

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. М. Дургарян

Осесимметричная температурная задача
 ортотропной круглой пластинки

§ 1. Вывод основных уравнений

Рассмотрим осесимметричную задачу многослойной круглой пластинки, собранной из произвольного числа однородных ортотропных слоев с цилиндрической анизотропией.

Предполагается, что ось анизотропии совпадает с геометрической осью цилиндрического пакета пластинки.

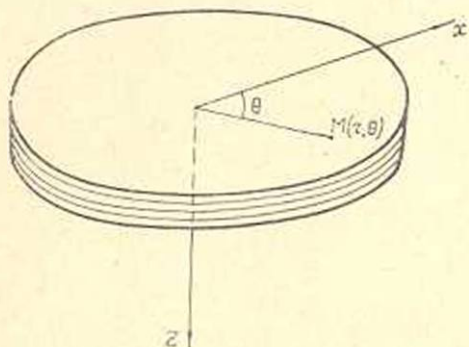
Задача решается в цилиндрической системе координат r , θ и z . Ось z направлена по оси анизотропии, координатная плоскость $z=0$ совмещена с верхним основанием недеформированного пакета, а полярная ось, от которой отсчитывается угол θ , в плоскости $z=0$ располагается произвольно (фиг. 1).

Модули Юнга, коэффициенты Пуассона и температурного расширения принимаются зависящими от температуры нагрева, и последняя считается известной функцией координат точки (r, z) .

В основу дальнейших выкладок кладутся гипотеза Франца Неймана и гипотеза недеформируемых нормалей.

На основании гипотезы недеформируемых нормалей, пренебрегая напряжениями σ_z по сравнению с напряжениями σ_r и σ_θ [1], можно принять

$$\begin{aligned} e_z = e_{rz} = e_{\theta z} = 0, \\ \sigma_z = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$



Фиг. 1.

Из известных соотношений между компонентами перемещения и компонентами деформации в цилиндрической системе координат [4], с учетом (1.1) и осесимметричности задачи, получаются следующие значения компонентов деформации

$$\left. \begin{aligned} e_r &= \frac{du}{dr} - z \frac{d^2 w}{dr^2}, \quad e_\theta = \frac{u}{r} - \frac{z}{r} \frac{dw}{dr}, \quad e_z = 0, \\ e_{r\theta} &= e_{rz} = e_{\theta z} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

и компонентов перемещения

$$u_r = u - z \frac{dw}{dr}, \quad u_\theta = 0, \quad u_z = w, \quad (1.3)$$

где u и w означают соответственно радиальное перемещение и прогиб точек, расположенных на координатной плоскости $z = 0$.

Из обобщенного закона Гука [1], записанного для m -го слоя пластинки [2],

$$\begin{aligned} e_r^{(m)} &= a_{11}^{(m)} \sigma_r^{(m)} + a_{12}^{(m)} \sigma_\theta^{(m)} + a_{13}^{(m)} \sigma_z^{(m)} + \beta_r^{(m)} T, \\ e_\theta^{(m)} &= a_{12}^{(m)} \sigma_r^{(m)} + a_{22}^{(m)} \sigma_\theta^{(m)} + a_{23}^{(m)} \sigma_z^{(m)} + \beta_\theta^{(m)} T, \\ e_z^{(m)} &= a_{13}^{(m)} \sigma_r^{(m)} + a_{23}^{(m)} \sigma_\theta^{(m)} + a_{33}^{(m)} \sigma_z^{(m)} + \beta_z^{(m)} T, \\ e_{r\theta}^{(m)} &= a_{44}^{(m)} \tau_{r\theta}^{(m)}, \quad e_{rz}^{(m)} = a_{55}^{(m)} \tau_{rz}^{(m)}, \quad e_{\theta z}^{(m)} = a_{66}^{(m)} \tau_{\theta z}^{(m)}, \end{aligned}$$

[где $\beta_r^{(m)}(T)$, $\beta_\theta^{(m)}(T)$, $\beta_z^{(m)}(T)$ — коэффициенты температурного расширения соответственно вдоль осей r , θ и z , а $T(r, z)$ — температура в данной точке пластинки], учитывая (1.3), можно получить

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(m)} &= B_{11}^{(m)} \left(\frac{du}{dz} - z \frac{d^2 w}{dr^2} \right) + B_{12}^{(m)} \left(\frac{u}{r} - \frac{z}{r} \frac{dw}{dr} \right) + Q_1^{(m)} T, \\ \sigma_\theta^{(m)} &= B_{22}^{(m)} \left(\frac{u}{r} - \frac{z}{r} \frac{dw}{dr} \right) + B_{12}^{(m)} \left(\frac{du}{dr} - z \frac{d^2 w}{dr^2} \right) + Q_2^{(m)} T, \\ \tau_{r\theta}^{(m)} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} B_{11}^{(m)}(T) &= \frac{a_{22}^{(m)}}{a_{11}^{(m)} a_{22}^{(m)} - [a_{12}^{(m)}]^2} = \frac{E_r^{(m)}}{1 - \mu_1^{(m)} \mu_2^{(m)}}, \\ B_{22}^{(m)}(T) &= \frac{a_{11}^{(m)}}{a_{11}^{(m)} a_{22}^{(m)} - [a_{12}^{(m)}]^2} = \frac{E_\theta^{(m)}}{1 - \mu_1^{(m)} \mu_2^{(m)}}, \\ B_{12}^{(m)}(T) &= -\frac{a_{12}^{(m)}}{a_{11}^{(m)} a_{22}^{(m)} - [a_{12}^{(m)}]^2} = -\frac{E_r^{(m)} \mu_2^{(m)}}{1 - \mu_1^{(m)} \mu_2^{(m)}} = -\frac{E_\theta^{(m)} \mu_1^{(m)}}{1 - \mu_1^{(m)} \mu_2^{(m)}}, \\ Q_1^{(m)}(T) &= \frac{a_{12}^{(m)} \beta_\theta^{(m)} - a_{22}^{(m)} \beta_r^{(m)}}{a_{11}^{(m)} a_{22}^{(m)} - [a_{12}^{(m)}]^2} = -B_{12}^{(m)} \beta_\theta^{(m)} - B_{11}^{(m)} \beta_r^{(m)} = \\ &= -\frac{E_r^{(m)}}{1 - \mu_1^{(m)} \mu_2^{(m)}} [\mu_1^{(m)} \beta_r^{(m)} + \mu_2^{(m)} \beta_\theta^{(m)}], \\ Q_2^{(m)}(T) &= \frac{-a_{11}^{(m)} \beta_\theta^{(m)} + a_{12}^{(m)} \beta_r^{(m)}}{a_{11}^{(m)} a_{22}^{(m)} - [a_{12}^{(m)}]^2} = -B_{22}^{(m)} \beta_\theta^{(m)} - B_{12}^{(m)} \beta_r^{(m)} = \\ &= -\frac{E_\theta^{(m)}}{1 - \mu_1^{(m)} \mu_2^{(m)}} [\mu_1^{(m)} \beta_r^{(m)} + \mu_2^{(m)} \beta_\theta^{(m)}]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Перейдя от напряжений к внутренним усилиям и моментам

$$\left. \begin{aligned} T_r &= \sum_{m=1}^n \int_{h_{m-1}}^{h_m} \sigma_r^{(m)} dz = C_{11} \frac{du}{dr} + C_{12} \frac{u}{r} - K_{11} \frac{d^2 w}{dr^2} - K_{12} \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + C_{1T}, \\ T_\theta &= \sum_{m=1}^n \int_{h_{m-1}}^{h_m} \sigma_\theta^{(m)} dz = C_{12} \frac{du}{dr} + C_{22} \frac{u}{r} - K_{12} \frac{d^2 w}{dr^2} - K_{22} \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + C_{2T}, \\ S_{rz} &= 0, \\ M_r &= \sum_{m=1}^n \int_{h_{m-1}}^{h_m} \sigma_r^{(m)} z dz = K_{11} \frac{du}{dr} + K_{12} \frac{u}{r} - D_{11} \frac{d^2 w}{dr^2} - D_{12} \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + K_{1T}, \\ M_\theta &= \sum_{m=1}^n \int_{h_{m-1}}^{h_m} \sigma_\theta^{(m)} z dz = K_{12} \frac{du}{dr} + K_{22} \frac{u}{r} - D_{12} \frac{d^2 w}{dr^2} - D_{22} \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + K_{2T}, \\ M_{rz} &= 0, \end{aligned} \right\} (1.6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} C_{ij} &= \sum_{m=1}^n \int_{h_{m-1}}^{h_m} B_{ij}^{(m)} dz, \quad K_{ij} = \sum_{m=1}^n \int_{h_{m-1}}^{h_m} B_{ij}^{(m)} z dz, \quad D_{ij} = \sum_{m=1}^n \int_{h_{m-1}}^{h_m} B_{ij}^{(m)} z^2 dz, \\ C_{iT} &= \sum_{m=1}^n \int_{h_{m-1}}^{h_m} Q_i^{(m)} T dz, \quad K_{iT} = \sum_{m=1}^n \int_{h_{m-1}}^{h_m} Q_i^{(m)} T z dz \end{aligned} \right\} (1.7)$$

(n — число слоев в пакете) и внося (1.6) в уравнения равновесия [5], [6]

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT_r}{dr} + \frac{T_r - T_\theta}{r} &= 0, \\ rN_r &= C_\theta^*, \\ \frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} &= N_r, \end{aligned} \right\} (1.8)$$

в самом общем случае задачу можно свести к интегрированию следующей системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами:

* Легко заметить, что постоянная C_θ может быть отлична от нуля только в случае пластинки с отверстием посередине (в случае пластинки с двухсвязным контуром), у которой и по внешнему контуру и по внутреннему контуру граничные условия не содержат требования о равенстве нулю поперечной силы.

