

М. М. Джрбашян

## Об интегральных преобразованиях, порожденных обобщенной функцией типа Миттаг-Лефлера

В настоящей статье исследуются интегральные преобразования, связанные с целой функцией типа Миттаг-Лефлера

$$\Phi_{\rho_1, \rho_2}(z; \mu_1, \mu_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu_1 + k\rho_1^{-1}) \Gamma(\mu_2 + k\rho_2^{-1})},$$

где  $\rho_1, \mu_1$  и  $\rho_2, \mu_2$  — произвольные положительные параметры.

При специальном выборе указанных параметров, эта функция, очевидно, связана с функциями Бесселя; в частности, в предельном случае, когда  $\rho_2 = +\infty$

$$\Phi_{\rho_1, \infty}(z; \mu_1, \mu_2) = \frac{1}{\Gamma(\mu_2)} E_{\rho_1}(z; \mu_1),$$

где  $E_{\rho_1}(z; \mu_1)$  — функция типа Миттаг-Лефлера. Интегральные преобразования, связанные с функцией  $E_{\rho}(z; \mu)$ , были исследованы нами в работе [1].

Результаты, которые приводятся в настоящей статье, представляют собой естественные и широкие обобщения результатов нашей работы [1], а также известных результатов Ханкеля, Харди и других авторов, относящихся к интегральным преобразованиям, связанным с функциями Бесселя.

Работа состоит из трех параграфов. В § 1 приводится ряд элементарных свойств функции  $\Phi_{\rho_1, \rho_2}$ , в частности, вычисляется преобразование Бореля и даются некоторые интегральные ее представления.

В § 2 при определенных ограничениях, налагаемых на параметры, устанавливается формула для преобразования Меллина функции  $\Phi_{\rho_1, \rho_2}$  на определенной совокупности лучей комплексной плоскости. Далее, определяются функции  $h_{\rho_1, \rho_2}^{(\pm)}(x)$ , в определенном смысле сопряженные с функциями

$$k_{\rho_1, \rho_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\rho}} \int_0^x \Phi_{\rho_1, \rho_2}\left(t^{\frac{1}{\rho}} e^{-i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu_1, \mu_2\right) t^{\mu-1} dt \quad \left(\mu = \mu_1 + \mu_2 - \frac{1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right).$$

Доказывается, что преобразования Меллина функций  $\Phi_{\rho_1, \rho_2}$  и  $h_{\rho_1, \rho_2}^{(\pm)}$  связаны двумя важными функциональными тождествами на прямой  $\text{Re } s = \frac{1}{2}$ .

Эти тождества позволяют в § 3 построить теорию прямых и обратных интегральных преобразований в классах  $L_2$ , ядрами которых служат функции  $\frac{k_{\rho_1, \rho_2}(xy)}{x}$  и  $\frac{h_{\rho_1, \rho_2}^{(\pm)}(xy)}{x}$ . Наконец, эти результаты позволяют, как и в работе [1], построить аппарат приближения целыми функциями в классах  $L_2$  для произвольной конечной системы лучей, исходящих из начала координат комплексной плоскости. Из-за нехватки места, доказательства теорем, приводимых в § 3, опускаются, имея в виду, что они ничем не отличаются от доказательств соответствующих теорем нашей работы [1].

### § 1. Определение и некоторые элементарные свойства обобщенной функции типа Миттаг-Лефлера

1°. Обобщенной функцией типа Миттаг-Лефлера мы называем сумму степенного ряда

$$\Phi_{\rho_1, \rho_2}(z; \mu_1, \mu_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu_1 + k\rho_1^{-1}) \Gamma(\mu_2 + k\rho_2^{-1})}, \quad (1.1)$$

где  $\rho_1, \rho_2 \in (0, +\infty)$  и  $\mu_1, \mu_2 \in (-\infty, +\infty)$  — произвольные параметры.

Отметим, что для произвольных значений параметров  $\mu_1, \mu_2 \in (-\infty, +\infty)$  функция  $\Phi_{\rho_1, \rho_2}(z; \mu_1, \mu_2)$  целая, порядка

$$\rho = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (1.2)$$

и типа

$$\sigma = \left( \frac{\rho_1}{\rho} \right)^{\frac{\rho}{\rho_1}} \left( \frac{\rho_2}{\rho} \right)^{\frac{\rho}{\rho_2}}. \quad (1.3)$$

Действительно, по известной формуле теории целых функций, порядок  $\rho$  функции  $\Phi_{\rho_1, \rho_2}(z; \mu_1, \mu_2)$  определится так

$$\rho = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log k}{\log |\Gamma(\mu_1 + k\rho_1^{-1}) \Gamma(\mu_2 + k\rho_2^{-1})|}. \quad (1.4)$$

