ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 4, 1960 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

С. Е. Карапетян

Об одном преобразовании конгруэнций

1. Как известно, прямые трехмерного пространства P_3 отображаются в точки гиперквадрики Q_4^2 в пятимерном пространстве P_5 [1], [2]. Касательная гиперплоскость этой гиперквадрики пересекается с Q_4^2 по некоторому трехмерному конусу K_3^2 второго порядка, с вершиной в точке касания. Конус K_3^2 называется асимптотическим многообразием гиперквадрики Q_4^2 [3]. Линии на квадрике Q_4^2 называются асимптотическими, если их касательные принадлежат асимптотическому конусу K_3^2. Соприкасающиеся плоскости асимптотических линий (и только этих линий) принадлежат касательной гиперплоскости квадрики Q_4^2. Асимптотические линии на Q_4^2 определяются дифференциальными уравнениями (5). Квадратичная фундаментальная форма (5) устанавливает полярное соответствие многообразий на касательной гиперплоскости, инцидентных точке касания. Полиаритет [4], установленный гиперквадрикой Q_4^2 в P_5 для этих многообразий, по существу совпадает с соответствием квадратичной формы (5). Два многообразия L_m и L_{4-m}, инцидентных точке касания и касательной гиперплоскости, называются сопряженными многообразиями, если они соответствуют друг другу в полярном соответствии квадратичной формы (5).

В [3], с помощью этих сопряженных многообразий, был получен ряд теорем и геометрических образов, связанных с конгруэнциями и комплексами прямых обычного пространства P_3.

В настоящей статье, с помощью тех же сопряженных многообразий, получается одно преобразование конгруэнций и, в связи с этим, доказывается ряд новых теорем из теории конгруэнций. В работе применен метод внешних форм Картана [5].

В пунктах 2 и 3, с помощью фундаментальной формы, рассматриваются сопряженные многообразия, которые коротко можно характеризовать следующим образом.

Пусть двухмерная поверхность (p_1) является образом нашей конгруэнции в P_5 и L_1 — касательная к (p_1) прямая вдоль линии $\omega_2^1=\lambda\omega_1^3$. В полиаритете формы (5), прямой L_1 соответствует некоторое L_3, которое пересекается с касательной 2-плоскостью поверхности (p_1) по некоторой L_1'. Направления L_1 и L_1' называются сопряженными в кон-

груэнции (P_1). Характеристика L_3 вдоль L_1 есть 2-плоскость L_2, которая имеет с касательной 2-плоскостью (p_1) только одну общую точку p (15). Аналогичную точку p' мы получим, если переменим местами L_1 и L_1'. Способ построения точек p и p' в P_3 приведет к преобразованию Лапласа. Прямая pp' пересекается с Q_1^2 в точках p_1' и p_1'' (17). В P_3 каждая из прямых P_1', P_1'' лежит на одной фокальной плоскости и проходит через другой фокус конгруэнции (P_1). (p_1') и (p_1'') называются преобразованиями Π конгруэнции (p_1) по сопряженным направлениям $\omega_2^4 = \pm\lambda\omega_1^3$.

В пунктах 4 и 5 рассматриваются некоторые частные случаи преобразований Π. В частности условия гармоничности и сопряженности преобразований Π и фокальных поверхностей (p_1), и в связи с этим доказывается несколько теорем.

В пунктах 6 и 8 рассматривается случай, когда развертывающиеся поверхности конгруэнций (p_1') и (p_1'') пересекаются с фокальными поверхностями (p_1) по асимптотическим линиям. Конгруэнция (p_1), допускающая такое преобразование Π, определяется уравнениями (40) и (49). Рассматриваются некоторые геометрические свойства этого нового класса конгруэнций.

В пункте 7 рассматривается случай, когда развертывающиеся поверхности конгруэнций (p_1'), (p_1'') пересекаются с фокальными плоскостями конгруэнции (P_1) по гармонической сети. В этом случае (p_1), (p_1') и (p_1'') являются конгруэнциями W и асимптотические линии на всех их фокальных поверхностях соответствуют друг другу.

В пункте 9 рассматривается случай, когда прямые p_1' и p_1'' полярно сопряжены относительно обеих квадрик Ли фокальных поверхностей конгруэнции (p_1). Такая конгруэнция характеризуется инвариантными уравнениями (55). В этом случае дифференциальное уравнение интегрируется до конца и λ определяется уравнением (57). Доказывается, что при различных значениях постоянного интегрирования конгруэнции (p_1') и (p_1'') не меняются и, следовательно, остаются полярно сопряженными относительно обеих квадрик Ли.

2. Инфинитезимальное перемещение тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ определяется дифференциальными уравнениями

$$dA_i = \omega_i^k A_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3, 4, \tag{1}$$

где ω_i^k — линейные дифференциальные формы, связанные структурными уравнениями проективного пространства [5]

$$D\omega_i^k = [\omega_i^j \omega_j^k]. \tag{2}$$

Из уравнений (1) непосредственно получим

$$dp_l = \theta_l^n p_n, \quad l, n = 1, 2, \ldots, 6, \quad p_1 = (A_1 A_2),$$

$$p_2 = (A_3 A_4), \quad p_3 = (A_2 A_3), \quad p_4 = (A_1 A_4), \quad p_5 = (A_1 A_3), \quad p_6 = (A_4 A_2) \tag{3}$$

$$\theta_1^1 = \omega_1^1 + \omega_2^2, \quad \theta_1^2 = \theta_3^4 = \theta_5^6 = \theta_2^1 = \theta_4^3 = \theta_6^5 = 0,$$