$$\left. \begin{aligned}
 & C_{11} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left(\frac{dC_{11}}{dr} + \frac{C_{11}}{r} \right) \frac{du}{dr} + \left(\frac{dC_{12}}{dr} - \frac{C_{22}}{r} \right) \frac{u}{r} - \\
 & - K_{11} \frac{d^3 w}{dr^3} - \left(\frac{dK_{11}}{dr} + \frac{K_{11}}{r} \right) \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \left(\frac{dK_{12}}{dr} - \frac{K_{22}}{r} \right) \frac{dw}{dr} = \\
 & = \frac{C_{2T} - C_{1T}}{r} - \frac{dC_{1T}}{dr}, \\
 & K_{11} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left(\frac{dK_{11}}{dr} + \frac{K_{11}}{r} \right) \frac{du}{dr} + \left(\frac{dK_{12}}{dr} - \frac{K_{22}}{r} \right) \frac{u}{r} - \\
 & - D_{11} \frac{d^3 w}{dr^3} - \left(\frac{dD_{11}}{dr} + \frac{D_{11}}{r} \right) \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \left(\frac{dD_{12}}{dr} - \frac{D_{22}}{r} \right) \frac{dw}{dr} = \\
 & = N_r + \frac{K_{2T} - K_{1T}}{r} - \frac{dK_{1T}}{dr}.
 \end{aligned} \right\} (1.9)$$

§ 2. Случай, когда температура вдоль радиуса постоянна, а по толщине пакета изменяется по произвольному закону

В рассматриваемом случае $B_{ij}^{(m)}$, $Q_i^{(m)}$ и T являются функциями только координаты z , следовательно C_{ij} , K_{ij} , D_{ij} , C_{iT} и K_{iT} суть постоянные. Это обстоятельство позволит упростить систему (1.9) и привести ее к виду

$$\left. \begin{aligned}
 & \left(C_{11} r^2 \frac{d^2}{dr^2} + C_{11} r \frac{d}{dr} - C_{22} \right) u - \left(K_{11} r^2 \frac{d^3}{dr^3} + K_{11} r \frac{d^2}{dr^2} - K_{22} \frac{d}{dr} \right) w = \\
 & = r (C_{2T} - C_{1T}), \\
 & \left(K_{11} r^2 \frac{d^2}{dr^2} + K_{11} r \frac{d}{dr} - K_{22} \right) u - \left(D_{11} r^2 \frac{d^3}{dr^3} + D_{11} r \frac{d^2}{dr^2} - D_{22} \frac{d}{dr} \right) w = \\
 & = r C_6 + r (K_{2T} - K_{1T}).
 \end{aligned} \right\} (2.1)$$

Нетрудно заметить, что при выполнении условий

$$K_{11} = K_{22} = 0 \text{ или } \frac{C_{22}}{C_{11}} = \frac{K_{22}}{K_{11}} = \frac{D_{22}}{D_{11}} = \nu \text{ или } K_{11}^2 - C_{11} D_{11} = 0$$

происходит разделение переменных и однородная система, соответствующая системе (2.1), приводится к двум уравнениям типа

$$\left. \begin{aligned}
 & \left(r^2 \frac{d^2}{dr^2} + r \frac{d}{dr} - q \right) u = 0, \\
 & \left(r^2 \frac{d^3}{dr^3} + r \frac{d^2}{dr^2} - q \frac{d}{dr} \right) w = 0.
 \end{aligned} \right\} (2.2)$$

Для конкретности в дальнейшем предполагается, что

$$K_{11}^2 - C_{11} D_{11} \neq 0.$$

Ниже приводится общий интеграл однородной системы, соответствующей системе (2.1),

$$u = \frac{K_{11}m_1 - K_{22}}{C_{11}m_1 - C_{22}} \left(C_1 r^{1+\sqrt{m_1}} + C_2 r^{-1+\sqrt{m_1}} \right) + \frac{K_{11}m_2 - K_{22}}{C_{11}m_2 - C_{22}} \left(C_3 r^{1+\sqrt{m_2}} + C_4 r^{-1+\sqrt{m_2}} \right) \quad (2.3)$$

$$w^0 = \frac{C_1}{1+\sqrt{m_1}} r^{1+\sqrt{m_1}} + \frac{C_2}{1-\sqrt{m_1}} r^{1-\sqrt{m_1}} + \frac{C_3}{1+\sqrt{m_2}} r^{1+\sqrt{m_2}} + \frac{C_4}{1-\sqrt{m_2}} r^{1-\sqrt{m_2}} + C_5, \quad (2.4)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 и C_5 — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий задачи, а m_1 и m_2 — корни характеристического уравнения

$$(C_{11}D_{11} - K_{11}^2)m^2 - (C_{22}D_{11} + C_{11}D_{22} - 2K_{11}K_{22})m + C_{22}D_{22} - K_{22}^2 = 0, \quad (2.5)$$

равные

$$m_{1,2} = \frac{C_{22}D_{11} + C_{11}D_{22} - 2K_{11}K_{22}}{2(C_{11}D_{11} - K_{11}^2)} \pm \frac{\sqrt{(C_{22}D_{11} - C_{11}D_{22})^2 + 4(C_{11}K_{22} - C_{22}K_{11})(K_{22}D_{11} - K_{11}D_{22})}}{2(C_{11}D_{11} - K_{11}^2)}. \quad (2.6)$$

В частных случаях (2.6), (2.3) и (2.4) примут вид

$$\begin{aligned} \text{а) при } \frac{C_{22}}{C_{11}} = \frac{K_{22}}{K_{11}} \neq \frac{D_{22}}{D_{11}} \\ m_1 = \frac{C_{11}D_{22} - C_{22}K_{11}^2}{C_{11}(C_{11}D_{11} - K_{11}^2)}, \quad m_2 = \frac{C_{22}}{C_{11}} = \frac{K_{22}}{K_{11}} = \gamma, \\ u^0 = \frac{K_{11}}{C_{11}} C_1 r^{1+\sqrt{m_1}} + \frac{K_{11}}{C_{11}} C_2 r^{-1+\sqrt{m_1}} + C_3 r^{1+\sqrt{\gamma}} + C_4 r^{-1+\sqrt{\gamma}}, \\ w^0 = \frac{C_1}{1+\sqrt{m_1}} r^{1+\sqrt{m_1}} + \frac{C_2}{1-\sqrt{m_1}} r^{1-\sqrt{m_1}} + C_5; \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \text{б) при } \frac{C_{22}}{C_{11}} \neq \frac{K_{22}}{K_{11}} = \frac{D_{22}}{D_{11}} \\ m_1 = \frac{K_{22}}{K_{11}} = \frac{D_{22}}{D_{11}} = \gamma, \quad m_2 = \frac{C_{22}D_{11}^2 - D_{22}K_{11}^2}{D_{11}(C_{11}D_{11} - K_{11}^2)}, \\ u^0 = \frac{D_{11}}{K_{11}} C_3 r^{1+\sqrt{m_2}} + \frac{D_{11}}{K_{11}} C_4 r^{-1+\sqrt{m_2}}, \\ w^0 = \frac{C_1}{1+\sqrt{\gamma}} r^{1+\sqrt{\gamma}} + \frac{C_2}{1-\sqrt{\gamma}} r^{1-\sqrt{\gamma}} + \frac{C_3}{1+\sqrt{m_2}} r^{1+\sqrt{m_2}} + \frac{C_4}{1-\sqrt{m_2}} r^{1-\sqrt{m_2}} + C_5; \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\text{в) при } \frac{K_{22}}{K_{11}} \neq \frac{D_{22}}{D_{11}} = \frac{C_{22}}{C_{11}}$$

$$m_1 = \frac{K_{22}\sqrt{C_{11}} + C_{22}\sqrt{D_{11}}}{K_{11}\sqrt{C_{11}} + C_{11}\sqrt{D_{11}}}, \quad m_2 = \frac{K_{22}\sqrt{C_{11}} - C_{22}\sqrt{D_{11}}}{K_{11}\sqrt{C_{11}} - C_{11}\sqrt{D_{11}}},$$

$$\left. \begin{aligned} u^0 &= \sqrt{\frac{D_{11}}{C_{11}}} (-C_1 r^{1+m_1} - C_2 r^{-1+m_1} + C_3 r^{1+m_2} + C_4 r^{-1+m_2}), \\ w^0 &= \frac{C_1}{1+\sqrt{m_1}} r^{1+\sqrt{m_1}} + \frac{C_2}{1-\sqrt{m_1}} r^{1-\sqrt{m_1}} + \frac{C_3}{1+\sqrt{m_2}} r^{1+\sqrt{m_2}} + \\ &\quad + \frac{C_4}{1-\sqrt{m_2}} r^{1-\sqrt{m_2}} + C_5; \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

$$\text{г) при } \frac{C_{22}}{C_{11}} = \frac{K_{22}}{K_{11}} = \frac{D_{22}}{D_{11}} = \gamma \neq 1$$

$$m_1 = m_2 = \gamma,$$

$$\left. \begin{aligned} u^0 &= C_1 r^{1+\gamma} + C_2 r^{-1+\gamma}, \\ w^0 &= \frac{C_3}{1+\sqrt{\gamma}} r^{1+\sqrt{\gamma}} + \frac{C_4}{1-\sqrt{\gamma}} r^{1-\sqrt{\gamma}} + C_5; \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

$$\text{д) при } \frac{C_{22}}{C_{11}} = \frac{K_{22}}{K_{11}} = \frac{D_{22}}{D_{11}} = 1$$

$$m_1 = m_2 = 1,$$

$$\left. \begin{aligned} u^0 &= C_1 r + C_2 r^{-1}, \\ w^0 &= C_3 r^2 + C_4 \ln r + C_5. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Частное решение неоднородной системы (2.1) можно представить в виде:

