը, երբ դիտարկվող թաղանթը գտնվում է մակերևույթով հավասարաչափ բաշխված արտաքին ճնշման տակ, բ) դինամիկ կայունության խնդիրը, երբ վերոհիշյալ ուժը ժամանակի ընթացքում փոփոխվում է պարբերաբար (կոսինուսի օրենքով), գ) չբեռնավորված թաղանթի սեփական տատանումների խնդիրը: Այս վերջին երկու խնդիրները լուծելիս հաշվի են առնված միայն միջին մակերևույթի նորմալի ուղղությամբ գործող իներցիոն ուժերը:

Ստացված են բանաձևեր՝ կրիտիկական ուժի, սեփական տատանումների հաճախականության և դինամիկական անկայունության տիրույթների համար:

Ստացված արդյունքները տարբերվում են թաղանթների կլասիկ տեսությամբ ստացվող համապատասխան արդյունքներից k գործակցի առկայությամբ, որի մեծացման հետ մեծանում է նաև այդ տարբերությունը:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* К общей теории анизотропных оболочек. ПММ, **22**, 2, 1958.

2. *Муштари Х. М., Терегулов И. Г.* Теория пологих ортотропных оболочек средней толщины. Известия АН СССР, ОТН, 6, 1959.

3. *Власов В. З.* Общая теория оболочек. Гостехиздат, М.—Л., 1949.

4. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Об устойчивости и колебаниях анизотропных пластинок. ДАН Арм.ССР, **29**, 4, 1959.

5. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. III, ч. 2, Гостехиздат, 1950.

6. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат 1956.