$$\theta_4^2 = -\theta_1^3 = \omega_1^3, \quad \theta_1^4 = -\theta_3^2 = \omega_2^4,$$

$$\theta_1^5 = -\theta_6^2 = \omega_2^3, \quad \theta_1^6 = -\theta_5^2 = \omega_1^4, \quad \theta_2^2 = \omega_3^3 + \omega_4^4,$$

$$\theta_4^1 = -\theta_2^3 = \omega_4^2, \quad \theta_2^4 = -\theta_3^1 = \omega_3^1,$$

$$\theta_6^1 = -\theta_2^5 = \omega_4^1, \quad \theta_5^1 = -\theta_2^6 = \omega_3^2, \quad \theta_1^3 = \omega_2^2 = +\omega_3^3,$$

$$\theta_4^4 = \omega_1^1 + \omega_4^4, \quad \theta_5^5 = \omega_1^1 + \omega_3^3, \quad \theta_6^6 = \omega_4^4 + \omega_2^2.$$

Дифференциальная окрестность до 3-го порядка луча конгруэнции $(A_1 A_2)$, отнесенной к тетраэдру первого порядка, определяется следующими дифференциальными уравнениями (подробности об этих формулах см. [1], стр. 344—349):

$$\omega_1^4 = 0, \quad \omega_3^1 = \alpha\omega_1^3 - \beta\omega_2^4, \quad \omega_1^2 = \beta\omega_1^3 + \gamma\omega_2^4,$$
$$\Delta\alpha = \alpha_1\omega_1^3 - \beta_1\omega_2^4, \quad \Delta\beta = \alpha\beta_1\omega_1^3 + \gamma\beta_2\omega_2^4, \quad \Delta\gamma = \beta_2\omega_1^3 + \gamma_2\omega_2^4 \tag{4}$$

и формулами, полученными из этих заменой указателей 1 и 3 соответственно на 2 и 4 и добавлением штрихов к коэффициентам α, β, γ, с любыми указателями.

Касательная гиперплоскость квадрики Q_4^2 в точке p_1, согласно (3), определяется грасмановым произведением пяти точек $(p_1 p_3 p_4 p_5 p_6)$, а асимптотическое многообразие—дифференциальным уравнением $(d^2 p_1 p_1 p_3 p_4 p_5 p_6) = 0$, которое в силу (3) эквивалентно уравнению

$$\omega_1^3\omega_2^4 - \omega_2^3\omega_1^4 = 0. \tag{5}$$

Как уже было сказано, квадратичная форма, стоящая в левой части уравнения (5), устанавливает соответствие многообразий, инцидентных точке p_1 и касательной гиперплоскости. Такие многообразия называются сопряженными [3].

Каждая линейчатая поверхность L конгруэнции $(A_1 A_2)$ отображается в линию l двухмерной поверхности (p_1), принадлежащей Q_4^2. Если линейчатая поверхность конгруэнции (4) определяется уравнением

$$\omega_2^4 = \lambda\omega_1^3, \tag{6}$$

то касательная прямая соответствующей линии l в P_5 в силу (3) определяется двумя точками

$$(p_1, \quad \lambda p_4 - p_3). \tag{7}$$

Ее сопряженное многообразие есть трехмерная плоскость, которая является характеристикой касательных гиперплоскостей вдоль линии l. Это многообразие можно найти либо путем отыскания характеристик гиперповерхностей, либо с помощью формы, полярной к квадратичной форме (5), написанной для данного и искомого многообразий. Полярная форма (5) для данного одномерного и его сопряженного искомого трехмерного многообразий напишется в виде

$$\overset{1}{\omega}{}_1^3\,\overset{3}{\omega}{}_2^4 + \overset{3}{\omega}{}_1^3\,\overset{1}{\omega}{}_2^4 - \overset{1}{\omega}{}_2^3\,\overset{3}{\omega}{}_1^4 - \overset{3}{\omega}{}_2^3\,\overset{1}{\omega}{}_1^4 = 0, \tag{8}$$

где верхние индексы указывают на размерность многообразия.

Внося сюда значения (4) и (6), получим

$$\omega_2^4 = -\lambda\omega_1^3. \tag{9}$$

Это и есть уравнение сопряженного трехмерного многообразия. Для этого многообразия формы ω_1^3, ω_2^3, ω_1^4 следует считать независимыми формами. Касательная 3-плоскость к многообразию (9) определяется из уравнений (3). Она определяется грасмановым произведением четырех точек

$$(p_2,\ \lambda p_4 + p_3,\ p_5 p_6). \tag{10}$$

Из уравнений (3) и (4) следует, что касательная 2-плоскость поверхности (p_1) пишется в виде

$$(p_1 p_5 p_4). \tag{11}$$

Плоскости (10) и (11) пересекаются по прямой $(p_1,\ p_3 + \lambda p_4)$, являющейся касательной к линии (принадлежащей поверхности (P_1))

$$\omega_2^4 = -\lambda\omega_1^3. \tag{12}$$

Линейчатые поверхности (6) и (12) в конгруэнции $(A_1 A_2)$ называются сопряженными друг с другом поверхностями и обладают известными геометрическими свойствами (см. [6] и [7]). Здесь мы имеем естественное обобщение понятия сопряженности на поверхности X_m в пространстве P_n [3].