$$\text{а) при } (K_{11} - K_{22})^2 \neq (C_{11} - C_{22})(D_{11} - D_{22}) \quad (2.12)$$

$$\left. \begin{aligned} u^* &= \frac{(C_6 + K_{2T} - K_{1T})(K_{11} - K_{22}) - (C_{2T} - C_{1T})(D_{11} - D_{22})}{(K_{11} - K_{22})^2 - (C_{11} - C_{22})(D_{11} - D_{22})} r, \\ w^* &= \frac{(C_6 + K_{2T} - K_{1T})(C_{11} - C_{22}) - (C_{2T} - C_{1T})(K_{11} - K_{22})}{2[(K_{11} - K_{22})^2 - (C_{11} - C_{22})(D_{11} - D_{22})]} r^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

$$\text{б) при } (K_{11} - K_{22})^2 = (C_{11} - C_{22})(D_{11} - D_{22}) \quad (2.14)$$

$$\left. \begin{aligned} u^* &= \frac{(C_6 + K_{2T} - K_{1T})K_{11} - (C_{2T} - C_{1T})D_{11}}{2(K_{11}^2 - C_{11}D_{11})} r \ln r, \\ w^* &= \frac{(C_6 + K_{2T} - K_{1T})C_{11} - (C_{2T} - C_{1T})K_{11}}{4(K_{11}^2 - C_{11}D_{11})} \left(r^2 \ln r - \frac{r^2}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Таким образом, для радиального перемещения u и прогиба w точек, расположенных на координатной плоскости $z=0$, получаются значения

$$\left. \begin{aligned} u &= u^0 + u^*, \\ w &= w^0 + w^*, \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

в которые войдут шесть постоянных интегрирования.

Имея (2.16), из (1.3) можно определить $u_r(r, z)$, а по (1.6) — значения внутренних усилий и моментов.

Содержащиеся в найденных значениях u_r , w , T_r , T_z , M_r и M_θ постоянные интегрирования определяются из контурных условий конкретной задачи.

§ 3. Осесимметричная температурная задача однослойной ортотропной круглой пластинки, когда температура представлена суммой логарифмической функции радиуса и линейной функции z

Задача решается в цилиндрической системе координат r , θ и z . Ось z направляется по оси анизотропии, плоскость $z=0$ совмещена с срединной плоскостью недеформированной пластинки, а полярная ось, от которой отсчитывается угол θ , в плоскости $z=0$ расположена произвольно.

Закон распределения температуры внутри пластинки принимается в виде

$$T = \omega - \lambda z - \gamma \ln \frac{r}{\rho}. \quad (3.1)$$

Легко убедиться, что выбранная температурная функция (3.1) удовлетворяет уравнению теплопроводности [7].

Зависимость модулей Юнга от температуры принимается в виде

$$E_r = E_1 e^{-\alpha T}, \quad E_\theta = E_2 e^{-\alpha T}, \quad (\text{при } \alpha \geq 0) \quad (3.2)$$

а коэффициенты Пуассона и температурного расширения считаются не зависящими от температуры

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \text{const}, \quad \mu_2 = \text{const}, \\ \beta_r &= \beta_\theta = \beta = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Очевидно, что соответствующим подбором постоянных ω , λ , γ , ρ , E_1 , E_2 и α можно, с достаточной для практических целей точностью, описать как изменение температуры пластинки, так и изменение модулей упругости в зависимости от температуры.

В рассматриваемом случае решение задачи сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений (1.9), в которой значения коэффициентов определяются формулами

$$C_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} B_{11} dz = \frac{kE_1}{k-\mu_1^2} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1} A_1, \quad C_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} B_{12} dz = \frac{\mu_1 E_1}{k-\mu_1^2} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1} A_1,$$

$$C_{22} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} B_{22} dz = \frac{E_1}{k-\mu_1^2} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1} A_1,$$

$$K_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} B_{11} z dz = \frac{kE_1}{k-\mu_1^2} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1} A_2, \quad K_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} B_{12} z dz = \frac{\mu_1 E_1}{k-\mu_1^2} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1} A_2,$$

$$K_{22} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} B_{22} z dz = \frac{E_1}{k-\mu_1^2} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1} A_2,$$

$$D_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} B_{11} z^2 dz = \frac{kE_1}{k-\mu_1^2} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1} A_3, \quad D_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} B_{12} z^2 dz = \frac{\mu_1 E_1}{k-\mu_1^2} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1} A_3,$$

$$D_{22} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} B_{22} z^2 dz = \frac{E_1}{k-\mu_1^2} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1} A_3,$$

$$C_{1r} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_1 T dz = E_1 \beta \frac{k+\mu_1}{k-\mu_1^2} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1} \left(\gamma A_1 \ln \frac{r}{\rho} - A_4 \right),$$

$$C_{2r} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_2 T dz = E_1 \beta \frac{1+\mu_1}{k-\mu_1^2} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1} \left(\gamma A_1 \ln \frac{r}{\rho} - A_4 \right),$$

$$K_{1r} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_1 T z dz = E_1 \beta \frac{k+\mu_1}{k-\mu_1^2} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1} \left(\gamma A_2 \ln \frac{r}{\rho} - A_5 \right),$$

$$K_{2r} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_2 T z dz = E_1 \beta \frac{1+\mu_1}{k-\mu_1^2} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha_1} \left(\gamma A_2 \ln \frac{r}{\rho} - A_5 \right),$$

$$\begin{aligned}
 \text{где } A_1 &= \frac{2}{\alpha \lambda} e^{-\alpha \omega} \operatorname{sh} \frac{\alpha \lambda h}{2}, \quad A_2 = \frac{1}{\alpha^2 \lambda^2} e^{-\alpha \omega} \left(\alpha \lambda h \operatorname{ch} \frac{\alpha \lambda h}{2} - 2 \operatorname{sh} \frac{\alpha \lambda h}{2} \right), \\
 A_3 &= \frac{1}{2 \alpha^2 \lambda^2} e^{-\alpha \omega} \left[(\alpha^2 \lambda^2 h^2 + 8) \operatorname{sh} \frac{\alpha \lambda h}{2} - 4 \alpha \lambda h \operatorname{ch} \frac{\alpha \lambda h}{2} \right], \\
 A_4 &= \frac{1}{\alpha^2 \lambda} e^{-\alpha \omega} \left[2 (\omega \alpha + 1) \operatorname{sh} \frac{\alpha \lambda h}{2} - \alpha \lambda h \operatorname{ch} \frac{\alpha \lambda h}{2} \right], \\
 A_5 &= \frac{1}{2 \alpha^2 \lambda^2} e^{-\alpha \omega} \left\{ 2 \alpha \lambda h (\omega \alpha + 2) \operatorname{ch} \frac{\alpha \lambda h}{2} - [4 (\omega \alpha + 2) + \alpha^2 \lambda^2 h^2] \operatorname{sh} \frac{\alpha \lambda h}{2} \right\}, \\
 k &= \frac{E_r}{E_\theta} = \frac{E_1}{E_2}.
 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Внеся (3.4) в (1.9), после несложных преобразований получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 & A_1 r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + A_1 (\alpha \gamma + 1) r \frac{du}{dr} + \frac{A_1}{k} (\mu_1 \alpha \gamma - 1) u - \\
 & - A_2 r^2 \frac{d^2 w}{dr^2} - A_2 (\alpha \gamma + 1) r \frac{dw}{dr} - \frac{A_2}{k} (\mu_1 \alpha \gamma - 1) \frac{dw}{dr} = \\
 & = \frac{A_1 \alpha \gamma}{k} [1 - k - \alpha \gamma (k + \mu_1)] r \ln \frac{r}{\rho} - \\
 & - \frac{\beta}{k} \{ A_4 [1 - k - \alpha \gamma (k + \mu_1)] + A_{11} \gamma (k + \mu_1) \} r, \\
 & A_2 r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + A_2 (\alpha \gamma + 1) r \frac{du}{dr} + \frac{A_2}{k} (\mu_1 \alpha \gamma - 1) u - \\
 & - A_3 r^2 \frac{d^2 w}{dr^2} - A_3 (\alpha \gamma + 1) r \frac{dw}{dr} - \frac{A_3}{k} (\mu_1 \alpha \gamma - 1) \frac{dw}{dr} = \\
 & = \frac{k - \mu_1^2}{k E_1} \rho^2 \gamma C_0 r^{1-\alpha \gamma} + \frac{A_2 \alpha \gamma}{k} [1 - k - \alpha \gamma (k + \mu_1)] r \ln \frac{r}{\rho} - \\
 & - \frac{\beta}{k} \{ A_5 [1 - k - \alpha \gamma (k + \mu_1)] + A_{21} \gamma (k + \mu_1) \} r.
 \end{aligned} \quad (3.6)$$

В однородной системе, соответствующей системе (3.6), можно разделить переменные, в результате чего, при выполнении условия $A_2^2 - A_1 A_3 \neq 0$, она приводится к двум однородным уравнениям

$$\begin{aligned}
 r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + (\alpha \gamma + 1) r \frac{du}{dr} + \frac{\mu_1 \alpha \gamma - 1}{k} u &= 0, \\
 r^2 \frac{d^2 w}{dr^2} + (\alpha \gamma + 1) r \frac{dw}{dr} + \frac{\mu_1 \alpha \gamma - 1}{k} \frac{dw}{dr} &= 0,
 \end{aligned}$$

решениями которых являются

$$u^0 = C_1 r^{n_1} + C_2 r^{n_2},$$

$$w^0 = \frac{C_3}{1+n_1} r^{1+n_1} + \frac{C_4}{1+n_2} r^{1+n_2} + C_5, \quad (3.7)$$

где

$$n_{1,2} = -\frac{\alpha_1 \gamma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_1^2 \gamma^2 + 4(1 - \mu_1 \alpha_1 \gamma)}{k}}$$

представляют корни характеристического уравнения

$$n^2 + \alpha_1 \gamma n + \frac{\mu_1 \alpha_1 \gamma - 1}{k} = 0.$$

Частное решение (3.6) можно представить в виде

$$u^* = \beta \left[\omega + \gamma \frac{k(1 + \alpha_1 \gamma) - \mu_1}{k - 1 + \alpha_1 \gamma (k + \mu_1)} \right] r - \beta \gamma r \ln \frac{r}{\rho} +$$

$$+ \frac{\alpha_1 \lambda h \operatorname{ch} \frac{\alpha_1 \lambda h}{2} - 2 \operatorname{sh} \frac{\alpha_1 \lambda h}{2}}{\alpha_1^2 \lambda^2 h^2 - 4 \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha_1 \lambda h}{2}} \cdot \frac{\alpha_1^2 \lambda^2 (k - \mu_1^2) \rho^{\alpha_1 \gamma} e^{\alpha_1 \omega}}{E_1 [k - 1 - \alpha_1 \gamma (k - \mu_1)]} C_6 r^{1 - \alpha_1 \gamma},$$

$$w^* = \frac{\beta \lambda}{2} r^2 + \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha_1 \lambda h}{2}}{\alpha_1^2 \lambda^2 h^2 - 4 \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha_1 \lambda h}{2}} \cdot \frac{2 \alpha_1^3 \lambda^3 (k - \mu_1^2) \rho^{\alpha_1 \gamma} e^{\alpha_1 \omega}}{E_1 [k - 1 - \alpha_1 \gamma (k - \mu_1)] (2 - \alpha_1 \gamma)} \times \quad (3.8)$$

$$\times C_6 r^{2 - \alpha_1 \gamma} \quad (\text{если } \alpha_1 \gamma \neq 2)$$

$$w^* = \frac{\beta \lambda}{2} r^2 + \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha_1 \lambda h}{2}}{\alpha_1^2 \lambda^2 h^2 - 4 \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha_1 \lambda h}{2}} \cdot \frac{2 \alpha_1^3 \lambda^3 (k - \mu_1^2) \rho^{\alpha_1 \gamma} e^{\alpha_1 \omega}}{E_1 [k - 1 - \alpha_1 \gamma (k - \mu_1)]} \times$$

$$\times C_6 \ln r. \quad (\text{если } \alpha_1 \gamma = 2)$$

Таким образом, для радиального перемещения u и прогиба w точек, расположенных на координатной плоскости $z = 0$, получают значения

$$\left. \begin{aligned} u &= u^0 + u^*, \\ w &= w^0 + w^*, \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

в которые войдут шесть постоянных интегрирования.

Имея (3.9), по (1.3) можно определить $u_r(r, z)$, а по (1.6) — значения внутренних усилий и моментов.

Содержащиеся в значениях u_r , w , T_r , T_θ , M_r и M_θ постоянные интегрирования определяются из контурных условий конкретной задачи.

§ 4. Примеры расчета

Пример № 1. Рассматривается однослойная ортотропная круглая пластинка радиуса R , находящаяся под воздействием температуры, линейно изменяющейся по толщине h , с перепадом от $T_1 = T\left(r, -\frac{h}{2}\right)$ до $T_2 = T\left(r, \frac{h}{2}\right)$.

Условия на контуре пластинки задаются в виде

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } r = R, z = 0 \\ \text{при } r = R \end{array} \right\} \begin{array}{l} u = w = 0, \\ M_r = 0. \end{array} \quad (4.1)$$

В силу осесимметричности задачи должны быть выполнены также условия

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } r = 0, z = 0 \\ \text{при } r = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} u = \frac{dw}{dr} = 0, \\ \end{array} \quad (4.2)$$

Учитывая, что в рассматриваемой задаче температурное поле стационарно, с целью упрощения дальнейших выкладок, координатная плоскость $z = 0$ предполагается совмещенной с срединной плоскостью недеформированной пластинки.

Как и в [8], принимается линейный закон изменения модулей упругости от температуры:

$$E_r = E_1(1 - \alpha T), \quad E_\theta = E_2(1 - \alpha T), \quad (\text{при } \alpha \geq 0) \quad (4.3)$$

коэффициенты Пуассона и температурного расширения считаются не зависящими от температуры:

$$\mu_1 = \text{const}, \quad \mu_2 = \text{const}, \quad \beta_r = \beta_\theta = \beta = \text{const}.$$

При принятом расположении координатных осей

$$\left. \begin{array}{l} T = \omega - \lambda z, \\ \omega = \frac{T_1 + T_2}{2}, \quad \lambda = \frac{T_1 - T_2}{h} \end{array} \right\} \quad (4.4)$$

Из (1.7) с учетом (1.5), (4.3) и (4.4) определяются

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{kC_{12}}{\mu_1} = kC_{22} = \frac{kE_1}{k - \mu_1^2} (1 - \alpha\omega) h, \quad K_{11} = \frac{kK_{12}}{\mu_1} = kK_{22} = \frac{kE_1}{k - \mu_1^2} \alpha \lambda \frac{h^3}{12}, \\ D_{11} &= \frac{kD_{12}}{\mu_1} = kD_{22} = \frac{kE_1}{k - \mu_1^2} (1 - \alpha\omega) \frac{h^3}{12}, \\ C_{1T} &= \frac{E_1 \beta (k + \mu_1)}{k - \mu_1^2} \left[\alpha \lambda^2 \frac{h^3}{12} - (1 - \alpha\omega) \omega h \right], \\ C_{2T} &= \frac{E_1 \beta (1 + \mu_1)}{k - \mu_1^2} \left[\alpha \lambda^2 \frac{h^3}{12} - (1 - \alpha\omega) \omega h \right], \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$K_{1r} = \frac{E_1 \beta (k + \mu_1)}{k - \mu_1^2} (1 - 2\alpha\omega) \lambda \frac{h^3}{12},$$

$$K_{2r} = \frac{E_1 \beta (1 + \mu_1)}{k - \mu_1^2} (1 - 2\alpha\omega) \lambda \frac{h^3}{12},$$

где принято обозначение $\frac{E_r}{E_0} = \frac{E_1}{E_2} = k$.

В случае $k \neq 1$ из (2.16) с учетом (2.10), (2.13) и (4.5) получаем

$$\left. \begin{aligned} u &= C_1 r^{\frac{1}{\sqrt{k}}} + C_2 r^{-\frac{1}{\sqrt{k}}} - \frac{k}{K_{11} - C_{11} D_{11}} \left(\frac{K_{11} K_{1r} - D_{11} C_{1r}}{k - \mu_1} + \frac{K_{11} C_0}{1 - k} \right) r, \\ w &= C_3 \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k} + 1} r^{1 + \frac{1}{\sqrt{k}}} + C_4 \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k} - 1} r^{1 - \frac{1}{\sqrt{k}}} - \\ &\quad - \frac{k}{2(K_{11}^2 - C_{11} D_{11})} \left(\frac{C_{11} K_{1r} - K_{11} C_{1r}}{k + \mu_1} + \frac{C_{11} C_0}{1 - k} \right) r^2 + C_5. \end{aligned} \right\} (4.6)$$

Внеся (4.6) в (1.6) и (1.3), определим значения усилий и моментов

$$\left. \begin{aligned} T_r &= \frac{\mu_1 + \sqrt{k}}{k} (C_1 C_{11} - C_3 K_{11}) r^{\frac{1}{\sqrt{k}} - 1} + \frac{\mu_1 - \sqrt{k}}{k} (C_2 C_{11} - C_4 K_{11}) r^{-\frac{1}{\sqrt{k}} - 1}, \\ T_0 &= \frac{\mu_1 + \sqrt{k}}{k \sqrt{k}} (C_1 C_{11} - C_3 K_{11}) r^{\frac{1}{\sqrt{k}} - 1} - \frac{\mu_1 - \sqrt{k}}{k \sqrt{k}} (C_2 C_{11} - C_4 K_{11}) r^{-\frac{1}{\sqrt{k}} - 1}, \\ M_r &= \frac{\mu_1 + \sqrt{k}}{k} (C_1 K_{11} - C_3 D_{11}) r^{\frac{1}{\sqrt{k}} - 1} + \\ &\quad + \frac{\mu_1 - \sqrt{k}}{k} (C_2 K_{11} - C_4 D_{11}) r^{-\frac{1}{\sqrt{k}} - 1} + \frac{k + \mu_1}{k - 1} C_0, \\ M_0 &= \frac{\mu_1 + \sqrt{k}}{k \sqrt{k}} (C_1 K_{11} - C_3 D_{11}) r^{\frac{1}{\sqrt{k}} - 1} - \\ &\quad - \frac{\mu_1 - \sqrt{k}}{k \sqrt{k}} (C_2 K_{11} - C_4 D_{11}) r^{-\frac{1}{\sqrt{k}} - 1} + \frac{1 + \mu_1}{k - 1} C_0, \end{aligned} \right\} (4.7)$$

а также значение радиального перемещения

$$\left. \begin{aligned} u_r &= u - \left[C_3 r^{\frac{1}{\sqrt{k}}} + C_4 r^{-\frac{1}{\sqrt{k}}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{k}{K_{11}^2 - C_{11} D_{11}} \left(\frac{C_{11} K_{1r} - K_{11} C_{1r}}{k + \mu_1} + \frac{C_{11} C_0}{1 - k} \right) r \right] z. \end{aligned} \right\} (4.8)$$

Из условий (4.2), а также принимая во внимание односвязность контура пластинки (см. сноску к формулам 1.8), следует, что

$$C_2 = C_4 = C_6 = 0. \quad (4.9)$$

Из (4.6)–(4.8), учитывая (4.1) и (4.9), получим значения остальных постоянных интегрирования

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{k}{k+\mu_1} \cdot \frac{K_{11}K_{1r} - D_{11}C_{1r}}{K_{11}^2 - C_{11}D_{11}} R^{1-\frac{1}{\sqrt{k}}}, \\ C_3 &= \frac{k}{k+\mu_1} \cdot \frac{K_{11}}{D_{11}} \cdot \frac{K_{11}K_{1r} - D_{11}C_{1r}}{K_{11}^2 - C_{11}D_{11}} R^{1-\frac{1}{\sqrt{k}}}, \\ C_5 &= \frac{k}{k+\mu_1} \cdot \frac{R^2}{K_{11}^2 - C_{11}D_{11}} \left[\frac{1}{2} (C_{11}K_{1r} - K_{11}C_{1r}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{k}{k+\sqrt{k}} \cdot \frac{K_{11}}{D_{11}} (K_{11}K_{1r} - D_{11}C_{1r}) \right]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{k}{(k+\mu_1)(K_{11}^2 - C_{11}D_{11})} \left\{ (K_{11}K_{1r} - D_{11}C_{1r}) (R^{1-\frac{1}{\sqrt{k}}} r^{\frac{1}{\sqrt{k}}} - r) - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{K_{11}}{D_{11}} (K_{11}K_{1r} - D_{11}C_{1r}) R^{1-\frac{1}{\sqrt{k}}} r^{\frac{1}{\sqrt{k}}} - (C_{11}K_{1r} - K_{11}C_{1r}) r \right] z \right\}, \\ w &= \frac{k}{(k+\mu_1)(K_{11}^2 - C_{11}D_{11})} \left[\frac{k}{k+\sqrt{k}} \cdot \frac{K_{11}}{D_{11}} (K_{11}K_{1r} - \right. \\ &\quad \left. - D_{11}C_{1r}) (R^{1-\frac{1}{\sqrt{k}}} r^{\frac{1}{\sqrt{k}}} - R^2) + \frac{1}{2} (C_{11}K_{1r} - K_{11}C_{1r}) (R^2 - r^2) \right], \\ \frac{dw}{dr} &= \frac{k}{(k+\mu_1)(K_{11}^2 - C_{11}D_{11})} \left[\frac{K_{11}}{D_{11}} (K_{11}K_{1r} - D_{11}C_{1r}) R^{1-\frac{1}{\sqrt{k}}} r^{\frac{1}{\sqrt{k}}} - \right. \\ &\quad \left. - (C_{11}K_{1r} - K_{11}C_{1r}) r \right], \\ T_r &= -\frac{\mu_1 + \sqrt{k}}{\mu_1 + k} \cdot \frac{K_{11}K_{1r} - D_{11}C_{1r}}{D_{11}} R^{1-\frac{1}{\sqrt{k}}} r^{\frac{1}{\sqrt{k}}-1}, \\ T_\theta &= -\frac{\mu_1 + \sqrt{k}}{\sqrt{k}(\mu_1 + k)} \cdot \frac{K_{11}K_{1r} - D_{11}C_{1r}}{D_{11}} R^{1-\frac{1}{\sqrt{k}}} r^{\frac{1}{\sqrt{k}}-1}, \\ M_r &= 0, \quad M_\theta = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Пример № 2. В качестве второго примера решается температурная задача однослойной ортотропной круглой пластинки, отличающаяся от рассмотренной в примере № 1 только условиями на контуре пластинки, которые заданы в виде

$$\text{при } r=R, z=0, \quad u=w=\frac{dw}{dr}=0. \quad (4.11)$$

Из (4.6)–(4.8), учитывая (4.2) и (4.11), получим значения постоянных интегрирования

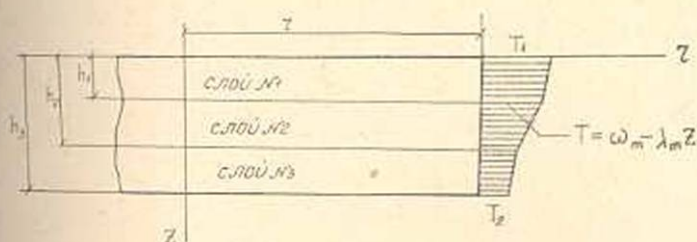
$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{k}{k+\mu_1} \cdot \frac{K_{11}K_{1r} - D_{11}C_{1r}}{K_{11}^2 - C_{11}D_{11}} R^{1-\frac{1}{\sqrt{k}}}, \quad C_2 = 0, \\ C_3 &= \frac{k}{k+\mu_1} \cdot \frac{C_{11}K_{1r} - K_{11}C_{1r}}{K_{11}^2 - C_{11}D_{11}} R^{1-\frac{1}{\sqrt{k}}}, \quad C_4 = 0, \\ C_5 &= \frac{k(1-\sqrt{k})}{2(k+\mu_1)(1+\sqrt{k})} \cdot \frac{C_{11}K_{1r} - K_{11}C_{1r}}{K_{11}^2 - C_{11}D_{11}} R^2, \quad C_6 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{k}{(k+\mu_1)(K_{11}^2 - C_{11}D_{11})} \left(R^{1-\frac{1}{\sqrt{k}}} r^{\frac{1}{\sqrt{k}}} - r \right) [K_{11}K_{1r} - D_{11}C_{1r} - \\ &\quad - z(C_{11}K_{1r} - K_{11}C_{1r})], \\ w &= \frac{k}{k+\mu_1} \cdot \frac{C_{11}K_{1r} - K_{11}C_{1r}}{K_{11}^2 - C_{11}D_{11}} \left[\frac{1-\sqrt{k}}{2(1+\sqrt{k})} R^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}} R^{1-\frac{1}{\sqrt{k}}} r^{\frac{1}{\sqrt{k}}} - \frac{1}{2} r^2 \right], \\ \frac{dw}{dr} &= \frac{k}{k+\mu_1} \cdot \frac{C_{11}K_{1r} - K_{11}C_{1r}}{K_{11}^2 - C_{11}D_{11}} \left(R^{1-\frac{1}{\sqrt{k}}} r^{\frac{1}{\sqrt{k}}-1} - r \right), \\ T_r &= \frac{\mu_1 + \sqrt{k}}{\mu_1 + k} C_{1r} R^{1-\frac{1}{\sqrt{k}}} r^{\frac{1}{\sqrt{k}}-1}, \\ T_\theta &= \frac{\mu_1 + \sqrt{k}}{\sqrt{k}(\mu_1 + k)} C_{1r} R^{1-\frac{1}{\sqrt{k}}} r^{\frac{1}{\sqrt{k}}-1}, \\ M_r &= \frac{\mu_1 + \sqrt{k}}{\mu_1 + k} K_{1r} R^{1-\frac{1}{\sqrt{k}}} r^{\frac{1}{\sqrt{k}}-1}, \\ M_\theta &= \frac{\mu_1 + \sqrt{k}}{\sqrt{k}(\mu_1 + k)} K_{1r} R^{1-\frac{1}{\sqrt{k}}} r^{\frac{1}{\sqrt{k}}-1}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Пример № 3. В качестве третьего примера рассматривается трехслойная ортотропная круглая пластинка радиуса R , находящаяся под воздействием температуры, линейно изменяющейся по толщине каждого слоя.

Координатная плоскость $z = 0$ совмещена с верхним основанием недеформированного пакета (фиг. 2).



Фиг. 2.

При принятом расположении осей изменение температуры по толщине можно выразить формулами

$$\left. \begin{aligned} T &= \omega_1 - \lambda_1 z & \text{при} & \quad 0 \leq z \leq h_1, \\ T &= \omega_2 - \lambda_2 z & \text{при} & \quad h_1 \leq z \leq h_1 + h_2, \\ T &= \omega_3 - \lambda_3 z & \text{при} & \quad h_1 + h_2 \leq z \leq h_1 + h_2 + h_3, \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

где λ_1 , λ_2 и λ_3 зависят от материала слоев.

При этом, очевидно, имеют место зависимости

$$\begin{aligned} \omega_1 &= T_1 \\ \omega_1 - \lambda_1 h_1 &= \omega_2 - \lambda_2 h_1, \\ \omega_2 - \lambda_2 h_2 &= \omega_3 - \lambda_3 h_2, \\ \omega_3 - \lambda_3 h_3 &= T_2. \end{aligned}$$

Как и в примере № 1, принимается линейный закон изменения модулей упругости от температуры

$$E_r^{(m)} = E_r^{(m)} (1 - \alpha_m T), \quad E_\theta^{(m)} = E_\theta^{(m)} (1 - \alpha_m T), \quad (m = 1, 2, 3) \quad (4.14)$$

коэффициенты Пуассона и температурного расширения принимаются не зависящими от температуры

$$\nu_1^{(m)} = \text{const}, \quad \alpha_2^{(m)} = \text{const}, \quad \beta_r^{(m)} = \beta_\theta^{(m)} = \beta_m = \text{const} \quad (m = 1, 2, 3) \quad (4.15)$$

Из (1.7), с учетом (1.5), (4.13)–(4.15), получаются

$$C_{ii} = \frac{E_i^{(1)} h_1}{1 - \mu_1^{(1)} \mu_2^{(1)}} \left(1 - \alpha_1 \omega_1 + \alpha_1 \lambda_1 \frac{h_1}{2} \right) + \frac{E_i^{(2)} (h_2 - h_1)}{1 - \mu_1^{(2)} \mu_2^{(2)}} \left(1 - \alpha_2 \omega_2 + \right. \\ \left. + \alpha_2 \lambda_2 \frac{h_2 + h_1}{2} \right) + \frac{E_i^{(3)} (h_3 - h_2)}{1 - \mu_1^{(3)} \mu_2^{(3)}} \left(1 - \alpha_3 \omega_3 + \alpha_3 \lambda_3 \frac{h_3 + h_2}{2} \right),$$

