

АСТРОФИЗИКА

Э. С. Бурунсузян

О надежности обнаружения дискретных источников космического радиоизлучения

§ 1. Введение

В предыдущей нашей работе* был рассмотрен вопрос о достоверном обнаружении дискретных источников космического радиоизлучения, и было показано, что источник может быть достоверно обнаружен, если соответствующая ему температура антенны превышает порог, определяемый формулой

$$\delta T = \left[2 \ln \frac{1}{p} N_{\text{ш}} T \right] \sqrt{\frac{\Delta F}{\Delta f}} \quad (1)$$

Этот порог назван нами порогом достоверного обнаружения. В формуле (1) приняты следующие обозначения:

$N_{\text{ш}}$ — коэффициент шума радиотелескопа,

T — температура согласованного с его входом сопротивления,

Δf — полулобса пропускания усилителей высоких частот,

ΔF — лобса пропускания радиотелескопа,

p — вероятность нахождения источников в „поле зрения“ радиотелескопа, зависящая от размеров „поля зрения“ и количества источников.

При определении порога достоверного обнаружения предполагалось, что, анализируя выходные флуктуации, исследователь практически достоверно (безошибочно) отыскивает всплески, обязанные источникам. В силу такого предположения вероятность правильного суждения о наличии источника по сигналу на выходе, искаженному помехами, подлагалась близкой к единице ($p' \approx 1$). Такое предположение обосновывалось тем, что, по данным многих наблюдений, исследователь действительно может практически безошибочно отождествлять выходные всплески с источниками. Однако, вопрос о том, каково должно быть количество наблюдений „ n “, необходимое для практически достоверного отождествления всплесков с источниками, и каково при этом истинное значение вероятности p' , остался открытым.

* Известия АН АрмССР (серия физ.-мат. наук). Порог достоверного обнаружения и предельная чувствительность радиотелескопа, 13, № 1, 1960.

В настоящей работе продолжено рассмотрение затронутых вопросов и получены выражения для оценки надежности обнаружения дискретных источников космического радиоизлучения в зависимости от количества наблюдений n .

§ 2. Вероятность появления помехи

Рассмотрим выходные флуктуации, дисперсия которых равна σ^2 . Если порог достоверного обнаружения характеризовать некоторым уровнем U , то из (1) следует, что

$$\frac{U}{\sigma} = \sqrt{2 \ln \frac{1}{p}}. \quad (2)$$

Для современных антенн вероятность $p < 10^{-2}$, поэтому мы будем интересоваться лишь случаем, когда

$$\frac{U}{\sigma} \geq 3. \quad (3)$$

Если ширина спектра выходных флуктуаций равна $\Delta F'$, то, как известно, образец флуктуаций протяженностью t_A будет характеризоваться m независимыми значениями

$$m = 2\Delta F' t_A. \quad (4)$$

Каждое из этих m значений распределено нормально и характеризует собой флуктуирующий сигнал на конце элементарного промежутка

$$\Delta t = \frac{t_A}{m} = \frac{1}{2\Delta F'}. \quad (5)$$

Однако, в рассматриваемой задаче, в силу монотонности выходного сигнала, его значения на концах малых промежутков Δt можно распространить на промежутки в целом.

Для любого из m промежутков Δt , вероятность превышения флуктуирующим сигналом уровня U равна

$$p(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{U/\sigma}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sigma}\right)^2} d\left(\frac{u}{\sigma}\right). \quad (6)$$

При условии (3) интеграл можно заменить его асимптотическим приближением и вместо (6) написать

$$p(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma}{U} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{U}{\sigma}\right)^2}. \quad (7)$$

Внеся (2) в (7), получаем

$$p(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{p}{\sqrt{2 \ln \frac{1}{p}}}. \quad (8)$$

Так как превышение уровня U для всех m промежутков Δt событие равновероятное, то для вероятности превышения уровня U только на k заранее заданных промежутках, имеем

$$p_k(U) = p(U)^k [1 - p(U)]^{m-k}. \quad (9)$$

Будем называть помехой флуктуационный всплеск, превышающий уровень U и близкий по форме с выходным сигналом, обязанным источнику. Такой всплеск вполне естественно называть помехой т. к. в зависимости от его направления, он либо ошибочно будет признан источником, либо подавит полезный сигнал, если совпадает с ним во времени. Всплески, которые по своим очертаниям далеки от формы выходного сигнала обязанного источнику, исследователем из рассмотрения исключаются и потому не являются помехами.