3. В этом пункте мы приступаем к построению преобразования конгруэнции. Характеристика 3-плоскости (10) вдоль ее сопряженной линии (6) есть многообразие, инцидентное двум 3-плоскостям (10) и $d(p_1,\ \lambda p_4 + p_3,\ p_5 p_6)$ по $\mathrm{mod}\,(\omega_2^4 - \lambda\omega_1^3)$. Она является двухмерной плоскостью

$$\begin{gathered}(\lambda_1 + \lambda\lambda_2)\,p_1 - 2\,(\lambda p_4 + p_3),\quad 2\lambda p_5 - (\alpha - 2\lambda\beta - \gamma\lambda^2)\,p_1,\\ 2\lambda p_6 - (-\gamma' - 2\lambda\beta' + \alpha'\lambda^2)\,p_1),\end{gathered} \tag{13}$$

где

$$d\ln\lambda + \omega_1^1 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_3^3 = \lambda_1\omega_1^1 + \lambda_2\omega_2^1. \tag{14}$$

Двухмерная плоскость (13) является образом второй серии прямолинейных образующих квадрики Ли линейчатой поверхности (6) (см. [8], [9]). Она с касательной плоскостью (P_1) пересекается только в одной точке

$$p = (\lambda_1 + \lambda\lambda_2)\,p_1 - 2\,(\lambda p_4 + p_3). \tag{15}$$

Поверхность (p), описанная точкой (15), является аналогом первого преобразования Лапласа поверхности (p_1) в сторону линии (12). Это преобразование не имеет всех тех свойств, которыми обладает преобразование Лапласа в трехмерном пространстве, но имеет с ним

много общего (в частности способ построения). Это обстоятельство объясняется тем, что некоторые свойства преобразования Лапласа характерны только для трехмерного пространства.

В этой работе мы не будем подробно излагать теорию преобразования Лапласа в P_5, а дадим лишь один вид преобразования конгруэнции (в конгруэнцию), построенного с помощью первых преобразований Лапласа поверхности (p_1) в сторону двух сопряженных направлений (6) и (12).

Преобразование конгруэнций, которому посвящена эта работа, получается следующим образом: поверхность (p_1) двумя первыми преобразованиями Лапласа приводится в две поверхности, одна из которых описывается точкой p (15), когда ее преобразовываем в сторону линии (12), а другая—точкой

$$p_1' = (\lambda_1 - \lambda\lambda_2)\, p_1 - 2(-\lambda p_4 + p_3), \tag{16}$$

когда ее преобразовываем в сторону линии (6). Прямая pp' пересекается с гиперквадрикой Q_4^2 в двух точках

$$p_1' = \lambda_1 p_1 - 2p_3, \quad p_1'' = \lambda_2 p_1 - 2p_4. \tag{17}$$

Эти точки являются образами прямых трехмерного пространства. Таким образом, данная конгруэнция $(A_1 A_2)$ с помощью сопряженных линейчатых поверхностей (6) и (12) преобразовались в две новые конгруэнции (17). Такое преобразование в дальнейшем обозначается буквой Π.

Уместно заметить, что с каждой линейчатой поверхностью конгруэнций связываются два новых инвариантных линейных комплекса (15) и (16), которые могут являться предметом исследования.

4. Очевидно, что *прямая p_1' проходит через первый фокус луча конгруэнции и принадлежит фокальной плоскости $A_1 A_2 A_4$, а прямая p_1'' — через второй фокус A_2 и лежит в фокальной плоскости $A_1 A_2 A_3$.*

Так как точки A_3 и A_4 координатного тетраэдра выбираются произвольно на фокальных плоскостях конгруэнции (4), то их выберем так, чтобы прямая p_1' совпала с ребром $A_2 A_3$, а p_1'' — с ребром $A_1 A_4$ тетраэдра. В результате такого выбора координатного тетраэдра из (17) получим

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0. \tag{18}$$

Таким образом, ребра p_3 и p_4 в силу (18) описывают два преобразования Π конгруэнций $(A_1 A_2)$. Так как точки A_3 и A_4 на лучах p_3 и p_4 произвольны, то мы их закрепим так, чтобы лучи p_5 и p_6 совпали со вторыми фокальными касательными конгруэнции $(A_1 A_2)$. В силу такого выбора в систему (4) надо внести

$$\beta = 0, \quad \beta' = 0. \tag{19}$$

С помощью (2), (4), (18), (19) дифференцируя внешним образом уравнение (14) и раскрывая полученное квадратичное уравнение по лемме Картана [5], получим линейные уравнения

$$2\omega_3^1 = \lambda_{11}\omega_1^3 + \lambda_{12}\omega_2^4, \quad -2\omega_4^2 = \lambda_{21}\omega_1^3 + \lambda_{22}\omega_2^4,$$
$$\lambda_{12} - \lambda_{21} = 2(\alpha\alpha' + \gamma\gamma'). \tag{20}$$

Развертывающиеся поверхности конгруэнций $(A_1 A_4)$ и $(A_2 A_3)$ соответствуют нулевым линиям фундаментальных форм точек P_3, P_4. После подстановки значений (4) и (20) эти формы приравниваются к нулю и уравнения развертывающихся поверхностей конгруэнций $(A_1 A_4)$ и $(A_2 A_3)$ напишутся в виде

$$\lambda_{22}\omega_2^4\omega_1^3 + \lambda_{21}(\omega_1^3)^2 + 2\alpha'\gamma(\omega_2^4)^2 = 0,$$
$$\lambda_{11}\omega_2^4\omega_1^3 + \lambda_{12}(\omega_2^4)^2 - 2\alpha\gamma'(\omega_1^3)^2 = 0. \tag{21}$$