Но по формуле Стирлинга для  $r > 0$

$$\Gamma(r) = \sqrt{2\pi} r^{r-\frac{1}{2}} e^{-r} e^{\frac{\theta_r}{12r}}, \quad 0 < \theta_r < 1,$$

поэтому для больших  $k$  будем иметь

$$\begin{aligned}
\log \{ \Gamma(\mu_1 + k\rho_1^{-1}) \Gamma(\mu_2 + k\rho_2^{-1}) \} &= \left( \mu_1 + k\rho_1^{-1} - \frac{1}{2} \right) \log(\mu_1 + k\rho_1^{-1}) + \\
&+ \left( \mu_2 + k\rho_2^{-1} - \frac{1}{2} \right) \log(\mu_2 + k\rho_2^{-1}) - \\
&- (\mu_1 + \mu_2 + k(\rho_1^{-1} + \rho_2^{-1})) + \log 2\pi + O\left(\frac{1}{k}\right) = \\
&= \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) k \log k \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log k}\right) \right\}. \quad (1.5)
\end{aligned}$$

Из (1.4) и (1.5) следует формула (1.2). Далее, как известно, тип  $\tau$  функции  $\Phi_{\rho_1, \rho_2}(z; \mu_1, \mu_2)$ , имеющей порядок  $\rho$ , определится из формулы

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k^{\frac{1}{\rho}} \{ \Gamma(\mu_1 + k\rho_1^{-1}) \Gamma(\mu_2 + k\rho_2^{-1}) \}^{-\frac{1}{k}} = (\tau \rho e)^{\frac{1}{\rho}}. \quad (1.6)$$

Но по формуле Стирлинга, для больших значений  $k$ , будем иметь

$$\begin{aligned}
&\{ \Gamma(\mu_1 + k\rho_1^{-1}) \Gamma(\mu_2 + k\rho_2^{-1}) \}^{-\frac{1}{k}} = \\
&= e^{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} k - \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2}} \{ 1 + o(1) \},
\end{aligned}$$

откуда и из (1.6), ввиду того, что по (1.2)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}, \quad (1.2')$$

будет следовать формула (1.3).

Отметим связь функции  $\Phi_{\rho_1, \rho_2}(z; \mu_1, \mu_2)$  с некоторыми элементарными функциями.

Из определения (1.1) следует формула

$$\Phi_{\rho_1, \rho_2}(z; \mu_1, \mu_2) = \Phi_{\rho_2, \rho_1}(z; \mu_2, \mu_1), \quad (1.7)$$

поэтому формально имеем

$$\Phi_{\rho, \infty}(z; \mu, 1) = \Phi_{\infty, \rho}(z; 1, \mu) = E_{\rho}(z; \mu), \quad (1.8)$$

где

$$E_{\rho}(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})} \quad (1.9)$$

функция типа Миттаг-Лефлера, которая, как известно, имеет порядок  $\rho$  и тип ее равен единице при любом значении  $\mu \in (-\infty, +\infty)$ . Легко видеть, что и в этом предельном случае формулы (1.2) и (1.3), определяющие порядок и тип функции  $\Phi_{\rho_1, \rho_2}(z; \mu_1, \mu_2)$ , остаются в силе.

В другом предельном случае, когда  $\rho_1 = \rho_2 = +\infty$ , соответствующий ряд (1.1) уже сходится лишь при  $|z| < 1$ , и тогда будем иметь

$$\Phi_{\infty, \infty}(z; 1, 1) = \frac{1}{1-z}, \quad (|z| < 1). \quad (1.10)$$

Наконец, из определения функции Бесселя

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(1+k)\Gamma(1+\nu+k)} \quad (1.11)$$

следует связь функции  $\Phi_{\rho_1, \rho_2}(z; \mu_1, \mu_2)$  с функциями Бесселя, которая, как легко видеть, выражается формулой

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \Phi_{1,1}\left(-\frac{z^2}{4}; 1, \nu+1\right). \quad (1.12)$$