В данном определении помехи предполагается, что исследователь отождествляет с источниками лишь всплески, превышающие уровень U . Вероятность появления помехи можно оценить выражением (9), если выбрать t_A равным времени воздействия источника на радиотелескоп и положить

$$k = m = 2\Delta F' t_A. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), для вероятности появления помехи получаем

$$p_n(U) = p(U)^{2\Delta F' t_A}. \quad (11)$$

Во избежание недоразумений следует отметить, что вероятность $p_n(U)$ не зависит от того, исследуется выходной сигнал, соответствующий одному наблюдению, или исследуется сигнал, усредненный по данным n наблюдений. Дело в том, что протяженность спектра усредненного сигнала такая же, как и в усредняемых сигналах. Усреднение лишь изменяет форму спектра, преобразует сплошной спектр в гребенчатый. Усреднение таким образом уменьшает дисперсию флуктуаций не за счет сужения спектра в n раз, а за счет сосредоточения энергии флуктуаций внутри интервала $\Delta F'$ около ряда определенных частот. Суммарная ширина интервалов, внутри которых сосредоточена энергия флуктуаций, определяет собой полосу пропускания ΔF радиотелескопа. Эта полоса меньше сплошной полосы усредняемых флуктуаций ровно в n раз, что и обуславливает собой уменьшение дисперсии флуктуаций.

Учитывая связь

$$\Delta F' = n\Delta F \quad (12)$$

и обозначая

$$l = 2\Delta F t_A, \quad (13)$$

выражение (12) перепишем в виде

$$p_n(U) = p(U)^{nl}. \quad (14)$$

Величину l везде в дальнейшем будем полагать заданной и однозначно связанной с требуемой чувствительностью радиотелескопа.

Заметим, что выражение (14) справедливо и для интерференционных наблюдений, так как вероятность появления помехи, сходной с интерференционной картиной, равна вероятности появления одностороннего всплеска такой же ширины.

В случае наблюдений, реализующих предельную чувствительность радиотелескопа (см. сноску на стр. 123), картина иная.

Предельная чувствительность достигается сужением сплошного спектра флуктуаций до предела, еще допускающего прохождение полезной информации об источниках. Предельная полоса пропускания определяется выражением

$$\Delta F_{np} = \frac{1}{2t_0}, \quad (15)$$

где t_0 — продолжительность звездных суток. Выходным сигналом, при каждом наблюдении с предельной полосой, является некоторое (одно) значение напряжения. О наличии источников в этом случае судят по тому, превышает оно уровень U или нет? При таких условиях из (9), положив

$$m = k = 1 \quad (16)$$

для вероятности появления помехи сразу получаем

$$p_n(U) = p(U). \quad (17)$$

§ 3. Вероятность правильности суждений

Введем в рассмотрение следующие вероятности:

$p_n(u)$ — вероятность того, что на радиотелескоп воздействовал источник при условии фиксации на выходе всплеска, превышающего уровень U ,

$p_n(\phi)$ — вероятность того, что на радиотелескоп воздействовал фон общего излучения при условии непоявления на выходе всплеска, превышающего уровень U .

$p_n(u)$ и $p_n(\phi)$ представляют собой вероятности правильности наших суждений об источниках, если мы улавливаемся признавать источниками только всплески, превышающие уровень U . Эти вероятности определяются выражениями

$$p_n(u) = p \frac{p_u(v)}{p(v)}, \quad (18)$$

$$p_n(\phi) = (1 - p) \frac{p_\phi(n)}{p(n)}. \quad (19)$$

в которых обозначены:

$p_u(v)$ — вероятность появления на выходе всплеска, превышающего уровень U при условии, что на радиотелескоп воздействует источник;

$p_{\Phi}(n)$ — вероятность неоявления на выходе всплеска, превышающего уровень U при условии, что на радиотелескоп воздействует фон общего излучения.