Из этих уравнений непосредственно вытекает, что развертывающиеся поверхности конгруэнций $(A_2 A_3)$ и $(A_1 A_4)$ соответствуют сопряженным линейчатым поверхностям исходной конгруэнции $(A_1 A_2)$ тогда и только тогда, когда

$$\lambda_{11} = 0, \quad \lambda_{22} = 0. \tag{22}$$

Если оба преобразования Π (конгруэнции $(A_1 A_4)$ и $(A_2 A_3)$) имеют каждое по одной развертывающейся поверхности, соответствующей некоторым развертывающимся поверхностям исходной конгруэнции, то это требование, как следует из (21), эквивалентно уравнениям

$$\lambda_{21} = 0, \quad \lambda_{12} = 0, \tag{23}$$

Оба преобразования Π являются параболическими конгруэнциями тогда и только тогда, когда дискриминанты форм (21) равняются нулю

$$\lambda_{11}^2 + 8\alpha\gamma'\lambda_{12} = 0, \quad \lambda_{22}^2 - 8\alpha'\gamma\lambda_{21} = 0. \tag{24}$$

Фокусами конгруэнции $(A_2 A_3)$ являются точки

$$F_i = A_2 + p_i A_3, \tag{25}$$

где p_i — являются корнями квадратного уравнения

$$\alpha\lambda_{12}p^2 - \lambda_{11}p - 2\gamma' = 0. \tag{26}$$

Если эти фокусы гармонически разделяются точкоми касательных фокальной сети поверхности (A_1), то из уравнения (26) получим $\lambda_{11} = 0$, которое в силу (22) показывает, что *развертывающиеся поверхности конгруэнции* $(A_2 A_3)$ *соответствуют сопряженным поверхностям конгруэнции* $(A_1 A_2)$.

Линейчатые поверхности конгруэнции $(A_1 A_2)$, соответствующие развертывающимся поверхностям конгруэнции $(A_2 A_3)$, тоже удовлетворяют второму уравнению системы (21). Каждая из этих линейчатых поверхностей касается фокальной поверхности (A_1) вдоль некоторой линии

$$\omega_2^4 = k_i\,\omega_1^3, \tag{27}$$

где k_i являются корнями квадратного уравнения

$$\lambda_{12}k^2 + \lambda_{11}k - 2\alpha\gamma' = 0. \tag{28}$$

Касательные к этим линиям в силу (1), (4) и (9) определяются грассмановыми произведениями двух точек

$$(A_1, \quad \gamma k_i A_2 + A_3). \tag{29}$$

Эти две прямые пересекают луч A_2A_3 в фокусах (25) конгруэнции (A_2A_3) тогда и только тогда, когда $p_i = 1/\gamma k_i$, которое в силу (26) и (28) приводит только к одному уравнению

$$\lambda_{12} = 2\gamma\gamma'. \tag{30}$$

Если этому требованию удовлетворяет и вторая конгруэнция, то для нее мы аналогично получим $\lambda_{21} = -2\gamma\gamma'$. В силу этих двух уравнений из (20) получим

$$\alpha\alpha' - \gamma\gamma' = 0, \tag{31}$$

т. е. *исходная конгруэнция является W конгруэнцией*. Если фокусы луча A_1A_4 обозначим через F_3 и F_4, то непосредственно заметим, что *полученная конфигурация содержит в себе четыре* замкнутых цикла четырех конгруэнций (см. [10], [11]).

Как известно, четыре конгруэнции составляют замкнутый цикл если луч каждой конгруэнции пересекает соответствующий луч последующей конгруэнции в его фокусе. Полученные здесь замкнутые циклы являются частными случаями наиболее общих замкнутых циклов, ибо одна диагональ (A_1A_2) каждого замкнутого цикла имеет фокусы в вершинах этого цикла. В работе [11] этот цикл был обозначен через θ_{12}.

Действительно, каждаячетверка точек $A_1F_1A_2F_3$, $A_1F_1A_2F_4$, $A_1F_2A_2F_3$, $A_1F_2A_2F_4$ описывает замкнутые циклы с общей противоположной парой конгруэнций (A_1A_4) и (A_2A_3). Прямая A_1A_2 является общей диагональю для всех циклов и, в силу уравнений (4), имеет фокусы в точках A_1, A_2, т. е. каждый замкнутый цикл является конфигурацией θ_{12}.

5. Теперь найдем условие, при котором развертывающиеся поверхности конгруэнции (A_2A_3) пересекаются с фокальной поверхностью (A_2) исходной конгруэнции по сопряженной сети. В этом случае говорят, что конгруэнция (A_2A_3) сопряжена с поверхностью (A_2) (см. [1], стр. 251—259). Как известно, асимптотические линии поверхности (A_2) определяются уравнением $\alpha'(\omega_2^4)^2 + \gamma'(\omega_1^3)^2 = 0$. (см. [1], стр. 351). Для нахождения сопряженных линий, как всегда, составим полярную форму последнего уравнения для двух сопряженных направлений d и δ

$$\alpha'\omega_2^4(d)\,\omega_2^4(\delta) + \gamma'\omega_1^3(d)\,\omega_1^3(\delta) = 0. \tag{32}$$

Если одна из сопряженных линий определяется дифференциальным уравнением

$$\omega_2^4 = k\omega_1^3, \tag{33}$$

то другая, в силу (32), будет иметь уравнение

$$\omega_2^4 = -\frac{\gamma'}{k\alpha'}\,\omega_1^3. \tag{34}$$

Согласно требованию, развертывающиеся поверхности конгруэнции (A_2A_3) должны пересекаться с поверхностью (A_2) по линиям (33) и (34), т. е. значения (33) и (34) должны удовлетворять второму уравнению системы (21), а последнее будет иметь место только при условии

$$\lambda_{12} = 2\alpha\alpha'. \tag{35}$$

Аналогичное требование для конгруэнции (A_1A_4) приведет к уравнению

$$\lambda_{21} = -2\alpha\alpha'. \tag{36}$$

Из уравнения второй строки системы (20), в силу (36), получим уравнение (31). Итак, *только конгруэнции W допускают преобразования Π, каждое из которых сопряжено с одной фокальной поверхностью этой конгруэнции, и если одно из преобразований Π, порожденное конгруэнцией W, сопряжено с одной фокальной поверхностью этой конгруэнции, то другое преобразование сопряжено с другой фокальной поверхностью.*

Развертывающимся поверхностям конгруэнции (A_2A_3) соответствует некоторая сеть линий на другой фокальной поверхности (A_1). Если эта сеть сопряжена на поверхности (A_1), то говорят, что конгруэнция (A_2A_3) гармонична поверхности (A_1) (см. [1], стр. 251—259).