при $i = 1, 2$

$$K_{ii} = \frac{E_i^{(1)} h_1^2}{1 - \mu_1^{(1)} \mu_2^{(1)}} \left(\frac{1 - \alpha_1 \omega_1}{2} + \alpha_1 \lambda_1 \frac{h_1}{3} \right) + \\ + \frac{E_i^{(2)} (h_2 - h_1)}{1 - \mu_1^{(2)} \mu_2^{(2)}} \left[(1 - \alpha_2 \omega_2) \frac{h_2 + h_1}{2} + \alpha_2 \lambda_2 \frac{h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2}{3} \right] + \\ + \frac{E_i^{(3)} (h_3 - h_2)}{1 - \mu_1^{(3)} \mu_2^{(3)}} \left[(1 - \alpha_3 \omega_3) \frac{h_3 + h_2}{2} + \alpha_3 \lambda_3 \frac{h_2^2 + h_2 h_3 + h_3^2}{3} \right],$$

при $i = 1, 2$

$$D_{ii} = \frac{E_i^{(1)} h_1^3}{1 - \mu_1^{(1)} \mu_2^{(1)}} \left(\frac{1 - \alpha_1 \omega_1}{3} + \alpha_1 \lambda_1 \frac{h_1}{4} \right) + \\ + \frac{E_i^{(2)} (h_2 - h_1)}{1 - \mu_1^{(2)} \mu_2^{(2)}} \left[(1 - \alpha_2 \omega_2) \frac{h_2^2 - h_1^2}{3} + \alpha_2 \lambda_2 \frac{h_2^4 - h_1^4}{4} \right] + \\ + \frac{E_i^{(3)} (h_3 - h_2)}{1 - \mu_1^{(3)} \mu_2^{(3)}} \left[(1 - \alpha_3 \omega_3) \frac{h_3^2 - h_2^2}{3} + \alpha_3 \lambda_3 \frac{h_3^4 - h_2^4}{4} \right],$$

при $i = 1, 2$

$$C_{ij} = - \frac{E_i^{(1)} \beta_1 [1 + \mu_i^{(1)}] h_1}{1 - \mu_1^{(1)} \mu_2^{(1)}} \left[(1 - \alpha_1 \omega_1) \omega_1 + (2\alpha_1 \omega_1 - 1) \frac{\lambda_1 h_1}{2} - \right. \\ \left. - \alpha_1 \frac{\lambda_1^2 h_1^2}{3} \right] - \frac{E_i^{(2)} \beta_2 [1 + \mu_i^{(2)}]}{1 - \mu_1^{(2)} \mu_2^{(2)}} \left[(1 - \alpha_2 \omega_2) (h_2 - h_1) \omega_2 + \right. \\ \left. + \lambda_2 (2\alpha_2 \omega_2 - 1) \frac{h_2^2 - h_1^2}{2} - \alpha_2 \lambda_2^2 \frac{h_2^3 - h_1^3}{3} \right] - \frac{E_i^{(3)} \beta_3 [1 + \mu_i^{(3)}]}{1 - \mu_1^{(3)} \mu_2^{(3)}} \times \\ \times \left[(1 - \alpha_3 \omega_3) (h_3 - h_2) \omega_3 + \lambda_3 (2\alpha_3 \omega_3 - 1) \frac{h_3^2 - h_2^2}{2} - \right. \\ \left. - \alpha_3 \lambda_3^2 \frac{h_3^3 - h_2^3}{3} \right],$$

при $i = 1, j = 2$
при $i = 2, j = 1$

$$K_{ij} = - \frac{E_i^{(1)} \beta_1 [1 + \mu_i^{(1)}] h_1^2}{1 - \mu_1^{(1)} \mu_2^{(1)}} \left(\omega_1 \frac{1 - \alpha_1 \omega_1}{2} + \lambda_1 h_1 \frac{2\alpha_1 \omega_1 - 1}{3} - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\alpha_1 \lambda_1^2 \frac{h_1^2}{4} \Bigg) - \frac{E_1^{(2)} \rho_2 [1 + \nu_1^{(2)}]}{1 - \nu_1^{(2)} \nu_2^{(2)}} \left[(1 - \alpha_2 \omega_2) \omega_2 \frac{h_2^2 - h_1^2}{2} + \right. \\
 & \left. + \lambda_2 (2\alpha_2 \omega_2 - 1) \frac{h_2^3 - h_1^3}{3} - \alpha_2 \lambda_2^2 \frac{h_2^4 - h_1^4}{4} \right] - \\
 & - \frac{E_1^{(3)} \rho_3 [1 + \nu_1^{(3)}]}{1 - \nu_1^{(3)} \nu_2^{(3)}} \left[(1 - \alpha_3 \omega_3) \omega_3 \frac{h_3^2 - h_2^2}{2} + \right. \\
 & \left. + \lambda_3 (2\alpha_3 \omega_3 - 1) \frac{h_3^3 - h_2^3}{3} - \alpha_3 \lambda_3^2 \frac{h_3^4 - h_2^4}{4} \right].
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

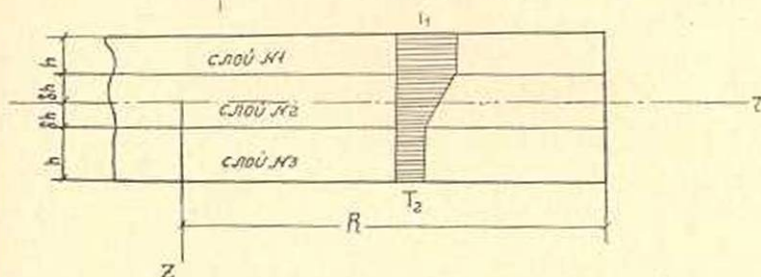
при $i=1, j=2$
при $i=2, j=1$

Дальнейший ход решения не представляет принципиальных затруднений, т. к., имея значения C_{ii} , K_{ii} , D_{ii} , C_{it} , K_{it} , по (2.3), (2.4), (2.6)–(2.16) и из конкретных контурных условий найдутся значения u и w , а следовательно, внутренние усилия и моменты.

В частном случае, когда $\frac{E_1^{(m)}}{E_2^{(m)}} = k$, решение рассматриваемой задачи получится, если в (4.10) или (4.12) (в зависимости от граничных условий) внести (4.16) и (4.17).

Пример № 4. В качестве четвертого примера приводится расчет симметрично собранной трехслойной круглой пластинки. Координатная плоскость $z=0$ предполагается совмещенной со срединной плоскостью среднего слоя недеформированной пластинки.

Расположение слоев, некоторые размеры и эпюра распределения температуры по толщине пластинки приведены на фиг. 3.



Фиг. 3

Температура вдоль радиуса считается постоянной, а по толщине изменяется по закону

$$\begin{aligned}
 & T = T_1 & -\delta h \geq z \geq -h(1+\delta), \\
 & T = \frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{T_1 - T_2}{2\delta h} z & \delta h \geq z \geq -\delta h, \\
 & T = T_2 & h(1+\delta) \geq z \geq \delta h.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Принимается также:

$$\text{для слоя № 1} - E_r^{(1)} = E(1 - \alpha T_1), \quad E_z^{(1)} = E(1 - \alpha T_1),$$

$$\mu_1^{(1)} = \mu_2^{(1)} = \mu, \quad \beta_1 = \beta,$$

$$\text{для слоя № 2} - E_r^{(2)} = \varepsilon E, \quad E_z^{(2)} = \frac{\varepsilon}{k} E, \quad \mu_1^{(2)} = \nu \mu$$

(4.19)

$$\left(\text{следов. } \mu_2^{(2)} = \frac{\nu}{k} \mu \right), \quad \beta_2 = 0,$$

$$\text{для слоя № 3} - E_r^{(3)} = E(1 - \alpha T_2), \quad E_z^{(3)} = E(1 - \alpha T_2),$$

$$\mu_1^{(3)} = \mu_2^{(3)} = \mu, \quad \beta_3 = \beta.$$

Из (1.7) с учетом (1.5), (4.18) и (4.19) получаются

$$C_{11} = Eh \left[\frac{2 - \alpha(T_1 + T_2)}{1 - \mu^2} + \frac{2\varepsilon k \delta}{k - \nu^2 \mu^2} \right],$$

$$C_{12} = Eh \mu \left[\frac{2 - \alpha(T_1 + T_2)}{1 - \mu^2} + \frac{2\varepsilon \delta \nu}{k - \nu^2 \mu^2} \right],$$

$$C_{22} = Eh \left[\frac{2 - \alpha(T_1 + T_2)}{1 - \mu^2} + \frac{2\varepsilon \delta}{k - \nu^2 \mu^2} \right],$$

$$K_{11} = \frac{K_{12}}{\mu} = K_{22} = Eh^2 \frac{1 + 2\delta}{2(1 - \mu^2)} \alpha (T_1 - T_2),$$

$$D_{11} = \frac{Eh^3}{3} \left[\frac{2 - \alpha(T_1 + T_2)}{1 - \mu^2} (1 + 3\delta + 3\delta^2) + \frac{2\varepsilon k \delta^3}{k - \nu^2 \mu^2} \right], \quad (4.20)$$

$$D_{12} = \frac{Eh^3}{3} \mu \left[\frac{2 - \alpha(T_1 + T_2)}{1 - \mu^2} (1 + 3\delta + 3\delta^2) + \frac{2\varepsilon \delta^3}{k - \nu^2 \mu^2} \right],$$

$$D_{22} = \frac{Eh^3}{3} \left[\frac{2 - \alpha(T_1 + T_2)}{1 - \mu^2} (1 + 3\delta + 3\delta^2) + \frac{2\varepsilon \delta^3}{k - \nu^2 \mu^2} \right],$$

$$C_{1T} = C_{2T} = -Eh \frac{\beta}{1 - \mu} [T_1 + T_2 - \alpha(T_1^2 + T_2^2)],$$

$$K_{1T} = K_{2T} = \frac{Eh^2}{2} \cdot \frac{\beta(1 + 2\delta)}{1 - \mu} (T_1 - T_2) [1 - \alpha(T_1 + T_2)],$$