$p(v)$ и $p(n)$ — априорные вероятности, соответственно, появления и неоявления на выходе всплеска, превышающего уровень U .

Рассмотрим источники, выходной эффект от которых соответствует уровню U .

Тогда, применительно к рассматриваемой задаче, указанные вероятности можно представить в виде:

$$p_n(v) = p_n(0), \quad (20)$$

$$p_{\Phi}(n) = 1 - p_n(U), \quad (21)$$

$$p(v) = pp_n(0) + (1-p)p_n(U), \quad (22)$$

$$p(n) = pp_n(0) + (1-p)[1 - p_n(U)]. \quad (23)$$

Подставляя эти выражения в (18) и (19), получаем

$$p_n(n) = \frac{1}{1 + \frac{(1-p)p_n(U)}{pp_n(0)}}, \quad (24)$$

$$p_n(\Phi) = \frac{1}{1 + \frac{pp_n(0)}{(1-p)[1-p_n(U)]}}. \quad (25)$$

Как видим, результаты наблюдений могут быть признаны надежными только в случаях, когда дроби в знаменателях этих выражений, много меньше единицы. Интересуясь именно такими случаями, вместо (24) и (25) будем пользоваться приближенными зависимостями

$$p_n(n) \approx 1 - \frac{(1-p)p_n(U)}{pp_n(0)}, \quad (26)$$

$$p_n(\Phi) \approx 1 - \frac{pp_n(0)}{(1-p)[1-p_n(U)]}. \quad (27)$$

Учитывая малость вероятностей p и p_n в сравнении с единицей, имеем

$$p_n(n) \approx 1 - \frac{p_n(U)}{pp_n(0)}, \quad (28)$$

$$p_n(\Phi) \approx 1 - pp_n(0). \quad (29)$$

Используя связь (14) и учитывая, что

$$p_n(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{nt}, \quad (30)$$

получаем

$$p_n(n) \approx 1 - \frac{1}{p} [2p(U)]^{nl}, \quad (31)$$

$$p_n(\phi) \approx 1 - p \left(\frac{1}{2} \right)^{nl}. \quad (32)$$

После учета зависимостей (12), (13) и (8) эти выражения преобразуются к виду

$$p_n(n) \approx 1 - \frac{1}{p} \left[\frac{p}{\sqrt{\pi \ln \frac{1}{p}}} \right]^{2\Delta F t A}, \quad (33)$$

$$p_n(\phi) \approx 1 - p \left(\frac{1}{2} \right)^{2\Delta F t A}. \quad (34)$$

Полученные формулы оценивают надежность обнаружения любого (данного) радиотелескопа.

Для случая реализации предельной полосы пропускания, в выражениях (31) и (32) следует положить $nl = 1$, что приводит к формулам

$$p_n(n) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi \ln \frac{1}{p}}}, \quad (35)$$

$$p_n(\phi) \approx 1 - \frac{p}{2}. \quad (36)$$

§ 4. Ненадежность

Для оценки ненадежности обнаружения дискретных источников космического радиоизлучения, введем критерии, оценивающие относительные количества ложных q_d и не обнаруженных q_n источников. Ложными мы называем источники, ошибочно признанные исследователем в результате отождествления флуктуационного всплеска с источником. Не обнаруженными считаются действительно существующие источники, выходной эффект от которых подавлен флуктуационным всплеском противоположного направления.