Пусть конгруэнция (A_2A_3) сопряжена с поверхностью (A_2) и гармонична поверхности (A_1). Тогда на каждой фокальной поверхности конгруэнции (A_1A_2) имеется сопряженная сеть (кроме фокальной сети), соответствующая развертывающимся поверхностям конгруэнции (A_2A_3), т. е. эти две сети на фокальных поверхностях соответствуют друг другу, и следовательно, согласно теореме Петерсона, (A_1A_2) является конгруэнцией W.

Таким образом, *если одно из преобразований Π сопряжено с одной фокальной поверхностью исходной конгруэнции и гармонично другой, то эта конгруэнция является конгруэнцией W.* Обратная теорема тоже справедлива, т. е. *если одно преобразование Π, порожденное W конгруэнцией, сопряжено с одной фокальной поверхностью этой конгруэнции, то оно гармонично другой фокальной поверхности.* Из этой и предыдущей теоремы вытекает также, что *если одно из преобразований Π сопряжено с одной фокальной поверхностью исходной конгруэнции и гармонично другой фокальной поверхности, то другое преобразование также удовлетворяет этим условиям.*

6) В этом пункте рассмотрим случай, когда развертывающиеся поверхности преобразований Π пересекаются с фокальными поверхностями исходной конгруэнции (A_1A_2) по асимптотическим линиям. Как известно [1], асимптотические линии поверхности (A_1) определяются уравнением

$$\alpha(\omega_1^3)^2 + \gamma(\omega_2^4)^2 = 0. \tag{37}$$

Согласно требованию, это уравнение должно совпадать со вторым уравнением системы (21), т. е. должны удовлетворяться следующие условия

$$\lambda_{22} = 0, \quad \lambda_{21} = 2\alpha\alpha'. \tag{38}$$

Аналогичное требование для второго преобразования Π приводит к равенствам

$$\lambda_{11} = 0, \quad \lambda_{12} = -2\alpha\alpha'. \tag{39}$$

В силу (38) и (39) из последнего уравнения (20) получим

$$3\alpha\alpha' + \gamma\gamma' = 0. \tag{40}$$

Конгруэнция, удовлетворяющая уравнению (40), является новым частным случаем конгруэнций с постоянным инвариантом Вельша (см. [12], [13], [14]). Обозначая эту конгруэнцию через V_1, мы можем сформулировать следующую теорему: *конгруэнции V_1, и только они, допускают такие преобразования Π, обе развертывающиеся поверхности каждого из которых пересекаются с фокальными поверхностями этой конгруэнции по асимптотическим линиям.* Конгруэнция V_1 определяется произволом одной функции одного аргумента, т. е. одну ее фокальную поверхность можно задавать произвольно.

7. Рассмотрим случай, когда развертывающиеся поверхности преобразований Π пересекаются с фокальными поверхностями по гармонической сети. Гармоническая сеть фокальной поверхности характеризуется следующими свойствами: во-первых она на этой поверхности является сопряженной сетью, во вторых линейчатые поверхности конгруэнции, соответствующие гармонической сети, также являются сопряженными. Как известно [9], гармоническая сеть фокальной поверхности (A_1) определяется дифференциальным уравнением

$$\alpha(\omega_1^3)^2 - \gamma(\omega_2^4)^2 = 0. \tag{41}$$

Согласно требованию, это уравнение должно совпадать с первым уравнением системы (21). Эти условия и аналогичные условия для поверхности (A_2) и конгруэнции (A_2A_3) напишутся в виде

$$\lambda_{11} = 0, \quad \lambda_{22} = 0, \quad \lambda_{21} = -2\alpha\alpha', \quad \lambda_{12} = 2\alpha\alpha'. \tag{42}$$

В силу этих уравнений из последнего уравнения системы (20) получим уравнение (31), которое показывает, что (A_1A_2) есть конгруэнция W. Таким образом, *конгруэнции W, и только они, допускают такие преобразования Π, развертывающиеся поверхности которых пересекаются с фокальными поверхностями по гармоническим сетям.*

Внося значения (42) в уравнения (20), будем иметь

$$\omega_1^4 = 2\alpha'\omega_2^4, \quad \omega_4^2 = 2\alpha'\omega_1^3. \tag{43}$$

Дифференцируя внешним образом уравнение (31) и внося значения из (4), получим инвариантные уравнения

$$\begin{aligned} &\alpha_1+\beta_2-2\beta_2'=0, \quad \alpha_2'+\beta_1'-2\beta_1=0, \\ &\alpha_1-\gamma_1'=\beta_2+\beta_2', \quad \alpha_2'-\gamma_2=\beta_1+\beta_1'. \end{aligned} \tag{44}$$

Теперь покажем, что в силу системы (44) конгруэнции преобразования Π являются W конгруэнциями. Для доказательства этой теоремы мы будем ссылаться на другую теорему, а именно: касательная 2-плоскость двухмерной поверхности гиперквадрики Q_4^2 имеет характеристическую прямую тогда и только тогда, когда эта поверхность является образом W конгруэнции. Причем только два направления допускают такую характеристику. Эти направления соответствуют асимптотическим линиям фокальных поверхностей W конгруэнции.

