

ГИДРОМЕХАНИКА

А. Г. Багдоев, Э. М. Нерсисян

Определение закона проникания давления
 в сжимаемую жидкость

§ 1. Определение давления в приближении коротких волн

Рассматривается задача о распространении давления в сжимаемую жидкость, занимающую нижнее полупространство. Движение жидкости предполагается осесимметричным. Уравнение состояния жидкости политропическое

$$P = B(S) (\rho^{\gamma} - \rho_0^{\gamma}), \quad (1.1)$$

где ρ и P означают плотность и давление жидкости, S — энтропию.

Обозначим через O точку возникновения давления на поверхности. Направим ось Ox по свободной поверхности жидкости, ось Oy перпендикулярно вниз.

В настоящей работе вычисляется распределение давления на ударной волне, идущей в жидкости (линия AB на фиг. 1).

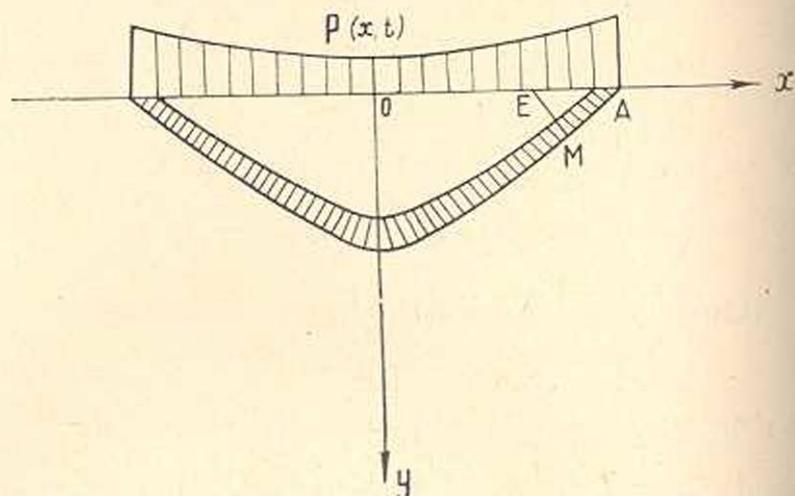
В предположении малости движения жидкости этот вопрос разрешен в работе [2]. Здесь мы пользуемся следующим приближением, уточняющим линейную теорию и учитывающим зависимость скорости распространения возмущений от давления в первом приближении (теория коротких волн).

Рассмотрим реальный случай, когда давление на поверхности резко падает со временем. Тогда основная часть давления в возмущенной жидкости будет сосредоточена в узкой прифронтовой области (вантрихованная область фиг. 1)

Предположим, что до начала движения жидкость была однородной, хотя случай неоднородной жидкости получится столь же просто.

Если рассматривать задачу в линейной постановке, давление в точке M фронта волны, идущей в жидкости, определяется через значение давления в точке E поверхности в момент t_0 прохождения волны через точку E [2].

Если учитывать зависимость скорости звука от давления, то давление в точке M фронта ударной волны, идущей в жидкости, будет определяться через давление в точке E в последовательные моменты времени $\xi \geq t_0$.



Фиг. 1.

Для определения давления в точке M фронта, используем соотношение вдоль луча ME , полученное в работе К. Е. Губкина [1] для идеального газа, которое остается верным и для уравнения состояния (1.1)

$$P = \alpha P_{\text{ак}}, \quad (1.2)$$

где α определяется по значению давления в точке E , $P_{\text{ак}}$ — соответствует линейному случаю [2]

$$P_{\text{ак}} = \frac{x_0 \sqrt{\frac{R(t_0)}{x}}}{L(t)} = \frac{\sqrt{\frac{R'^3(t_0) \sin^2 \theta}{a_0^2 R''(t_0)}}}{L(t)} \sqrt{\frac{R(t_0)}{x}}, \quad (1.3)$$

где

$$L(t) = \sqrt{t - t_0 - \frac{R'^3(t_0) \sin^2 \theta}{a_0^2 R''(t_0)}}; \quad \cos \theta = \frac{a_0}{R'(t_0)}$$

a_0 — скорость звука в невозмущенной жидкости,

$R(t) = x$ — координата фронта на поверхности,

t — время, t_0 определяется уравнением

$$t_0 = t - \frac{1}{a_0} \sqrt{[x - R(t_0)]^2 + y^2}. \quad (1.4)$$

Скорость распространения последовательных волн (характеристик первого семейства), возникших в точке E , в первом приближении для уравнения состояния (1.1) запишется

$$\frac{ds}{dt} = a_0 + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{P_M}{\rho_0 a_0}, \quad (1.5)$$

где s — длина дуги вдоль луча ME ,

P_M — давление в точке M .

Если проинтегрировать (1.5) вдоль луча, получим уравнение характеристических волн N ,

$$\frac{x}{\cos \theta} = a_0(t - t') + \alpha z_0 \frac{\gamma + 1}{2} \sqrt{R(t)} \int_{t'}^t \frac{dt}{\rho_0 a_0 L(t) \sqrt{x_t}} + f(\alpha), \quad (1.6)$$

где $x_t = R(t') + a_0(t - t') \cos \theta$.

Здесь ρ_0 — начальная плотность жидкости, t' — момент прохождения фронта через точку E , $f(\alpha)$ определяется из условия в точке E

$$\frac{R(t')}{\cos \alpha} = a_0(\zeta - t') + \alpha z_0 \frac{\gamma + 1}{2} \int_{t'}^{\zeta} \frac{\sqrt{R(t')} dt}{\rho_0 a_0 L(t) \sqrt{x_t}} + f(\alpha), \quad (1.7)$$

ζ — момент возникновения последовательных волн N ; [1] в точке E , определяемый из граничного условия [2]

$$P_1[R(t'), \zeta] = \frac{\alpha z_0}{L(\zeta)}. \quad (1.8)$$

$P_1(x, t)$ — распределение давления на поверхности за фронтом. Чтобы получить уравнение ударной волны AB , необходимо исключить из (1.6) параметр α . Для этого нужно приравнять скорость распространения N волн $\frac{ds}{dt}$ скорости ударной волны в изэнтропическом приближении.

Для уравнения состояния (1.1) получим уравнение вдоль ударной волны [1]

$$\frac{\alpha_0}{\rho_0 a_0} x^2 \int_{k(t')}^x \frac{\sqrt{R(t')} dx}{\sqrt{x} L(t) \cos \theta_0} = \frac{4}{\gamma + 1} \int_{\zeta}^x \alpha f'(\alpha) d\alpha. \quad (1.9)$$

Если вспомнить значение L , (1.7) упрощается

$$\begin{aligned} f'(\zeta) = & -a - P_1[R(t'), \zeta] \frac{\gamma + 1}{2} \sqrt{R(t')} \frac{1}{a_0 \rho_0 \sqrt{x_t}} - \\ & - \frac{d}{d\zeta} \left\{ P_1[R(t'), \zeta] L(\zeta) \right\} \frac{\gamma + 1}{2} \frac{\sqrt{R(t')}}{a_0 \rho_0} \times \\ & \times \left\{ \frac{2}{\sqrt{a_0 \cos \theta}} \ln \frac{\sqrt{x_t} + \sqrt{a_0 \cos \theta} L(\zeta)}{\sqrt{R(t')} + \sqrt{a_0 \cos \theta} L(t')} \right\}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Если подставить $f(\alpha)$ из (1.10) и α из (1.8) в (1.9), получим уравнение, определяющее ζ в функции координат точки M ударной волны.

Полученное значение ζ нужно подставить в значение давления вдоль луча в точке M , которое можно записать в виде

$$P = P_1[R(t'), \zeta] \frac{L(\zeta)}{L(t)} \sqrt{\frac{R(t')}{x}}. \quad (1.11)$$

Значение t' получится из уравнения $\zeta = t'$. Уравнение для t' получится, если вычтем (1.7) из (1.6)

$$\frac{x - R(t')}{\cos \theta} = a_0(t - t') + P_1 [R(t'), t'] L(t')^{\gamma+1} \int_{t_0}^{t'} \frac{\sqrt{R(t')}}{2 \rho_0 a_0 L(t) \sqrt{x_t}} dt \quad (1.12)$$

Если пренебречь вторым слагаемым в (1.12), имеем

$$t' = t_0.$$

Таким образом, в точке M давление определяется из (1.11), где ζ определяется в функции координат точки M с помощью соотношений (1.8), (1.9) и (1.10)

$$\begin{aligned} \frac{L^2(\zeta)}{\rho_0 a_0^2} |P_1 [R(t'), \zeta]|^2 \int_{t_0}^{\zeta} \frac{\sqrt{R(t')}}{\sqrt{x \cos \theta} \sqrt{\frac{x - R(t_0)}{a_0 \cos \theta} - \frac{R'^2(t_0) \sin^2 \theta}{a_0^2 R''(t_0)}} dx = \\ = \frac{4}{\gamma+1} \int_{t_0}^{\zeta} P_1 [R(t'), \zeta] L(\zeta) f(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Все соотношения, полученные в работе [1], выведены для идеального газа. Они остаются верными и для среды с уравнением состояния (1.1), поскольку исходные уравнения, из которых они выводятся, в обоих случаях совпадают.