Пусть p_d — представляет собой вероятность „обнаружения“ ложного источника, равную

$$p_d = 1 - p_n(n), \quad (37)$$

а p_n — вероятность необнаружения источника, равную

$$p_n = 1 - p_n(\phi). \quad (38)$$

Тогда, при малых p , будем иметь

$$q_a \approx p_a = 1 - p_n(n), \quad (39)$$

$$q_n \approx \frac{p_n}{p} = \frac{1}{p} [1 - p_n(\Phi)]. \quad (40)$$

Подставляя сюда результаты (31) и (32), получаем

$$q_a \approx \frac{1}{p} [2p(U)]^{n!}. \quad (41)$$

$$q_n \approx \left(\frac{1}{2}\right)^{n!} \quad (42)$$

или в иной форме записи

$$q_a \approx \frac{1}{p} [2p(U)]^{2\Delta F t_A}, \quad (43)$$

$$q_n \approx \left(\frac{1}{2}\right)^{2\Delta F t_A}. \quad (44)$$

В случае реализации предельной полосы пропускания, в силу специфической методики наблюдений, величины q_a и q_n не имеют смысла, поэтому в этом случае следует ограничиться оценкой вероятностей ошибочных суждений p_a и p_n , которые определяются выражениями

$$p_a \approx \frac{1}{\sqrt{\pi \ln \frac{1}{p}}}, \quad (45)$$

$$p_n \approx \frac{p}{2}. \quad (46)$$

Напомним, что все выражения, характеризующие ненадежность, получены в предположении воздействия на радиотелескоп только источников, соответствующих его порогу достоверного обнаружения. Если учесть большую интенсивность части источников, которые обнаруживаются с большей надежностью, то можно утверждать, что ненадежность обнаружения всегда удовлетворяет условиям

$$q_a < \frac{1}{p} [2p(U)]^{2\Delta F t_A}, \quad (47)$$

$$q_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{2\Delta F t_A}. \quad (48)$$

Однако, в первом приближении можно считать, что доля более интенсивных источников в общем количестве источников, воздействовавших на радиотелескоп, сравнительно мала и, следовательно, ненадежность обнаружения, в основном, обусловлена именно источниками, близкими по интенсивности к порогу достоверного обнаружения.

Указанное обстоятельство позволяет считать оценку ненадежности по формулам (41–44) удовлетворительной.

В практике радиоастрономических наблюдений, с целью выигрыша в чувствительности, обычно стараются сузить ширину спектра выходных флуктуаций до предела, определяемого зависимостью

$$\Delta F' = \Delta F_{\Phi} = \frac{1}{2t_A}. \quad (49)$$

При такой ширине спектра флуктуаций, ненадежность оказывается равной

$$q_A \approx \frac{1}{\sqrt{\pi \ln \frac{1}{p}}} \approx \frac{1}{4 \div 5}. \quad (50)$$

$$q_n \approx \frac{1}{2}. \quad (51)$$

Как видим, в этом случае около половины воздействовавших на радиотелескоп источников окажется необнаруженной и, кроме того, около половины зарегистрированных всплесков окажется ложными источниками. Результаты (50) и (51) убедительно показывают, что выбор ширины спектра флуктуаций в соответствии с условием (49), с точки зрения обеспечения надежности, является неудовлетворительным. Для этого наихудшего случая, формула (1) является уже не порогом достоверного обнаружения, а просто порогом обнаружения. Она утверждает, что источниками могут быть признаны лишь всплески, превышающие порог (1) с тем большей надежностью, чем больше это превышение. Надежность на самом пороге обнаружения близка к 50% .

§ 5. Оптимальные условия обнаружения

Пусть исследователь задался целью обнаружить в некоторой области небосвода (с телесным углом Ω_0) все источники, для которых температуры антенн превышают пороговое значение $\delta T_{\text{зад}}$. Количество таких источников N всегда можно ориентировочно оценить по накопленным радиоастрономией данным. Для надежного обнаружения необходимо, чтобы количество не обнаруженных источников N_n было значительно меньше N , то есть необходимо задать определенное значение

$$q_n = \frac{N_n}{N} \ll 1. \quad (52)$$

Разрешая (42) и (44) относительно показателей степеней, имеем

$$2\Delta F' t_A = n l \approx \log_2 \frac{1}{q_n}. \quad (53)$$

Из этого выражения, с учетом (13), следует

$$\Delta F'_{\text{онт}} \approx \frac{1}{2t_A} \log_2 \frac{1}{q_n}, \quad (54)$$

$$n_{\text{онт}} \approx \frac{1}{2\Delta F t_A} \log_2 \frac{1}{q_n}. \quad (55)$$

Здесь полоса пропускания радиотелескопа ΔF должна удовлетворять выбранному порогу $\delta T_{\text{раз}}$ по формуле (1).