2. Приведем теперь некоторые интегральные формулы для функции  $\Phi_{\rho_1, \rho_2}(z; \mu_1, \mu_2)$ . Почленным интегрированием ряда (1.1) получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z-t)^{\alpha-1} \Phi_{\rho_1, \rho_2}(\lambda t^{\frac{1}{\rho_1}}; \mu_1, \mu_2) t^{\mu_1-1} dt = \\ = z^{\mu_1+\alpha-1} \Phi_{\rho_1, \rho_2}(\lambda z^{\frac{1}{\rho_1}}; \mu_1 + \alpha, \mu_2), \quad (\mu_1 > 0, \alpha > 0), \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z-t)^{\alpha-1} \Phi_{\rho_1, \rho_2}(\lambda t^{\frac{1}{\rho_2}}; \mu_1, \mu_2) t^{\mu_2-1} dt = \\ = z^{\mu_2+\alpha-1} \Phi_{\rho_1, \rho_2}(\lambda z^{\frac{1}{\rho_2}}; \mu_1, \mu_2 + \alpha), \quad (\mu_2 > 0, \alpha > 0), \end{aligned} \quad (1.13')$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu_1-1} \Phi_{\rho_1, \rho_2}(\lambda z^{\frac{1}{\rho_1}} t^{\frac{1}{\rho_1}} (1-t)^{\frac{1}{\rho_2}}; \mu_1, \mu_2) dt = \\ = E_\rho(\lambda z^{\frac{1}{\rho}}; \mu_1 + \mu_2), \quad (\mu_1 > 0, \mu_2 > 0), \end{aligned} \quad (1.14)$$

где  $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ .

Формула (1.13) [или (1.13')] сохраняет силу и в предельном случае, когда  $\rho_2 = +\infty$ . Тогда, в силу (1.8), она принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z-t)^{\alpha-1} E_\rho(\lambda t^{\frac{1}{\rho}}; \mu) t^{\mu-1} dt = \\ = z^{\mu+\alpha-1} E_\rho(\lambda z^{\frac{1}{\rho}}; \mu + \alpha), \quad (\mu > 0, \alpha > 0). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Из формул (1.13) и (1.13'), в частности, вытекает

$$\frac{d}{dz} \left\{ z^{\mu_1} \Phi_{\rho_1, \rho_2} \left( \lambda z^{\frac{1}{\rho_1}}; \mu_1 + 1, \mu_2 \right) \right\} = z^{\mu_1 - 1} \Phi_{\rho_1, \rho_2} \left( \lambda z^{\frac{1}{\rho_1}}; \mu_1, \mu_2 \right) \quad (1.16)$$

и

$$\frac{d}{dz} \left\{ z^{\mu_2} \Phi_{\rho_1, \rho_2} \left( \lambda z^{\frac{1}{\rho_2}}; \mu_1, \mu_2 + 1 \right) \right\} = z^{\mu_2 - 1} \Phi_{\rho_1, \rho_2} \left( \lambda z^{\frac{1}{\rho_2}}; \mu_1, \mu_2 \right). \quad (1.16')$$

Ввиду (1.12), формулы (1.16) и (1.16'), очевидно, представляют собой естественные аналоги некоторых известных соотношений между бесселевыми функциями.

Установим теперь другие интегральные соотношения для обобщенных функций типа Миттаг-Лефлера. Докажем, что справедлива формула

$$\int_0^{\infty} \Phi_{\rho_1, \rho_2} \left( z t^{\frac{1}{\alpha}}; \mu_1, \mu_2 \right) t^{\beta-1} e^{-\zeta t} dt = \zeta^{-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta + k\alpha^{-1})}{\Gamma(\mu_1 + k\rho_1^{-1}) \Gamma(\mu_2 + k\rho_2^{-1})} \left( \frac{z}{\zeta^{\frac{1}{\alpha}}} \right)^k, \quad (1.17)$$

если  $\alpha \geq \rho_1$ ,  $\beta > 0$ ,  $z$  — любое комплексное число, а комплексное переменное  $\zeta$  подчинено условию

$$\begin{aligned} &\text{при } \rho < \alpha \quad \operatorname{Re} \zeta > 0, \\ &\text{при } \rho = \alpha \quad \operatorname{Re} \zeta > \sigma |z|^{\frac{1}{\alpha}}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где

$$\rho = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}, \quad \sigma = \left( \frac{\rho_1}{\rho} \right)^{\frac{\rho}{\rho_1}} \left( \frac{\rho_2}{\rho} \right)^{\frac{\rho}{\rho_2}}.$$

Заметим сначала, что при  $z=0$  формула (1.17) справедлива при любом  $\beta > 0$ ,  $\operatorname{Re} \zeta > 0$ , поэтому ниже мы положим что  $z \neq 0$ .

Если  $\zeta$  удовлетворяет условию (1.18), то число  $\varepsilon > 0$  можно выбрать таким образом, чтобы

$$\begin{aligned} &\text{при } \rho < \alpha \quad \operatorname{Re} \zeta \geq \varepsilon, \\ &\text{при } \rho = \alpha \quad \operatorname{Re} \zeta > (\sigma + \varepsilon) |z|^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned} \quad (1.18')$$

Из (1.6) следует, что

$$|\Gamma(\mu_1 + k\rho_1^{-1}) \Gamma(\mu_2 + k\rho_2^{-1})| \geq A_1 \left[ \left( \sigma + \frac{\varepsilon}{4} \right) \rho e \right]^{-\frac{k}{\rho}} k^{\frac{\rho}{\rho_1}}, \quad (1.19)$$

где  $A_1 > 0$  — постоянная, не зависящая от  $k \geq 0$ . Далее, имея в виду, что

$$\max_{0 \leq t < +\infty} \left| t^{\frac{k}{\alpha}} e^{-\gamma t} \right| = \left| \frac{k}{\alpha \gamma} \right|^{\frac{k}{\alpha}} e^{-\frac{k}{\alpha}}.$$

из (1.19) получим:

при  $\rho < \alpha$

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq t < +\infty} \left| \frac{z^k t^{\frac{k}{\alpha}}}{\Gamma(\mu_1 + k\rho_1^{-1}) \Gamma(\mu_2 + k\rho_2^{-1})} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \right| < \\ & < \left( \frac{e}{k} \right)^{k \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\alpha} \right)} \left| \left( \sigma + \frac{\varepsilon}{4} \right) \rho \right|^{\frac{1}{\rho}} |z| < \frac{A_2(\varepsilon; |z|)}{2^k}, \quad (k > 0), \end{aligned} \quad (1.20)$$

где  $A_2(\varepsilon; |z|)$  не зависит от  $k$  и

при  $\rho = \alpha$

$$\max_{0 \leq t < +\infty} \left| \frac{z^k t^{\frac{k}{\alpha}} e^{-\left(\sigma + \frac{\varepsilon}{2}\right)|z|^{\rho}t}}{\Gamma(\mu_1 + k\rho_1^{-1}) \Gamma(\mu_2 + k\rho_2^{-1})} \right| < \left( \frac{\sigma + \frac{\varepsilon}{4}}{\sigma + \frac{\varepsilon}{2}} \right)^{\frac{k}{\rho}}. \quad (1.21)$$

Из оценок (1.20) и (1.21) вытекает, что при  $\rho < \alpha$  и  $\rho = \alpha$  соответственно на полуоси  $0 \leq t < +\infty$  равномерно сходятся ряды

$$e^{-\frac{\alpha}{2}t} \Phi_{\rho_1, \rho_2}(zt^{\frac{1}{\alpha}}; \mu_1, \mu_2) t^{\beta-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k t^{\frac{k}{\alpha} + \beta - 1} e^{-\frac{\alpha}{2}t}}{\Gamma(\mu_1 + k\rho_1^{-1}) \Gamma(\mu_2 + k\rho_2^{-1})}$$

и

$$\begin{aligned} & e^{-\left(\sigma + \frac{\varepsilon}{2}\right)|z|^{\rho}t} \Phi_{\rho_1, \rho_2}(zt^{\frac{1}{\rho}}; \mu_1, \mu_2) t^{\beta-1} = \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k t^{\frac{k}{\rho} + \beta - 1} e^{-\left(\sigma + \frac{\varepsilon}{2}\right)|z|^{\rho}t}}{\Gamma(\mu_1 + k\rho_1^{-1}) \Gamma(\mu_2 + k\rho_2^{-1})}. \end{aligned}$$

Ввиду условия (1.18') отсюда следует, что разложение

$$e^{-\zeta t} \Phi_{\rho_1, \rho_2}(zt^{\frac{1}{\alpha}}; \mu_1, \mu_2) t^{\beta-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k t^{\frac{k}{\alpha} + \beta - 1} e^{-\zeta t}}{\Gamma(\mu_1 + k\rho_1^{-1}) \Gamma(\mu_2 + k\rho_2^{-1})}$$

допускает почленное интегрирование по  $t$  на полуоси  $[0, +\infty)$ .

Если заметить, что при  $\operatorname{Re} \zeta > 0$

$$\int_0^{\infty} e^{-\zeta t^{\frac{k}{\alpha} + \beta - 1}} dt = \frac{\Gamma(\beta + k\alpha^{-1})}{\zeta^{k\alpha^{-1} + \beta}}, \quad (k > 0),$$

то, выполнив интегрирование, получим формулу (1.17).

Положив в (1.17)  $\alpha = \rho_1$ ,  $\beta = \mu_1 > 0$  или  $\alpha = \rho_2$ ,  $\beta = \mu_2 > 0$  соответственно, получим

$$\int_0^{\infty} \Phi_{\rho_1, \rho_2} \left( z t^{\frac{1}{\rho_1}}; \mu_1, \mu_2 \right) t^{\mu_1-1} e^{-\zeta t} dt = \zeta^{-\rho_1 \mu_1} E_{\rho_1} \left( \frac{z}{\zeta}; \mu_2 \right), \quad \operatorname{Re} \zeta > 0, \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \Phi_{\rho_1, \rho_2} \left( z t^{\frac{1}{\rho_2}}; \mu_1, \mu_2 \right) t^{\mu_2-1} e^{-\zeta t} dt = \\ = \zeta^{-\rho_2 \mu_2} E_{\rho_2} \left( \frac{z}{\zeta}; \mu_1 \right), \quad \operatorname{Re} \zeta > 0. \end{aligned} \quad (1.22')$$

Положим теперь в (1.17)  $\alpha = 2\rho_2 (> \rho)$ ,  $\beta = \frac{\mu_2}{2}$  и заметим, что по формуле Лежандра

$$\Gamma(\mu_2 + k\rho_2^{-1}) = \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{k\rho_2^{-1} + \mu_2 - 1} \Gamma\left(\frac{\mu_2}{2} + k(2\rho_2)^{-1}\right) \Gamma\left(\frac{\mu_2 + 1}{2} + k(2\rho_2)^{-1}\right).$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \Phi_{\rho_1, \rho_2} \left( z t^{\frac{1}{2\rho_2}}; \mu_1, \mu_2 \right) t^{\mu_2-1} e^{-\zeta t} dt = \\ = \sqrt{\pi} 2^{1-\mu_2} \zeta^{-\frac{\mu_2}{2}} \Phi_{\rho_1, 2\rho_2} \left( \frac{1}{2^{1/\rho_2} \zeta^{1/2\rho_2}}; \mu_1, \frac{1+\mu_2}{2} \right), \quad (\operatorname{Re} \zeta > 0, \mu_2 > 0). \end{aligned} \quad (1.23)$$

В предельном случае, когда  $\rho_1 = \infty$ ,  $\mu_1 = 1$ ;  $\rho_2 = \rho$ ,  $\mu_2 = \mu$ , из (1.23) следует

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} E_{\rho} \left( z t^{\frac{1}{2\rho}}; \mu \right) t^{\frac{\mu}{2}-1} e^{-\zeta t} dt = \\ = \sqrt{\pi} 2^{1-\mu} \zeta^{-\frac{\mu}{2}} E_{2\rho} \left( \frac{z}{2^{1/\rho} \zeta^{1/2\rho}}; \frac{1+\mu}{2} \right), \quad (\operatorname{Re} \zeta > 0, \mu > 0). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Заметим, что из (1.24), при  $\rho = \frac{1}{2}$ ,  $\mu = 1$ , получим значение известного интеграла

$$\int_0^{\infty} \operatorname{ch} \sqrt{z} u e^{-\frac{\zeta u^2}{4}} du = 2 \sqrt{\frac{\pi}{\zeta}} e^{\frac{z}{\zeta}}, \quad \operatorname{Re} \zeta > 0.$$

Отметим, наконец, другое следствие из формулы (1.17). Положив там  $\alpha = \rho$ ,  $\beta = \mu_1 + \mu_2 > 0$ , будем иметь

$$\int_0^{\infty} \Phi_{\rho_1, \rho_2}(zt^{\frac{1}{\rho}}; \mu_1, \mu_2) t^{\mu_1 + \mu_2 - 1} e^{-zt} dt =$$

$$= z^{-\mu_1 - \mu_2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu_1 + \mu_2 + k(\rho_1^{-1} + \rho_2^{-1}))}{\Gamma(\mu_1 + k\rho_1^{-1}) \Gamma(\mu_2 + k\rho_2^{-1})} \left(\frac{z}{t^{\frac{1}{\rho}}}\right)^k, \quad \operatorname{Re} z > \tau |z|^{\rho}, \quad (1.25)$$

впрочем, легко убедиться, что ряд справа сходится вообще при  $|z| > \tau |z|^{\rho}$ .

3°. Приведем теперь некоторые интегральные представления для обобщенных функций типа Миттаг-Лефлера.

Покажем сначала, что справедлива формула

$$\Phi_{\rho, \rho} \left( \frac{z}{4^{\frac{1}{\rho}}}, \nu_1, \nu_2 \right) =$$

$$= \frac{2^{2(\nu_1-1)}}{\Gamma(\nu_2 - \nu_1 + \frac{1}{2})} \int_0^1 E_{\frac{\rho}{2}}(zt^{\frac{1}{\rho}}; 2\nu_1 - 1) (1-t)^{\nu_2 - \nu_1 - \frac{1}{2}} t^{\nu_1 - \frac{3}{2}} dt, \quad (1.26)$$

где  $\rho > 0$  — любое,  $\nu_2 > \nu_1 - \frac{1}{2} > 0$ .