Уравнение (1.13) можно записать в более простом виде

$$\begin{aligned} L^2(\zeta) P_1 [R(t'), \zeta] \frac{\sqrt{R(t')}}{\rho_0 a_0^2 \cos \theta} \left\{ 2 \sqrt{a_0 \cos \theta} \ln \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a_0 \cos \theta} L(t)}{\sqrt{R(t')} + \sqrt{a_0 \cos \theta} L(t')} \right\} = \\ = \frac{4}{\gamma+1} \int_{t_0}^{\zeta} P_1 [R(t'), \zeta] L(\zeta) f(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (1.14)$$

С целью иллюстрации полученных формул были проведены расчеты для частного закона давления на поверхности (достаточно резко падающее со временем давление), причем граничное давление берется по теории точечного взрыва Л. И. Седова [3]

$$\begin{aligned} P_1(x, t) = 1.04167 \cdot 10^{-3} R'^2(t) f \left[\frac{x}{R(t)} \right] \frac{\kappa \zeta}{\text{см}^2}, \\ R(t) = 583,43 t^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\text{м}}{\text{сек}}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где $f(\zeta)$ — распределение давления за фронтом ударной волны при точечном взрыве [3]. Расчеты сделаны для жидкости с параметрами $\gamma = 7$, $a_0 = 1543 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$, $\rho = 100 \frac{\text{кг сек}^2}{\text{м}^4}$ для момента времени 0,01.

Хотя линейная постановка задачи на проникание давления при граничных условиях (1.15) вблизи точки B фронта AB дает бесконечное давление и перестает быть верной, расчет давления на AB представляет интерес для качественного исследования явления.

Результаты расчетов по формуле (1.3) дают давление на ударной волне для акустического случая.

Результаты расчета по формулам (1.10), (1.11) и (1.14) дают давление на ударной волне по уточненным формулам.

Расчеты производились для момента времени $t = 0,04$ сек, когда ударная волна близка к акустической. Как видно из результатов вычислений, в нелинейной постановке давление получается примерно в четыре раза меньше, чем в акустической постановке. Столь большая разница объясняется бесконечно большим изменением со временем давления на поверхности; если давление падает менее резко, разница по сравнению с акустическим случаем будет меньше.

Таблица 1

x	$P_1[R(t'), t']$	$P_{ак}$	P
120	$1,12899 \cdot 10^2$	$0,875252 \cdot 10^2$	$0,267465 \cdot 10^2$
60	$8,86488 \cdot 10^2$	$7,12143 \cdot 10^2$	$2,13425 \cdot 10^2$
30	$6,28047 \cdot 10^3$	$5,31165 \cdot 10^3$	$1,58962 \cdot 10^3$
8	$2,76059 \cdot 10^3$	$2,51428 \cdot 10^3$	$0,752448 \cdot 10^3$
10^{-1}	$1,15765 \cdot 10^{11}$	$1,14466 \cdot 10^{11}$	$0,342542 \cdot 10^{11}$
10^{-3}	$1,12972 \cdot 10^{17}$	$1,12843 \cdot 10^{17}$	$0,337480 \cdot 10^{17}$
$5 \cdot 10^{-4}$	$9,02996 \cdot 10^{17}$	$9,02272 \cdot 10^{17}$	$2,70022 \cdot 10^{17}$
10^{-4}	$9,09296 \cdot 10^{16}$	$9,09012 \cdot 10^{16}$	$2,72255 \cdot 10^{16}$

Те же вычисления проделаны для жидкости с параметрами $\gamma = 7$, $a_0 = 200 \frac{м}{сек}$, $\rho_0 = 100 \frac{кгсек^2}{м^4}$ для следующего закона на поверхности

$$P_1(x, t) = (3 - 50t)^2 \frac{кг}{см^2},$$

$$R(t) = 340t(3 - 25t).$$

Результаты этих вычислений приведены в таблице 2.

Как видно из этих расчетов, при небольших t ($\sim 0,01$ сек), нелинейные добавки незначительны и, следовательно, линейная теория достаточно хорошо описывает явление. Очевидно, что для больших t ($\sim 0,06$ сек) (когда давление достаточно затухнет) нелинейные добавки станут существенными.

Таблица 2

x	$P_1[R(t), t]$	$P_{ак}$	P
9,35	6,25	6,25	6,25
8	6,67359	6,63014	6,61357
7	6,97932	6,90438	6,86112
6	7,27893	7,17531	7,12437
5	7,59421	7,40864	7,31014
4	7,90054	7,61813	7,55735
3	8,20611	7,76346	7,70017
2	8,51642	7,74611	7,68362
1	8,81532	6,96137	6,92622
0,5	8,96721	4,22587	4,20600

§ 2. Распространение давления в двухкомпонентную неоднородную жидкость

Рассмотрим предыдущую задачу для двухкомпонентной, неоднородной по глубине жидкости в линейной постановке. Уравнения движения среды запишем в виде

$$\begin{aligned}
 \rho_{11} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + k(u_2 - u_1); & \rho_{21} \frac{\partial u_2}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + k(u_1 - u_2), \\
 \rho_{11} \frac{\partial v_1}{\partial t_1} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + k(v_2 - v_1); & \rho_{21} \frac{\partial v_2}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + k(v_1 - v_2), \\
 \frac{\partial P}{\partial t} \left(\frac{\psi_1}{\rho_{11} a_1^2} + \frac{\psi_2}{\rho_{21} a_2^2} \right) &+ \psi_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{u_1}{x} \right) & & \\
 &+ \psi_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{u_2}{x} \right) & & = 0,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $u_{1,2}$; $v_{1,2}$ — составляющие скоростей компонентов по осям Ox и Oy ; $\rho_{11}(y)$ и $\rho_{21}(y)$ — истинные плотности; $\psi_{1,2}(y)$ — концентрации; P — давление; $k(y)$ — коэффициент трения компонентов; $a_{1,2}(y)$ — скорость звука; t — время.

Пусть $x = R(t)$ радиус фронта давления на поверхности, $P_1(x, t)$ — давление за фронтом. Легко показать, что характеристические поверхности системы (1.1) являются характеристиками для волнового уравнения

$$\Delta \varphi = \frac{1}{a^2(y)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

где роль скорости звука играет величина

$$\bar{a}(y) = \frac{\frac{\psi_1(y)}{\rho_{1l}(y)} + \frac{\psi_2(y)}{\rho_{2l}(y)}}{\frac{\psi_1(y)}{\rho_{1l}(y) a_1^2(y)} + \frac{\psi_2(y)}{\rho_{2l}(y) a_2^2(y)}}, \quad (2.2)$$

Уравнение характеристического луча ME запишется

$$x = \frac{\sin \theta_0}{a(0)} S + R(t_0),$$

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{\bar{a}^2(y)} - \frac{\sin^2 \theta_0}{a^2(0)}}} = S \quad (2.3)$$

$$t - t_0 = \int_0^y \frac{dy}{\bar{a}^2(y) \sqrt{\frac{1}{\bar{a}^2(y)} - \frac{\sin^2 \theta_0}{a^2(0)}}},$$

где $\sin \theta_0 = \frac{a(0)}{R'(t_0)}$,

t_0 — момент прохождения фронта через точку E .

Характеристики уравнений (2.1) ищем обычным путем [2]. Обозначим через $\frac{d}{dx}$ и $\frac{d}{dy}$ дифференцирование в характеристической поверхности. Тогда можно выразить производные по x и y через производную по t . Например:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{du_1}{dx}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{du_1}{dy},$$

где $t = t(x, y)$ — характеристическая поверхность (2.1), причем $\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{dt}{dx}$

и $\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{dt}{dy}$ — косинусы нормали к ней с осями Ox и Oy .

Условие совместности на характеристике запишется

$$\psi_1(y) \frac{du_1}{dt} + \psi_2(y) \frac{du_2}{dx} + \psi_1(y) \frac{u_1}{x} + \psi_1(y) \frac{du_1}{dy} + \psi_2(y) \frac{du_2}{dy} + \psi_2(y) \frac{u_2}{x} +$$

$$+ \left[\frac{\psi_2(y)}{\rho_{2l}(y)} + \frac{\psi_1(y)}{\rho_{1l}(y)} \right] \left[\frac{\partial t}{\partial x} \left(\frac{dp}{dx} \right) + \frac{\partial t}{\partial y} \left(\frac{dp}{dy} \right) \right] -$$

$$- k(y) \left[\frac{\psi_1(y)}{\rho_{1l}(y)} + \frac{\psi_2(y)}{\rho_{2l}(y)} \right] \left[\frac{\partial t}{\partial x} (u_2 - u_1) + \frac{\partial t}{\partial y} (v_2 - v_1) \right] = 0. \quad (2.3)$$

Если учесть, что $u_{1,2} = \frac{p}{\rho_{1,2l}} \frac{\partial t}{\partial x}$; $v_{1,2} = \frac{p}{\rho_{1,2l}} \frac{\partial t}{\partial y}$, уравнение

совместности запишется только через неизвестную величину $P(x, y, t)$

$$2 \frac{dP}{dt} + P \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right) \right] \bar{a}^2(y) + \frac{1}{x} \frac{\partial t}{\partial x} \bar{a}^2(y) P + \\ + A(y) P - \frac{\partial t}{\partial y} B(y) \bar{a}^2(y) P = 0, \quad (2.4)$$

где

$$A(y) = k(y) \left[\frac{1}{\rho_{11}(y)} - \frac{1}{\rho_{21}(y)} \right] \frac{\frac{\psi_2(y)}{\rho_{21}(y)} - \frac{\psi_1(y)}{\rho_{11}(y)}}{\frac{\psi_1(y)}{\rho_{11}(y)} + \frac{\psi_2(y)}{\rho_{21}(y)}}$$

$$B(y) = \left[\frac{\psi_1(y)}{\rho_{11}^2(y)} \rho'_{11}(y) + \frac{\psi_2(y)}{\rho_{21}^2(y)} \rho'_{21}(y) \right] \frac{1}{\frac{\psi_1(y)}{\rho_{11}(y)} + \frac{\psi_2(y)}{\rho_{21}(y)}}$$

$\frac{d}{dt} = \frac{\partial t}{\partial x} \frac{d}{dx} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{d}{dy}$ — производная вдоль луча ME .

Первые три слагаемые (2.4) представляют характеристическое соотношение для однородной сжимаемой жидкости, где вместо скорости звука подставляется $\bar{a}(y)$ из (2.2). Учитывая это, легко записать решение (2.4) на фронте волны, идущей в полупространстве для случая $R'(t) > \bar{a}(y)$ (линия AB фиг. 1).

С помощью (2.3) имеем

$$P_M = P_0 \exp \left[\int_0^y \frac{A(y)}{2} \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{\bar{a}^2(y)} - \frac{\sin^2 \theta_0}{\bar{a}^2(0)}}} + \int_0^y B(y) dy \right]$$

Здесь P_0 соответствует случаю однокомпонентной неоднородной жидкости [5]

$$P_0 = P_1 |R(t_0), t_0| = \\ = R'^{3/2}(t_0) \left| \frac{\cos \theta_0}{\bar{a}(0)} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\bar{a}^2(y)} - \frac{\sin^2 \theta_0}{\bar{a}^2(0)}}} \times \right. \\ \left. \times \frac{\sqrt{\frac{R(t_0)}{x}}}{\sqrt{R'^3(t_0) - R''(t_0)} \int_0^y \frac{dy}{\bar{a}^2(y) \left[\frac{1}{\bar{a}^2(y)} - \frac{\sin^2 \theta_0}{\bar{a}^2(0)} \right]^{3/2}}} \right|$$

Ա. Գ. Բազդոս, Է. Մ. Ներսիսյան

ՃՆՇՄԱՆ ԹԱՓԱՆՑՄԱՆ ՕՐԵՆՔԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ՍԵՂՄՎՈՂ
 ՀԵՂՈՒԿԻ ՄԵՋ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ սրուշվում է ճնշումը հարվածային ալիքի վրա այն նկթադրություններով, որ ամբողջ խանգարված շարժումն ամփոփված է նեղ մերձ-նակրատային տիրույթում: Որոշվում են գծային աեսակի լրացուցիչ անդամները Աշխատության վերջում գծային դրվածքով դուրս է բերված ճնշումը հարվածային ալիքի վրա անհամասեռ երկկամպոնենտային հեղուկի մեջ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Губкин К. Е. Распространение разрывов в звуковых волнах. „ПММ“, 22, вып. 4, 1958.
2. Багдоев А. Г. Распространение давления в упругом полупространстве. „ДАН Арм. ССР“, 28, № 2, 1959.
3. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, М.—Л., 1957.
4. Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимопроинкающих движений сред. „ПММ“, № 2, 1956.
5. Кошин Н. Е. и др. Теоретическая гидромеханика. Гостехиздат, М.—Л., т. II, 1955.
6. Багдоев А. Г. Кандидатская диссертация, МГУ, 1958.