Как следует из (17) и (18), поверхность (p_3) является образом одного преобразования Π конгруэнции $(A_1 A_2)$. Касательная двухмерная плоскость поверхности (p_3), в силу уравнений (3), (19) и (43), определяется тремя точками

$$\pi=(p_3,\ \gamma' p_5-\alpha p_6,\ p_2+\alpha\alpha' p_1). \tag{45}$$

Для нахождения характеристики необходимо найти общие точки этой плоскости и ее бесконечноблизкой плоскости, т. е. плоскости $d\pi$. В силу уравнений (3), (4) и первого уравнения (43) для $d\pi$ получим

$$d\pi=\theta\pi+\{p_3,\ \gamma'\Delta\gamma' p_5-\alpha\Delta\alpha p_6+2\alpha\gamma'\omega_1^3 p_4+(\gamma'\omega_3^2-\alpha\omega_4^1)p_1,\ p_2+\alpha\alpha' p_1\}+$$

$$+\left\{p_3,\ \gamma' p_5-\alpha p_6,\ \alpha\alpha'(\Delta\alpha+\Delta\alpha')p_1+2\alpha\alpha'\omega_2^4 p_4-\left(\omega_4^1+\frac{\gamma'}{\alpha}\omega_3^2\right)p_5\right\}. \tag{46}$$

Два многообразия (45) и (46) имеют общую прямую тогда и только тогда, когда дифференцирование берется по направлению, удовлетворяющему следующим двум уравнениям

$$\begin{aligned} &\omega_1^3(\alpha\omega_4^1+\gamma'\omega_3^2)+\alpha\alpha'\omega_2^4(\Delta\gamma'-\Delta\alpha)=0, \\ &\gamma'\alpha\omega_1^3(\Delta\alpha+\Delta\alpha')+\omega_2^4(\alpha\omega_4^1-\gamma'\omega_3^2)=0. \end{aligned} \tag{47}$$

В силу системы (44) эти уравнения совпадают с одним уравнением (37), т. е. асимптотические линии фокальных поверхностей W конгруэнции $(A_2 A_3)$ соответствуют асимптотическим линиям фокальных поверхностей исходной конгруэнции.

Точно так же можно доказать, что второе преобразование Π тоже является W конгруэнцией и асимптотические линии ее фокальных поверхностей соответствуют асимптотическим линиям исходной конгруэнции. Таким образом мы получаем следующую теорему.

Если развертывающиеся поверхности обоих преобразований Π пересекаются с фокальными поверхностями по гармоническим линиям, то оба преобразования Π являются W конгруэнциями, асимп-

тотические линии фокальных поверхностей которых соответствуют асимптотическим линиям фокальных поверхностей исходной конгруэнции.

8. Здесь возвращаемся к п. 6. Опять рассмотрим случай, когда развертывающиеся поверхности преобразований Π пересекаются с фокальными поверхностями исходной конгруэнции по асимптотическим линиям. Как мы увидели, такая конфигурация характеризуется равенствами (38), (39), (40). Вчеся значения (38) и (39) в уравнения системы (20), получим

$$\omega_3^1 = -\alpha\alpha'\,\omega_2^4, \quad \omega_4^2 = -\alpha\alpha'\,\omega_1^3. \tag{48}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (48) и обычным образом уравнение (40) и пользуясь системой (4), получим

$$\begin{gathered} \alpha_1 + 3\beta_2 = 0, \quad \alpha_2' + 3\beta_1 = 0, \\ \alpha_1 - \gamma_1' = \beta_2 + \beta_2', \quad \alpha_2' - \gamma_2 = \beta_1 + \beta_1'. \end{gathered} \tag{49}$$

Таким образом конгруэнция V_1 характеризуется инвариантными уравнениями (40) и (49). Выясним некоторые геометрические свойства этой конгруэнции.

Соприкасающиеся плоскости гармонической сети $|\sqrt{\gamma}\,\omega_2^4 = \varepsilon\sqrt{\alpha}\,\omega_1^3|$ ($\varepsilon = \pm 1$) фокальной поверхности (A_1) относительно нашего тетраэдра напишутся в виде [14]

$$\{A_1,\ A_3 + \varepsilon\sqrt{\alpha\gamma}\,A_2,\ (\alpha\beta_1 + 3\varepsilon\sqrt{\alpha\gamma}\beta_2 + \varepsilon\sqrt{\alpha\gamma}\,\alpha_1 + \alpha\gamma_2)\,A_2 + 4\alpha A_4\}. \tag{50}$$

Эти две плоскости пересекаются по прямой, определяемой двумя точками

$$\{A_1,\ (3\beta_2 + \alpha_1)\,A_3 - (\gamma_2 + \beta_1)\,A_2 - 4\alpha A_4\}. \tag{51}$$

Если прямая (51) находится на фокальной плоскости точки A_2 и аналогичная прямая, полученная для гармонической сети фокальной поверхности (A_2), находится на фокальной плоскости точки A_1, то эти требования равносильны двум уравнениям первой строки системы (49).