Действительно,

$$\int_0^1 E_{\frac{\rho}{2}}(zt^{\frac{1}{\rho}}; 2\nu_1 - 1) (1-t)^{\nu_2 - \nu_1 - \frac{1}{2}} t^{\nu_1 - \frac{3}{2}} dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(2\nu_1 - 1 + 2\rho^{-1}k)} \int_0^1 (1-t)^{\nu_2 - \nu_1 - \frac{1}{2}} t^{\frac{k}{\rho} + \nu_1 - \frac{3}{2}} dt =$$

$$= \Gamma\left(\nu_2 - \nu_1 + \frac{1}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\nu_1 - \frac{1}{2} + k\rho^{-1}\right)}{\Gamma(2\nu_1 - 1 + 2\rho^{-1}k) \Gamma(\nu_2 + k\rho^{-1})} z^k. \quad (1.27)$$

Но по формуле Лежандра

$$\Gamma(2\nu_1 - 1 + 2k\rho^{-1}) = \Gamma\left(2\left(\nu_1 - \frac{1}{2} + k\rho^{-1}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\pi)} 2^{2(\nu_1-1) + 2k\rho^{-1}} \Gamma\left(\nu_1 - \frac{1}{2} + k\rho^{-1}\right) \Gamma(\nu_1 + k\rho^{-1}),$$

откуда и из (1.27) следует требуемая формула (1.25).

Отметим, что если положить  $\rho = 1$ ,  $\nu_1 = 1$ ,  $\nu_2 = \nu + 1$ , то из (1.26) получим формулу Лапласа

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 (1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos uz du, \quad \nu > -\frac{1}{2}$$

ввиду (1.12).

Укажем теперь другое интегральное представление для функции  $\Phi_{\rho_1, \rho_2}(z; \mu_1; \mu_2)$ .

Обозначим через  $\gamma(z; \alpha)$  ( $z > 0$ ,  $0 < \alpha < \pi$ ) контур, состоящий из луча  $\arg t = -\alpha$ ,  $|t| > z$ , дуги  $-\alpha < \arg t < +\alpha$  окружности  $|t| = z$  и луча  $\arg t = +\alpha$ ,  $|t| > z$ .

Докажем, что на всей плоскости  $z$  справедливы представления:

а) Если  $\rho_1 > \frac{1}{2}$ ,  $\rho_2 > 0$ ,  $-\infty < \mu_1, \mu_2 < +\infty$ , то

$$\Phi_{\rho_1, \rho_2}(z; \mu_1, \mu_2) = \frac{\rho_1}{2\pi i} \int_{\gamma(z; \alpha)} e^{t^{\rho_1}} t^{\rho_1(1-\mu_1)-1} E_{\rho_2}\left(\frac{z}{t}; \mu_2\right) dt, \quad (1.28)$$

где  $\frac{\pi}{2\rho_1} < \alpha < \min\left\{\pi, \frac{\pi}{\rho_1}\right\}$  — любое.

б) Если  $\rho_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\rho_2 > 0$ ,  $\mu_1 > 0$ ,  $-\infty < \mu_2 < +\infty$ , то

$$\Phi_{\frac{1}{2}, \rho_2}(z; \mu_1, \mu_2) = \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma(z; \pi)} e^{t^{\frac{1}{2}}} t^{-\frac{\mu_1+1}{2}} E_{\rho_2}\left(\frac{z}{t}; \mu_2\right) dt. \quad (1.29)$$

Действительно, из формулы Ханкеля для гамма функции будем иметь [2]:

а) для любого  $\rho_1 > \frac{1}{2}$  на всей плоскости переменной  $s$

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{\rho_1}{2\pi i} \int_{\gamma(s; \alpha)} e^{t^{\rho_1}} t^{-\rho_1 s + \rho_1 - 1} dt, \quad (1.30)$$

где  $\frac{\pi}{2\rho_1} < \alpha < \min\left\{\pi, \frac{\pi}{\rho_1}\right\}$  — любое;

б) в полуплоскости  $\operatorname{Re} s > 0$

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma(s; \pi)} e^{t^{\frac{1}{2}}} t^{-\frac{s+1}{2}} dt, \quad (1.30')$$

Поэтому, подставляя значение

$$E_{\rho_2}\left(\frac{z}{t}; \mu_2\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k t^{-k}}{\Gamma(\mu_2 + k\rho_2^{-1})}$$

в правые части формул (1.28) и (1.29) и меняя при этом порядок суммирования и интегрирования, в силу (1.30) и (1.30') приходим к требуемым интегральным представлениям.