а из (2.6) с учетом (4.20):

$$m_{1,2} = \frac{\alpha(k - \nu^2 \mu^2) + 16\varepsilon^2 \delta^4 k(1 - \mu^2)^2 + b\varepsilon(1 + k)(k - \nu^2 \mu^2)(1 - \mu^2)}{\alpha(k - \nu^2 \mu^2) + 16\varepsilon^2 \delta^4 k^2(1 - \mu^2)^2 + 2b\varepsilon k(k - \nu^2 \mu^2)(1 - \mu^2)} \pm$$

$$\pm \frac{d\varepsilon(1 - k)(k - \nu^2 \mu^2)(1 - \mu^2)}{\alpha(k - \nu^2 \mu^2) + 16\varepsilon^2 \delta^4 k^2(1 - \mu^2)^2 + 2b\varepsilon k(k - \nu^2 \mu^2)(1 - \mu^2)}, \quad (4.21)$$

где

$$a = 16(1 + 3\beta + 3\beta^2)[1 - \alpha(T_1 + T_2)] + 12\alpha^2 T_1 T_2 (1 + 4\beta + 4\beta^2) + \alpha^2 (T_1 + T_2)^2,$$

$$b = 4\beta [2 - \alpha(T_1 + T_2)] (1 + 3\beta + 4\beta^2),$$

$$d = 4(1 + 2\beta) \sqrt{3\beta^2 \alpha^2 (T_1 - T_2)^2 + [2 - \alpha(T_1 + T_2)]^2 (1 + \beta)^2}.$$

Внесением (4.20), (4.21) в (2.3), (2.4), (2.13) или (2.15), из (2.16) можно получить решение задачи с точностью до постоянных интегрирования, которые определяются из условий закрепления пластинки.

Для конкретности принимается

$$\alpha = 0,0005 \text{ 1/град}, \beta = 8, T_1 = 200^\circ\text{C}, T_2 = 0^\circ\text{C}, \mu = 0,35 \\ \beta = 2,55 \times 10^{-5}, \varepsilon = 0,2, \nu = 0,2 \quad (4.22)$$

и продолжение решения приводится для контурных условий

$$\text{при } r = R, z = 0 \quad u = w = M_r = 0 \quad (4.23)$$

при трех значениях k ($k = 10; 1; 0,1$).

а) при $k = 10$, учитывая (4.22) и (4.23), окончательно получим

$$u = 1,071 \times 10^{-4} \left[\left(\frac{r}{R} \right)^{0,7298} - \left(\frac{r}{R} \right)^{0,8103} \right] R,$$

$$w = - \left\{ 1,336 + \frac{r}{R} \left[0,5100 \left(\frac{r}{R} \right)^{0,7298} - 1,846 \left(\frac{r}{R} \right)^{0,8103} \right] \right\} \frac{R^2}{h} \times 10^{-4},$$

$$M_r = Eh^2 \left\{ 0,06002 + \left(\frac{r}{R} \right)^{-1} \left[0,01947 \left(\frac{r}{R} \right)^{0,7298} - 0,07949 \left(\frac{r}{R} \right)^{0,8103} \right] \right\}.$$

В таблице 1 приведены значения $\frac{u}{R} \times 10^4$, $\frac{h}{R^2} w \times 10^4$ и $\frac{M_r}{Eh^2}$

для некоторых значений $\frac{r}{R}$.

Таблица 1

$\frac{r}{R}$	$\frac{u}{R} \times 10^4$	$\frac{h}{R^2} w \times 10^4$	$\frac{M_r}{Eh^2}$
0,0	0,0	-1,336	∞
0,2	0,04021	-1,267	-0,01793
0,4	0,03903	-1,089	-0,009620
0,6	0,02972	-0,8146	-0,005204
0,8	0,01620	-0,4502	-0,002228
1,0	0,0	0,0	0,0

б) при $k = 1$, учитывая (4.22) и (4.23), окончательно получим

$$u = 0,$$

$$w = -1,054 \times 10^{-4} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \frac{R^2}{h},$$

$$M_r = 0.$$

В таблице 2 приведены значения $\frac{h}{R^2} w \times 10^4$ для некоторых значений $\frac{r}{R}$.

Таблица 2

$\frac{r}{R} =$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\frac{h}{R^2} w \times 10^4 =$	-1,054	-1,012	-0,8854	-0,6746	-0,3794	0,0

в) при $k = 0,1$, учитывая (4.22) и (4.23), окончательно получим

$$u = -0,4583 \times 10^{-4} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \left[\left(\frac{r}{R} \right)^{0,1291} - \left(\frac{r}{R} \right)^{0,4037} \right] R,$$

$$w = - \left\{ 0,3473 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \left[0,4599 \left(\frac{r}{R} \right)^{0,1291} - 0,1126 \left(\frac{r}{R} \right)^{0,4037} \right] \right\} \frac{R^2}{h} \times 10^{-4},$$

$$M_r = Eh^2 \left\{ 0,06002 - \frac{r}{R} \left[0,08522 \left(\frac{r}{R} \right)^{0,1291} - 0,02520 \left(\frac{r}{R} \right)^{0,4037} \right] \right\}.$$

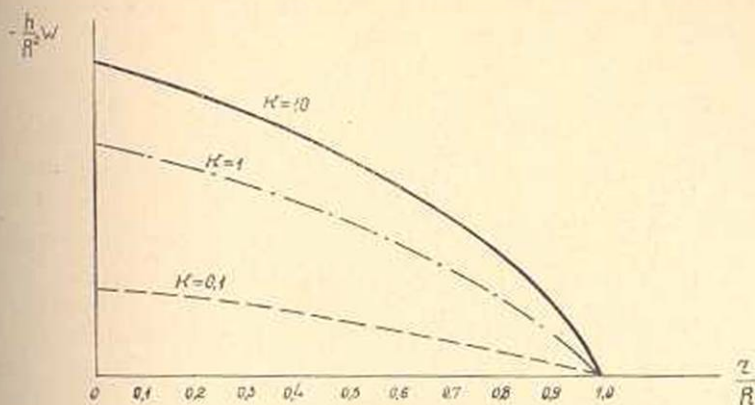
В таблице 3 приведены значения $\frac{u}{R} \times 10^4$, $\frac{h}{R^2} w \times 10^4$ и $\frac{M_r}{Eh^2}$ для некоторых значений $\frac{r}{R}$.

Таблица 3

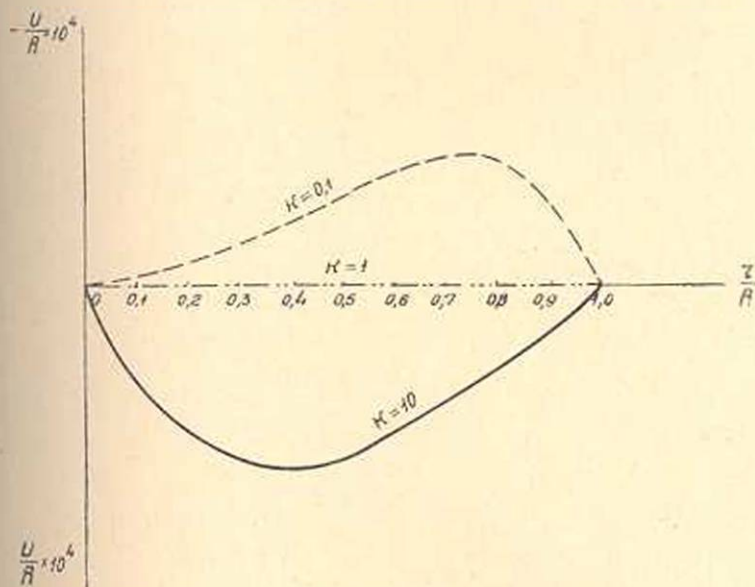
$\frac{r}{R}$	$\frac{u}{R} \times 10^4$	$\frac{h}{R^2} w \times 10^4$	$\frac{M_r}{Eh^2}$
0,0	0,0	-0,3473	0,06002
0,2	-0,00520	-0,3448	0,04881
0,4	-0,01449	-0,3261	0,03670
0,6	-0,02022	-0,2741	0,02445
0,8	-0,01694	-0,1712	0,01220
1,0	0,0	0,0	0,0

Ниже, для наглядности, приводятся графики $\frac{u}{R}$, $\frac{h}{R^2} w$ и $\frac{M_r}{Eh^2}$ для значений $k = 10; 1; 0,1$ (фиг. 4, 5, 6).

Пример № 5. Рассматривается однослойная ортотропная круглая пластинка радиуса R , находящаяся под воздействием температуры



Фиг. 4.



Фиг. 5

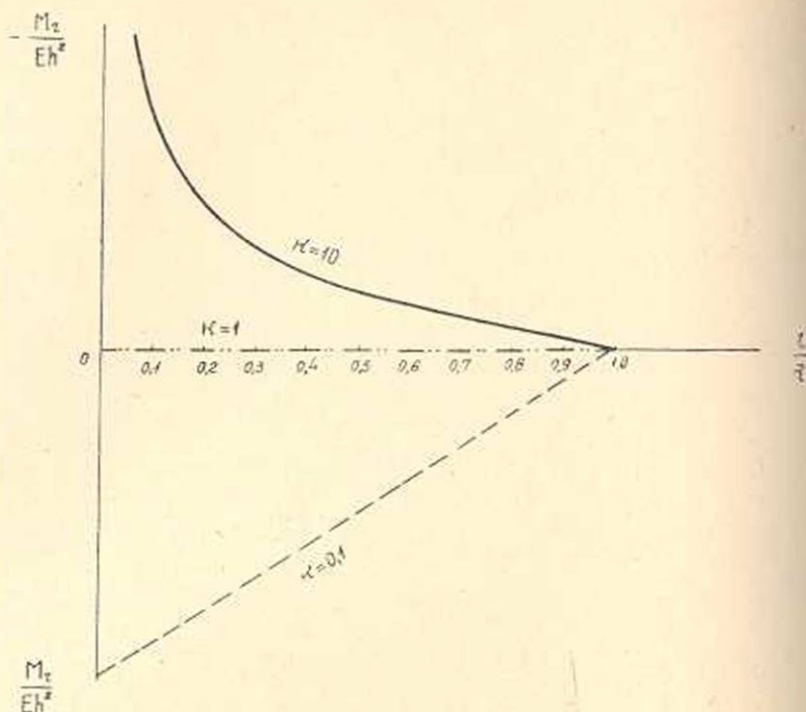
изменяющейся по (3.1), при контурных условиях (4.11). В силу осесимметричности должны быть выполнены также условия (4.2).

Зависимость модулей упругости от температуры принимается по (3.2). Коэффициенты Пуассона и температурного расширения считаются не зависящими от температуры.

Для определенности приняв

$$n_1 > 0, \quad n_2 < 0, \quad \alpha_T \neq 2, \quad (4.24)$$

из (3.7)–(3.9) получим значения u и w



Фиг. 6.

$$\begin{aligned}
 u = & C_1 r^{n_1} + C_2 r^{n_2} + \beta \left[w + \gamma \frac{k(1 + \alpha\gamma) - \mu_1}{k - 1 + \alpha\gamma(k + \mu_1)} \right] r - \beta\gamma r \ln \frac{r}{\rho} + \\
 & + \frac{\alpha\lambda h \operatorname{ch} \frac{\alpha\lambda h}{2} - 2\operatorname{sh} \frac{\alpha\lambda h}{2}}{\alpha^2\lambda^2 h^2 - 4\operatorname{sh}^2 \frac{\alpha\lambda h}{2}} \times \\
 & \times \frac{\alpha^2\lambda^2 (k - \mu_1^2) \rho^{\gamma\gamma} e^{2\alpha\gamma}}{E_1 [k - 1 - \alpha\gamma(k - \mu_1)]} C_6 r^{1 - \alpha\gamma}, \\
 w = & \frac{C_3}{1 + n_1} r^{1 + n_1} + \frac{C_4}{1 + n_2} r^{1 + n_2} + C_5 + \frac{\beta\lambda}{2} r^2 + \\
 & + \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha\lambda h}{2}}{\alpha^2\lambda^2 h^2 - 4\operatorname{sh}^2 \frac{\alpha\lambda h}{2}} \cdot \frac{2\alpha^3\lambda^3 (k - \mu_1^2) \rho^{\gamma\gamma} e^{2\alpha\gamma}}{E_1 [k - 1 - \alpha\gamma(k - \mu_1)] (2 - \alpha\gamma)} C_6 r^{2 - \alpha\gamma}.
 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Из (4.25), учитывая (4.2), (4.11), а также принимая во внимание односвязность контура пластинки (см. сноску к формулам 1.8), найдем значения постоянных интегрирования

$$C_1 = \beta R^{1-n_1} \left[\gamma \ln \frac{R}{\rho} - \omega - \gamma \frac{k(1+\alpha\gamma) - \mu_1}{k-1+\alpha\gamma(k+\mu_1)} \right], \quad C_2 = 0,$$

$$C_3 = -\beta \lambda R^{1-n_1}, \quad C_4 = 0,$$

$$C_5 = \frac{\beta \lambda R^2}{2} \cdot \frac{1-n_1}{1+n_1}, \quad C_6 = 0.$$

Следовательно,

$$u_r = \beta \left\{ \gamma \left(R^{1-n_1} r^{n_1} \ln \frac{R}{\rho} - r \ln \frac{r}{\rho} \right) - \left[\omega + \gamma \frac{k(1+\alpha\gamma) - \mu_1}{k-1+\alpha\gamma(k+\mu_1)} \right] \times \right. \\ \left. \times (R^{1-n_1} r^{n_1} - r) + \lambda (R^{1-n_1} r^{n_1} - r) z \right\},$$

$$w = \frac{\beta \lambda}{2(1+n_1)} \left[(1-n_1) R^2 + (1+n_1) r^2 - 2R^{1-n_1} r^{1+n_1} \right],$$

$$\frac{dw}{dr} = \beta \lambda (r - R^{1-n_1} r^{n_1}),$$

$$T_r = \frac{E_1}{k-\mu_1^2} \rho^{-\alpha\gamma} \beta \left\{ (kn_1 + \mu_1) R^{1-n_1} \left[A_1 \left(\gamma \ln \frac{R}{\rho} - \omega - \gamma \frac{k+\alpha\gamma k - \mu_1}{k-1+\alpha\gamma k + \alpha\gamma \mu_1} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + A_2 \lambda \right] r^{n_1-1+\alpha\gamma} + \left[A_1 \gamma \frac{k-\mu_1^2}{k-1+\alpha\gamma k + \alpha\gamma \mu_1} + \right. \right. \\ \left. \left. + (k+\mu_1) (A_1 \omega - A_2 \lambda - A_4) \right] r^{\alpha\gamma} \right\},$$

$$T_1 = \frac{E_1}{k-\mu_1^2} \rho^{-\alpha\gamma} \beta \left\{ (\mu_1 n_1 + 1) R^{1-n_1} \left[A_1 \left(\gamma \ln \frac{R}{\rho} - \omega - \gamma \frac{k+\alpha\gamma k - \mu_1}{k-1+\alpha\gamma k + \alpha\gamma \mu_1} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + A_2 \lambda \right] r^{n_1-1+\alpha\gamma} + \left[A_1 \gamma \frac{(1+\alpha\gamma)(k-\mu_1^2)}{k-1+\alpha\gamma k + \alpha\gamma \mu_1} + \right. \right. \\ \left. \left. + (1+\mu_1) (A_1 \omega + A_2 \lambda - A_4) \right] r^{\alpha\gamma} \right\},$$

$$M_r = \frac{E_1}{k-\mu_1^2} \rho^{-\alpha\gamma} \beta \left\{ (kn_1 + \mu_1) R^{1-n_1} \left[A_2 \left(\gamma \ln \frac{R}{\rho} - \omega - \gamma \frac{k+\alpha\gamma k - \mu_1}{k-1+\alpha\gamma k + \alpha\gamma \mu_1} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + A_3 \lambda \right] r^{n_1-1+\alpha\gamma} + \left[A_2 \gamma \frac{k-\mu_1^2}{k-1+\alpha\gamma k + \alpha\gamma \mu_1} + \right. \right. \\ \left. \left. + (k+\mu_1) (A_2 \omega - A_3 \lambda - A_5) \right] r^{\alpha\gamma} \right\},$$

$$M_1 = \frac{E_1}{k-\mu_1^2} \rho^{-\alpha\gamma} \beta \left\{ (\mu_1 n_1 + 1) R^{1-n_1} \left[A_2 \left(\gamma \ln \frac{R}{\rho} - \omega - \gamma \frac{k+\alpha\gamma k - \mu_1}{k-1+\alpha\gamma k + \alpha\gamma \mu_1} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + A_3 \lambda \right] r^{n_1-1+\alpha\gamma} + \left[A_2 \gamma \frac{(1+\alpha\gamma)(k-\mu_1^2)}{k-1+\alpha\gamma k + \alpha\gamma \mu_1} + \right. \right. \\ \left. \left. + (1+\mu_1) (A_2 \omega + A_3 \lambda - A_5) \right] r^{\alpha\gamma} \right\}.$$

$$\left. + (1 + \mu_1) (A_3 w - A_3 \lambda - A_3) \right] r^{27} \Bigg\}.$$

В заключение отметим, что решения широкого круга конкретных осесимметричных температурных задач круглой ортотропной пластинки (например: при упругих постоянных, не зависящих от температуры, при различных условиях изменения температуры, при наличии круглого отверстия посередине пластинки и т. д.) можно получить как частные случаи приведенных в работе результатов.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР.

Поступила 9 I 1960

Ս. Մ. Դուրգարյան

ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԿԼՈՐ ԹԻԹԵԼԻ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիտարկեն կորդինատային r , θ , z առանցքների սխեմում գիտարկված է օրթոտրոպ շերտավոր կլոր թիթեղի առանցքասիմետրիկ շերտային խնդիրը, երբ Յունգի մոդուլը, Պուասսոնի և շերտային ընդարձակման գործակիցները փոփոխվում են կախված շերտատիճանից, որը հալանի ֆունկցիա է r և z -ից:

Ամենաընդհանուր դեպքի համար ստացված է փոփոխական գործակիցներով դիֆերենցիալ հավասարումների (1.9) սխեմներ:

Իրաված են դեպքեր, երբ՝

ա) շերտատիճանը շառավղի ուղղությամբ չի փոփոխվում, իսկ ըստ հաստության փոփոխվում է կամայական օրենքով,

բ) շերտատիճանը ներկայացված է որպես շառավղից կախված լոգարիթմական և ըստ հաստության դժպիլն ֆանկցիաների գումար:

Տարբեր եզրային պայմանների համար լուծված են օրինակներ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М., 1957.
2. Амбарцумян С. А. Температурные напряжения в слоистых анизотропных оболочках. Изв. АН АрмССР (серия физ.-мат. наук)», 5, № 6, 1952.
3. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. Гостехиздат, М.—Л., 1947.
4. Новожилов В. В. Теория упругости. Гос. союзное издательство судостроительной промышленности, 1958.
5. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. Гос. издательство технико-теорет. литературы, М., 1956.
6. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
7. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. II, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
8. Дургарьян С. М. Температурный расчет ортотропной слоистой пластинки при упругих постоянных и коэффициенте температурного расширения, зависящих от температуры. Изв. АН АрмССР (серия физ.-мат. наук)», 13, № 2, 1960.