Как известно, уравнение квадрики Ли фокальной поверхности (A_1) конгруэнции $(A_1 A_2)$ напишется в виде ([1], [15])

$$x_2^2 + \alpha\gamma x_3^2 - 2\gamma\, x_1 x_4 - \frac{\beta_1 + \gamma_2}{2}\, x_2 x_4 + \frac{\alpha_1 - \beta_2}{2}\, x_3 x_4 + k x_4^2 = 0, \tag{52}$$

где x_i — координаты текущей точки квадрики относительно нашего тетраэдра, а k — некоторая (нас не интересующая) комбинация коэффициентов высшего порядка. Квадрика Ли второй фокальной поверхности (A_2) получается из (52) посредством перестановки индексов 1 и 2, с прибавлением штрихов к коэффициентам α, β, γ.

Инвариантные уравнения второй строки системы (49) показывают, что прямая (51) и ее аналогичная прямая для поверхности (A_2) являются общими полярно сопряженными прямыми относительно обеих

квадрик Ли фокальных поверхностей конгруэнции $(A_1 A_2)$ [14]. Итак, *прямая пересечения соприкасающихся плоскостей гармонических линий каждой фокальной поверхности конгруэнции V_1 находится на фокальной плоскости другого фокуса и эта пара прямых является общей парой полярно сопряженных прямых относительно квадрик Ли фокальных поверхностей.*

9. В этом пункте мы рассмотрим случай, когда пара соответствующих лучей преобразований Π является общей полярно сопряженной парой относительно квадрик Ли фокальных поверхностей конгруэнции $(A_1 A_2)$. Так как для нашего тетраэдра соответствующие лучи преобразований Π совпадают с прямыми $A_1 A_4$ и $A_2 A_3$, то легко увидеть, что эти две прямые полярно сопряжены относительно квадрики (52) тогда и только тогда, когда выполняются условия $\beta_1 + \gamma_2 = 0$, $\alpha_1 - \beta_2 = 0$. Та же пара прямых полярно сопряжена и относительно квадрики Ли поверхности (A_2) тогда и только тогда, когда выполняются условия $\beta_2' + \gamma_1' = 0$, $\alpha_2' - \beta_1' = 0$. Таким образом наше требование приведет к четырем уравнениям

$$\beta_1 + \gamma_2 = 0, \quad \alpha_1 - \beta_2 = 0, \quad \beta_2' + \gamma_1' = 0, \quad \alpha_2' - \beta_1' = 0. \tag{53}$$

Эти уравнения не инвариантны относительно преобразования тетраэдра (A_i) внутри тетраэдров первого порядка [1]. Чтобы в левых частях системы (53) получить инвариантные выражения, продифференцируем по вторичным параметрам уравнения (14)

$$\delta\lambda_1 = \lambda_1(\overline{\omega}_3^2 - \overline{\omega}_1^1) - 2\overline{\omega}_2^1, \quad \delta\lambda_2 = \lambda_2(\overline{\omega}_4^4 - \overline{\omega}_2^2) + 2\overline{\omega}_4^2, \tag{54}$$

где δ — символ дифференциала по вторичным параметрам, а $\overline{\omega}_i^j$ — выражения соответствующих ω_i^j при фиксированных главных параметрах. Теперь прямым подсчетом можно убедиться, что уравнения

$$\begin{aligned} &\alpha_1 - \beta_2 - 2\lambda_1 = 0, \quad \alpha_2' - \beta_1' + 2\lambda_2 = 0, \\ &\gamma_2 + \beta_1 + 2\lambda_2 = 0, \quad \gamma_1' + \beta_2' - 2\lambda_1 = 0, \end{aligned} \tag{56}$$

являются инвариантными уравнениями и эквивалентны системе (53).

Исключая из системы (55) λ_1 и λ_2, получим уравнения второй строки системы (44), что и естественно было ожидать, ибо наше требование является условием задачи Бадаляна [12].

Внося значения λ_1 и λ_2 из системы (55) в уравнение (14), получим

$$2(d\ln\lambda + \omega_1^1 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_3^3) = (\alpha_1 - \beta_2)\,\omega_1^3 - (\gamma_2 + \beta_1)\,\omega_2^4, \tag{56}$$

или в силу системы (4) будем иметь

$$2(d\ln\lambda + \omega_1^1 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_3^3) = \Delta\alpha - \Delta\gamma =$$

$$= d\ln\frac{\alpha}{\gamma} + 2(\omega_1^1 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_3^3).$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$\lambda^2 = c\frac{\alpha}{\gamma}, \quad \left(\text{или } \lambda^2 = c_1\frac{\gamma'}{\alpha'}\right), \tag{57}$$

где c — произвольная постоянная интегрирования.

Так как конгруэнция $(A_1 A_2)$ порождала (по сопряженным направлениям $\omega_2^4 = \pm\lambda\omega_1^3$) два преобразования Π, то согласно уравнению (57) можно сказать, что только по направлениям $\omega_2^4 = \pm\sqrt{c\frac{\alpha}{\gamma}}\,\omega_1^3$ оба преобразования Π конгруэнции $(A_1 A_2)$ полярно сопряжены относительно двух квадрик Ли фокальных поверхностей этой конгруэнции. Как следует из выражений (14) и (17), умножение λ на c (c — постоянное) не меняет положения точек (17), т. е. *Π преобразования конгруэнции $(A_1 A_2)$ по двум направлениям $\omega_2^4 = \pm\lambda\omega_1^3$ и $\omega_2^4 = \pm c\lambda\omega_1^3$ совпадают друг с другом.*

Из этой теоремы следует, что *Π преобразования конгруэнции $(A_1 A_2)$ по различным направлениям (57) (для различных постоянных значений c) приведут только к одной паре конгруэнций.*

Из уравнения (57) следует, что для $c = 1$ получим линейчатые поверхности, соответствующие гармонической сети (41) первой фокальной поверхности, для $c = -1$ — линейчатые поверхности, соответствующие асимптотическим линиям той же фокальной поверхности, для $c = (\varepsilon + \varepsilon_1\sqrt{2})^2$ ($\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon_1 = \pm 1$) — линейчатые поверхности G_1 и т. д. В работе [9] нами было получено бесконечно много линейчатых поверхностей G_i конгруэнции $(A_1 A_2)$, обладающих известными геометрическими свойствами. Все эти линейчатые поверхности G_i получаются из (57) подходящим выбором постоянного.

Все линейчатые поверхности $\omega_2^4 = \lambda\omega_1^3$, где λ удовлетворяет уравнению (57), связаны с дифференциальной окрестностью второго порядка луча конгруэнции $(A_1 A_2)$. В дальнейшем мы их назовем *линейчатыми поверхностями окрестности второго порядка* луча конгруэнции.

Таким образом, *все преобразования Π данной конгруэнции по различным линейчатым поверхностям окрестности второго порядка приводят только к одной паре конгруэнций.*

Пара соответствующих лучей двух конгруэнций преобразования Π полярно сопряжена относительно обеих квадрик Ли фокальных поверхностей исходной конгруэнции тогда и только тогда, когда это преобразование осуществляется по направлению линейчатых поверхностей окрестности второго порядка.

Армянский педагогический институт
им. Х. Абовяна

Поступила 10 XII 1959

Ս. Ե. Կարապետյան

ԿՈՆԳՐՈՒԵՆՑԻԱՆԵՐԻ ՄԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

[3] աշխատության մեջ ներմուծված է հիպերկվադրիկալի համալուծ բազմաձևությունների գաղափարը P_3-ում: Այդ բազմաձևությունների օգնությամբ այս աշխատությունում ստացվել են կոնգրուենցիայի նոր ձևափոխություններ, այսինքն՝ նոր երկու կոնգրուենցիաներ, որոնք ստացվում են տրված կոնգրուենցիայից իրար համալուծ երկու գծավոր մակերևույթների ընտանիքների ուղղությամբ: Նոր կոնգրուենցիաների ճառագայթները անցնում են հին կոնգրուենցիայի մի ֆոկուսով և գտնվում են մյուս ֆոկալ հարթության վրա: Եթե այդ ձևափոխությունները նշանակենք Π գույդով, ապա ստացվում են հետևյալ հիմնական թեորեմները՝

1. Միայն W կոնգրուենցիան է թույլ տալիս այնպիսի Π գույդ, որի կոնգրուենցիայից յուրաքանչյուրը համալուծ է մի ֆոկալ մակերևույթի, և եթե Π գույդի կոնգրուենցիաներից մեկը (առաջացած W կոնգրուենցիայից) համալուծ է W կոնգրուենցիայի ֆոկալ մակերևույթներից մեկին, ապա մյուսը համալուծ է մյուս ֆոկալ մակերևույթին:

2. Եթե Π գույդի կոնգրուենցիաներից մեկը համալուծ է նախկին կոնգրուենցիայի ֆոկալ մակերևույթներից մեկին և հարմոնիկ մյուսին, ապա նախկին կոնգրուենցիան W է, հակառակը ևս ճիշտ է:

Աշխատության մեջ ստացված է կոնգրուենցիայի նոր դաս (V_1), որը բնութագրվում է հետևյալ թեորեմով՝

3. V_1 կոնգրուենցիաները և միայն նրանք են թույլ տալիս այնպիսի Π գույդ, որի փոխող մակերևույթները հարում են նախորդ կոնգրուենցիայի ֆոկալ մակերևույթներին վերջինների ասիմպտոտական գծերով:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фиников С. П.* Теория пар конгруэнций. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
2. *Фиников С. П.* Теория пар конгруэнций. Гостехиздат, М., 1956.
3. *Карапетян С. Е.* Сопряженные многообразия и их приложение. „ДАН СССР“.
4. *Норден А. П.* Пространства аффинной связанности. Гостехиздат, М.—Л., 1950
5. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
6. *Щербаков Р. Н.* Проективная теория репера линейчатой поверхности конгруэнции. „Мат. сборник“, **46** (**88**), вып. 2, 1958.
7. *Карапетян С. Е.* Конфигурация L. „Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук“, **13**, № 2, 1960.
8. *Карапетян С. Е.* Поверхности второго порядка Ли для линейчатых поверхностей конгруэнций. „ДАН СССР“, **117**, № 2, 1957.
9. *Карапетян С. Е.* Гармонические квадрики и некоторые линейчатые поверхности конгруэнций. „ДАН СССР“, **122**, № 3, 1958.
10. *Карапетян С. Е.* Конфигурация θ Попова. „Сб. научных трудов Арм. ПИ“, № 5, 1955.
11. *Карапетян С. Е.* Замкнутый цикл четырех конгруэнций. „Мат. сборник“, **41** (**33**), вып. 2, 1957.

12. *Бадалян В. Х.* Геометрическая характеристика конгруэнции с постоянным инвариантом Вельша. „ДАН СССР", **33**, 1941.
13. *Карапетян С. Е.* Две конгруэнции с общими инвариантами F и F'. „Научные доклады ВШ", физ.-мат., № 2, 1958.
14. *Карапетян С. Е.* Геометрическое значение некоторых инвариантов конгруэнций. „Научные доклады ВШ", физ.-мат., № 1, 1958.
15. *Васильев А. М.* Об одном классе конгруэнций W. „Ученые записки МГУ", серия матем., **7**, 1954.

ՀԱՅ. ԽՍՀ ԳԱ ԳՐԱԴԱՐԱՆ