Таким образом, для достижения цели, исследователь должен обеспечить ширину спектра выходных флуктуаций радиотелескопа, близкую к $\Delta F'_{\text{онт}}$, и судить об источниках по усредненным данным $n_{\text{онт}}$ наблюдений. При этом он должен признавать источниками только те всплески, которые превышают дисперсию флуктуаций в $\sqrt{2 \ln \frac{1}{p}}$ раз и по ширине соответствуют времени t_A .

Заметим, что значение вероятности p может быть оценено по формуле

$$p = N \frac{\Omega_A}{\Omega_0}, \quad (56)$$

в которой через Ω_A обозначен телесный угол, соответствующий „полю зрения“ радиотелескопа. Заметим еще, что при малых p и $nt > 1$ количеством ложных источников можно вообще не интересоваться, так как при этих условиях

$$q_A \ll q_n. \quad (57)$$

При интерференционных наблюдениях, об источниках следует судить по всплескам внутри интервала шириной t_A , поочередно заходящим за уровни U и $-U$. Неадекватность при этом оценивается по тем же формулам (здесь имеется в виду наиболее часто используемый интерферометр с переключателем Райла).

§ 6. В ы в о д ы

1. Для повышения надежности обнаружения дискретных источников космического радиоизлучения, необходимо уменьшать дисперсию выходных флуктуаций не за счет их усреднения во времени, а за счет усреднения множества образцов флуктуаций.

При равных порогах обнаружения, многократные наблюдения с усреднением результатов обеспечивают большую надежность, чем однократные наблюдения с интегрированием выходных флуктуаций.

2. При правильно выбранных параметрах аппаратуры, т. е. при обеспечении условий (54), (55) и при равных порогах обнаружения, интерференционные методы не имеют преимуществ в помехозащищенности от аппаратных флуктуаций.

Է. Ս. Բուսուճուզյան

ԿՈՍՄԻԿԱԿԱՆ ՌԱԴԻՈՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ԴԻՍԿՐԵՏ ԱՂԲՅՈՒՐՆԵՐԻ
ՀԱՅՏՆԱԲԵՐՄԱՆ ՀՈՒՍԱԼԻՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հողվածում քննարկված է կոսմիկական ուղիորճառագայթման դիսկրետ աղբյուրների հախնարհուման հուսալիության հարցը: Դիսկրետ աղբյուրը տեղափոխվելով ուղիորդիտակի տնտնանների վրայով (երկրագնդի առանցքային պատշաի հետևանքով) ընդունիչի հիքի գրանցման վրա առաջ է բերվում թրոիչք: Այդ թրոիչքի հիման վրա հետազոտողը դատում է աղբյուրի առկայության մասին: Սակայն հիքի գրանցման թրոիչքը կարող է պայմանավորված լինել նաև հիքի լարվածության ապարատուրային հատուկ ֆլուկտուացիաներով: Դիտման աղպիսի պայմաններում հետազոտողը կարող է սխալվել, ընդունելով ֆլուկտուացիոն թրոիչքը աղբյուրի տեղ: Այդ կապակցությամբ հետաքրքրական է դիսկրետ աղբյուրների գոյության մասին հետազոտողի եզրակացությունների հուսալիության գնահատականը: Ներկա հողվածում տրվում է աղպիսի գնահատական: Որպես ելակետային տվյալներ օգտագործվում են ապրիորի կերպով հայտնի՝ 1) ֆլուկտուացիաների բաշխումը և 2) ուղիորդիտակի վրա աղբյուրի ներգործության հավանականությունը:

Հավանականությունների տեսության հիմնական թեորեմաների վրա հիմնված հետազոտությունը ցույց է տալիս, որ դիտումների արդյունքների ցանկալի հուսալիությունը միշտ կարող է ապահովվել հիքի ֆլուկտուացիաների սպեկտրի լայնության և դիտումների քանակի ճիշտ ընտրությամբ: