

ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

М. А. Задоян

Распространение пластической зоны в неоднородной трубе при динамическом воздействии давления*

Эксперименты показывают, что металлы, подверженные нейтронному облучению, обладают повышенной механической сопротивляемостью. Значительно возрастает предел текучести, предел прочности и т. д. В связи с этим естественно повышается интерес исследования напряженного состояния конструкций с учетом изменения пластических свойств материала. Упруго-пластическое состояние в облученной трубе при статическом воздействии давления рассмотрено в совместной работе А. А. Ильюшина и П. М. Огибалова**. Статическая задача для пластически-неоднородного длинного цилиндра, при условии идеальной пластичности, ранее рассмотрена в работе В. Ольшева и В. Урбановского [1].

1°. В этой статье рассматривается пластическая зона, распространяющаяся в длинной неоднородной цилиндрической трубе при внезапном приложении равномерного давления или импульса. Аналогичная задача в случае однородной трубы при условии идеальной пластичности решена Е. Х. Агабабян [2].

В нашей задаче считаем, что материал трубы обладает упрочнением по закону

$$\sigma_\theta - \sigma_r = e^{-\gamma r} [\alpha + \beta (\varepsilon_\theta - \varepsilon_r)^m], \quad (1)$$

а модуль сдвига определяется выражением

$$G(r) = G_0 e^{-\gamma r}, \quad (2)$$

где α , γ , β , G_0 и m заданные параметры.

Дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (3)$$

где компоненты напряжения и перемещения функции от r и t .

Условие несжимаемости в случае плоской деформации дает

$$U = \frac{K_0}{2G_0} \frac{Z(t)}{r}, \quad (4)$$

* Доложено на I Всесоюзном съезде по механике в Москве, 29/II—1960.

** Доклад П. М. Огибалова в Ереванском политехническом институте в октябре 1959 г.

где $Z(t)$ неизвестная функция, K_0 постоянная, характеризующая предел текучести материала.

В чисто упругой стадии имеем

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2K_0 \frac{e^{-\gamma r}}{r^2} Z(t). \quad (5)$$

Интегрируя уравнения (3) при граничных условиях

$$\sigma_r(a, t) = -p = \text{const}, \quad \sigma_r(b, t) = 0, \quad (6)$$

получим

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + \lambda^2 Z = p, \quad (7)$$

где

$$P = \frac{2G_0}{K_0} \frac{p}{\rho \ln \frac{b}{a}}, \quad \lambda^2 = \frac{4G_0}{\rho \ln \frac{b}{a}} [Ei_3(\gamma b) - Ei_3(\gamma a)]. \quad (8)$$

Здесь, и в дальнейшем, по аналогии с интегральной показательной функцией, введена функция

$$Ei_q(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-z}}{z^q} dz. \quad (9)$$

При $q=3$ она выражается через функцию $Ei(x)$.

Решение уравнения (7) при однородных начальных условиях имеет вид

$$Z(t) = \frac{P}{\lambda} [1 - \cos \lambda t]. \quad (10)$$

Предполагаем, что пластические деформации впервые возникают на внутренней поверхности трубы

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2K_0 e^{-\gamma r} \text{ при } x=a, t=t_0. \quad (11)$$

Из (5), (10) и (11) следует

$$Z(t_0) = a^2 e^{-\gamma a}, \quad t_0 = \frac{1}{\lambda} \arccos(1 - 2 \frac{P_0}{P}), \quad (12)$$

$$Z'(t_0) = \sqrt{2} \sqrt{Z(t_0)} \sqrt{P - P_0}. \quad (13)$$

Если P превышает значение

$$P_0 = \frac{1}{2} \lambda^2 a^2 e^{-\gamma a}, \quad (14)$$

то в трубе распространяется пластическая зона. Подставляя выражения (1) и (4) в уравнения (3) и интегрируя, находим

$$\sigma_r = -p + \alpha [Ei(\gamma r) - Ei(\gamma a)] + \frac{K_0}{2G_0} \rho \ln \frac{r}{a} \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} +$$

$$+ \beta \left(\frac{K_0}{G_0} \right)^m x^{2m} [Ei_{2m+1}(\mu r) - Ei_{2m+1}(\mu a)] Z^m. \quad (15)$$

$$a \leq r \leq x(t)$$

Через $x(t)$ обозначен радиус границы пластической зоны. Для упругой части, подставляя (2) и (4) в (3) и интегрируя, получим

$$\sigma_r = -2K_0 \gamma^2 [Ei_3(\gamma b) - Ei_3(\gamma r)] - \frac{K_0}{2G_0} \rho \ln \frac{b}{r} \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}. \quad (16)$$

$$x(t) \leq r \leq b$$

Из условия непрерывности σ_r на окружности $r = x(t)$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z}{dt^2} + AZ^m [Ei_{2m+1}(\mu x(t)) - Ei_{2m+1}(\mu a)] + \\ + BZ [Ei_3(\gamma b) - Ei_3(\gamma x(t))] + \\ + C [Ei(\mu x(t)) - Ei(\mu a)] = P, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} A = \frac{2\beta \mu^{2m}}{\rho \ln \frac{b}{a}} \left(\frac{K_0}{G_0} \right)^{m-1}, \quad B = \frac{2G_0 \gamma^2}{\rho \ln \frac{b}{a}}, \\ C = \frac{2G_0}{K_0} \frac{\alpha}{\rho \ln \frac{b}{a}}. \end{aligned} \quad (18)$$

С другой стороны, из непрерывности напряжения, имеем

$$Z(t) = x^2(t) e^{-\mu x(t)}. \quad (19)$$

Выражение $x(t)$ через $Z(t)$ представим в виде $x(t) = f(Z(t))$.

В случае $\mu = \gamma$, $f(Z) = \sqrt{Z}$.

Уравнение (17) представится в виде

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + Q(Z) = P, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} Q(Z) = AZ^m [Ei_{2m+1}(\mu f(Z)) - Ei_{2m+1}(\mu a)] + \\ + BZ [Ei_3(\gamma b) - Ei_3(\gamma f(Z))] + C [Ei(\mu f(Z)) - Ei(\mu a)]. \end{aligned} \quad (21)$$

Умножая (20) на $Z(t)$ и интегрируя, получим

$$[Z'(t)]^2 = [Z'(t_0)]^2 + 2P[Z(t) - Z(t_0)] - 2 \int_{Z(t_0)}^{Z(t)} Q(\xi) d\xi \quad (22)$$

отсюда

$$\int_{Z(t_0)}^{Z(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{[Z'(t_0)]^2 + 2P[\xi - Z(t_0)] - 2 \int_{Z(t_0)}^{\xi} Q(\xi) d\xi}} = t - t_0. \quad (23)$$

Вычисляя интеграл в подкоренном выражении и переходя к переменному x , получим

$$\int_a^{x(t)} \frac{(2-nx)xe^{-nx}dx}{\sqrt{Px^2e^{-nx} - P_0a^2e^{-na} - I(x) + I(a)}} = \sqrt{2}(t-t_0), \quad (23')$$

где введено обозначение

$$\begin{aligned} I(x) = & \frac{A}{m+1} x^{2m+2} e^{-(m+1)nx} [Ei_{2m+1}(\mu x) - Ei_{2m+1}(\mu a)] - \\ & - \frac{B}{2} x^4 e^{-2nx} [Ei_3(\gamma x) - Ei_3(\gamma b)] + Cx^2 e^{-nx} [Ei(\mu x) - Ei(\mu a)] + \\ & + \frac{A[1 + \{(m+1)n + \mu\}x]}{(m+1)\mu^{2m}[(m+1)n + \mu]^2} e^{-\{(m+1)n + \mu\}x} - \\ & - \frac{B[1 + (2n + \mu)x]}{2(2n + \mu)^2} e^{-(2n + \mu)x} + \frac{C[1 + (\mu + n)x]}{(\mu + n)^2} e^{-(\mu + n)x}. \end{aligned}$$

Значение t , при котором наступает чисто пластическое состояние, определяется формулой

$$t_* = t_0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_a^b \frac{(2-nx)xe^{-nx}dx}{\sqrt{Px^2e^{-nx} - P_0a^2e^{-na} - I(x) + I(a)}}. \quad (24)$$

Принимая в (22) $Z'(t_*) = 0$, определяем минимальное значение P , при котором труба переходит в чисто-пластическое состояние

$$\frac{P_*}{P_0} = \frac{a^2 e^{-na}}{b^2 e^{-nb}} + \frac{2[I(b) - I(a)]}{\lambda^2 a^2 b^2 e^{-n(a+b)}}. \quad (25)$$

Отметим, что при помощи (20), из выражений напряжения (15) и (16) можно исключить $Z''(t)$.

2°. Рассмотрим случай, когда на внутренней поверхности трубы приложен мгновенный импульс $\frac{2G_0}{K_0 a} I$.

Интеграл уравнения

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + \lambda^2 Z = 0 \quad (26)$$

при начальных условиях $Z(0) = 0$, $Z'(0) = 1$, имеет вид

$$Z(t) = \frac{l}{\lambda} \sin \lambda t. \quad (27)$$

Пластическое состояние наступает с момента

$$t_0 = \frac{1}{\lambda} \arcsin \frac{l_0}{l}. \quad (28)$$

при этом

$$Z'(t_0) = \sqrt{l^2 - l_0^2}. \quad (29)$$

Если приложенный импульс превышает значение

$$l_0 = \lambda a^2 e^{-\alpha a}, \quad (30)$$

то в трубе распространяется пластическая зона. Формулы (15), (16) (22) и (23) остаются в силе для рассматриваемого случая, если положить в них $P=0$. Тогда имеем

$$\int_{Z(t_0)}^{Z(t)} \frac{d\tilde{z}}{\sqrt{|Z'(t_0)|^2 - 2 \int_{Z(t_0)}^{\tilde{z}} Q(\tilde{z}) d\tilde{z}}} = t - t_0 \quad (31)$$

или

$$\int_a^{x(t)} \frac{(2 - nx) x e^{-nx} dx}{\sqrt{l^2 - l_0^2 - 2[l(x) - l(a)]}} = \sqrt{2} (t - t_0). \quad (32)$$

Чисто-пластическое состояние наступает в момент

$$t_* = t_0 + \int_a^b \frac{(2 - nx) x e^{-nx} dx}{\sqrt{l^2 - l_0^2 - 2[l(x) - l(a)]}}. \quad (33)$$

Принимая в (22) $P=0$ и $t=t_*$, находим

$$Z'(t_*) = \sqrt{l^2 - l_0^2 - 2[l(b) - l(a)]}. \quad (34)$$

Минимальное значение l , при котором пластическая зона охватывает всю трубу, определяется по формуле

$$\frac{l^*}{l_0} = \sqrt{1 + \frac{2}{\lambda^2 a^4 e^{-2\alpha a}} [l(b) - l(a)]}. \quad (35)$$

В случае, когда приложенный импульс превышает значение l_* , труба продолжает инерционное расширение.

Принимая в (17) $P=0$ и $x(t)=b$, для $t > t_*$ находим дифференциальное уравнение движения чисто-пластической трубы

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + A_0 Z^m + B_0 = 0. \quad (36)$$

где

$$A_0 = A [Ei_{2m+1}(\mu b) - Ei_{2m+1}(\mu a)],$$

$$B_0 = C [Ei(\mu b) - Ei(\mu a)].$$

Из (36) следует

$$|Z'(t)|^2 = |Z'(t_*)|^2 - \frac{2A_0}{m+1} [Z^{m+1}(t) - Z^{m+1}(t_*)] - 2B_0 [Z(t) - Z(t_*)]. \quad (37)$$

отсюда

$$\int_{Z(t_*)}^{Z(t)} \frac{d\zeta}{\sqrt{|Z'(t_*)|^2 - \frac{2A_0}{m+1} [\zeta^{m+1} - Z^{m+1}(t_*)] - 2B_0 [\zeta - Z(t_*)]}} = t - t_*. \quad (38)$$

Момент начала разгрузки обозначим через t_{**} . Тогда, принимая в (37) $Z'(t_{**}) = 0$, получим уравнение

$$\frac{2A_0}{m+1} [Z^{m+1}(t_{**}) - Z^{m+1}(t_*)] + 2B_0 [Z(t_{**}) - Z(t_*)] = |Z'(t_*)|^2. \quad (39)$$

из которого определяется $Z(t_{**})$.

Насколько нам известно, пока отсутствуют экспериментальные данные, относящиеся к диаграмме напряжения—деформации облученных материалов в стадии разгрузки. Однако, естественно положить, что разгрузка происходит упруго, по закону

$$\sigma_0 - \sigma_r - (\sigma_0^* - \sigma_r^*) = 2G_0 e^{-\gamma r} [z_0 - z_r - (z_0^* - z_r^*)], \quad (40)$$

где звездочками обозначены значения напряжений и деформаций в момент $t = t_{**}$.

Тогда, интегрируя (3) по r , получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + \lambda^2 Z = \left[\frac{d^2 Z}{dt^2} + \lambda^2 Z \right]_{t=t_{**}}. \quad (41)$$

решением которого будет

$$Z(t) = Z(t_{**}) + \frac{N}{\lambda^2} [1 - \cos \lambda(t - t_{**})], \quad (42)$$

где

$$N = \left(\frac{d^2 Z}{dt^2} \right)_{t=t_{**}} = A_0 + B_0 Z^m(t_{**}).$$

Стадию вторичной пластичности рассматривать не будем.

Մ. Ս. Զաղոյան

ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԳՈՏՈՒ ՏԱՐԱԾՈՒՄԸ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԳԼԱՆԱՅԻՆ
ԽՈՂՈՎԱԿՈՒՄ ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՃՆՇՄԱՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ընդունելով նյութը անհամասեռ և անսկզմելի, ուսումնասիրվում է անփերչե կրկար խողովակում պլաստիկական դոտու տարածման հարցը դինամիկական ճնշման և ակնթարթային իմպուլսի ազդեցությունների դեպքում:

Առաջին դեպքում օգտագործելով պլաստիկական պայմանը (1), շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը (3) և լարումների բաղադրիչների լծորդման պայմանը, պլաստիկական դոտու շառավիղը որոշելու համար ստացվում է (30) կրկրորդ կարգի ոչ-գծային դիֆերենցիալ հավասարումը, որի լուծումը տրվում է (23) տեսքով: Որոշվում է կրիտիկական ճնշումը (25), որի դեպքում խողովակը անցնում է դուռ պլաստիկական վիճակի:

Երկրորդ իմպուլսի ազդեցության դեպքում պլաստիկական դոտու շառավիղը որոշվում է (32) հավասարումից, իսկ իմպուլսի կրիտիկական արժեքը, որի դեպքում առաջանում է դուռ պլաստիկական վիճակ՝ (35)-ից:

Իմպուլսի ավելի մեծ արժեքի դեպքում շարունակվում է խողովակի պլաստիկական լայնացումը:

Ուսումնասիրվում է նաև խողովակի բևեռաթափման վիճակը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1 Olszak W. i Urbanowski W. Archiwum Mechaniki Stosowanej, Sprezysto plastyczny Gruboscienny walec niejednorodny pod działaniem parcia wewnętrznego i siły podłużnej, 7, № 3, 1956.

2 Агабабян Е. А. Напряжения в трубе при внезапном приложении нагрузки. «Укранинский математический журнал», 7, № 3, 1953.