Заметим, что формула (1.28) в предельном случае  $\rho_2 = +\infty$ ,  $\mu_2 = 1$  дает нам известное интегральное представление функций типа Миттаг-Лефлера [3].

Действительно, если  $|z| < \varepsilon$  и  $t \in \gamma(\varepsilon; \alpha)$ , то  $\left| \frac{z}{t} \right| < 1$  и тогда

$$E_{\infty}\left(\frac{z}{t}; 1\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{t}\right)^k = \frac{t}{t-z}.$$

Поэтому при  $|z| < \varepsilon$

$$E_{\rho}(z; \mu) = \Phi_{\rho, \infty}(z; \mu, 1) = \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon; \alpha)} \frac{e^{\rho t} t^{\rho(1-\mu)}}{t-z} dt, \quad (1.31)$$

и так как интеграл в правой части (1.31) голоморфен слева от контура  $\gamma(\varepsilon; \alpha)$ , то формула (1.31) справедлива всюду слева от контура интегрирования.

Положив в (1.28)  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ ,  $\mu_1 = \nu + 1$ ,  $\mu_2 = 1$  и заменив  $z$  на  $-\frac{z^2}{4}$ , ввиду (1.22) получим известное интегральное представление функции Бесселя

$$J_{\nu}(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}}{2\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon; \pi)} e^{t - \frac{z^2}{4t}} t^{-\nu-1} dt, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi.$$

## § 2. Дальнейшее исследование свойств функции $\Phi_{\rho_1, \rho_2}(z; \mu_1, \mu_2)$

1°. Для выявления других, более важных, свойств функции  $\Phi_{\rho_1, \rho_2}(z; \mu_1, \mu_2)$ , введем в рассмотрение следующие функции, мероморфные на всей плоскости комплексного переменного  $s$  ( $s = \sigma + it$ ).

$$\begin{aligned} K_{\rho_1, \rho_2}(s; \mu_1, \mu_2; \alpha) &\equiv K_{\rho_1, \rho_2}(s; \alpha) = \\ &= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \rho e^{i\rho(s+\mu-1)(\pi-\alpha)}}{\sin \pi \rho (s + \mu - 1) \Gamma\left(\mu_1 - \frac{\rho}{\rho_1} \mu + \frac{\rho}{\rho_1} (1-s)\right) \Gamma\left(\mu_2 - \frac{\rho}{\rho_2} \mu + \frac{\rho}{\rho_2} (1-s)\right)}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} H_{\rho_1, \rho_2}^{(-)}(s; \mu_1, \mu_2) &\equiv H_{\rho_1, \rho_2}^{(-)}(s) = \\ &= \pi^{-\frac{1}{2}} e^{\pm i \frac{\pi}{2} s} \Gamma\left(\mu_1 - \frac{\rho}{\rho_1} \mu + \frac{\rho}{\rho_1} s\right) \Gamma\left(\mu_2 - \frac{\rho}{\rho_2} \mu + \frac{\rho}{\rho_2} s\right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

На входящие в эти функции параметры  $\rho_1, \rho_2, \rho; \mu_1, \mu_2, \mu$  и  $\alpha$  с самого начала наложим следующие ограничения, которые впредь не будут особо оговариваться:

а)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}, \quad (2.3)$$

при этом

$$\frac{1}{2} \leq \rho_1 < +\infty, \quad \frac{1}{2} \leq \rho_2 < +\infty, \quad \rho > \frac{1}{2}; \quad (2.4)$$

б)

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 - \frac{1}{2}, \quad \mu_1 > 0, \quad \mu_2 > 0, \quad (2.5)$$

при этом

$$\mu_2 = \frac{1}{2}, \quad \text{когда } \rho_2 = +\infty; \quad (2.6)$$

в) для данного  $\rho > \frac{1}{2}$ 

$$\frac{\pi}{2\rho} \leq \alpha \leq 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}. \quad (2.7)$$

Таким образом, ввиду условия (2.6), в предельном случае  $\rho_2 = +\infty$  нужно рассматривать функции

$$\begin{aligned} K_\rho(s; \mu; \alpha) &\equiv K_\rho(s; \alpha) = K_{\rho, \infty}\left(s; \mu, \frac{1}{2}; \alpha\right) = \\ &= \frac{\pi \rho e^{i\rho(s+\mu-1)(\pi-\alpha)}}{\sin \pi \rho (s+\mu-1) \Gamma(1-s)}, \end{aligned} \quad (2.1')$$

где

$$\rho > \frac{1}{2}, \quad \frac{\pi}{2\rho} \leq \alpha \leq 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}, \quad (2.7')$$

и

$$H^{(\pm)}(s) \equiv H_{\rho, \infty}^{(\pm)}\left(s; \mu, \frac{1}{2}\right) = e^{\pm i \frac{\pi}{2} s} \Gamma(s). \quad (2.2')$$

В дальнейшем, употребляя обозначения  $K_{\rho_1, \rho_2}(s; \alpha)$  и  $H_{\rho_1, \rho_2}^{(\pm)}(s)$ , будем полагать, что в предельном случае  $\rho_2 = +\infty$  (и таким образом  $\rho_1 = \rho$ ) значения этих функций определяются согласно формулам (2.1') и (2.2') соответственно.

Лемма 1. а) Если параметр  $\mu$  удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}, \quad (2.8)$$

а в случае, когда  $\rho_2 = \mu_2 = 1$ , условию

$$\frac{1}{2} < \mu < +\infty, \quad (2.8')$$

то будем иметь

$$\sup_{-\infty < t < +\infty} \left| K_{\rho_1, \rho_2} \left( \frac{1}{2} + it; \alpha \right) \right| < +\infty; \quad (2.9)$$

б) если параметр  $\mu$  удовлетворяет условию

$$\mu < \frac{1}{2} + \min \left\{ \frac{\mu_1 \rho_1}{\rho}, \frac{\mu_2 \rho_2}{\rho} \right\}, \quad (2.10)$$

то будем иметь

$$\sup_{-\infty < t < +\infty} \left| H_{\rho_1, \rho_2}^{(\pm)} \left( \frac{1}{2} + it \right) \right| < +\infty. \quad (2.11)$$

Доказательство.

а) Нули  $s_k = 1 - \mu + \frac{k}{\rho}$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) функции  $\sin \pi \rho (s + \mu - 1)$ , вообще говоря, являются полюсами  $K_{\rho_1, \rho_2}(s; \alpha)$ . При условии (2.8) функция  $K_{\rho_1, \rho_2}(s; \alpha)$  не будет иметь полюсов на линии  $\text{Re } s = \frac{1}{2}$ . В случае же, когда  $\rho_2 = \mu_2 = 1$ , будем иметь

$$K_{\rho, 1}(s; \alpha) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \rho e^{i\rho(s+\mu-1)(\pi-\alpha)} \Gamma(\rho(s+\mu-1))}{\Gamma\left(\mu_1 - \frac{\rho}{\rho_1} \mu + \frac{\rho}{\rho_1} (1-s)\right)}, \quad (2.1')$$

откуда следует отсутствие полюсов на линии  $\text{Re } s = \frac{1}{2}$ , если соблюдается условие (2.8'). Поэтому достаточно лишь убедиться, что при  $|t| \rightarrow \infty$  функция  $K_{\rho_1, \rho_2}\left(\frac{1}{2} + it; \alpha\right)$  остается ограниченной.

С этой целью воспользуемся формулой Стирлинга

$$\begin{aligned} \log \Gamma(s) &= \left(s - \frac{1}{2}\right) \log s - s + \frac{1}{2} \log 2\pi - \\ &- \int_0^{\infty} \frac{\psi(t)}{(t+s)^2} dt + i2\pi m(s), \quad |\arg s| < \pi, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $-\frac{1}{2} \leq \psi(t) \leq 0$ , а  $m(s)$  — целое число.

Для любого фиксированного значения  $r \in (-\infty, +\infty)$  из (2.12) будем иметь

$$\log |\Gamma(r + it)| = \text{Re} \left\{ \left(r - \frac{1}{2} + it\right) \log \left(r - \frac{1}{2} + it\right) \right\} + O(1) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{2} \right) \log \left[ \left( r - \frac{1}{2} \right)^2 + t^2 \right] - \\
&- |t| \arg \left( r - \frac{1}{2} + it \right) + O(1), \quad |t| \rightarrow \infty.
\end{aligned} \quad (2.13)$$

Заметив теперь, что

$$\begin{aligned}
\left| \arg \left( r - \frac{1}{2} + it \right) \right| &= \arctg \frac{|t|}{r - \frac{1}{2}}, \quad r > \frac{1}{2}, \\
\left| \arg \left( r - \frac{1}{2} + it \right) \right| &= \pi - \arctg \frac{|t|}{\frac{1}{2} - r}, \quad r < \frac{1}{2}, \\
\frac{\pi}{2} - \frac{\left| r - \frac{1}{2} \right|}{|t|} &< \arctg \frac{|t|}{\left| r - \frac{1}{2} \right|} < \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

запишем асимптотическую формулу (2.13) в виде

$$|\Gamma(r + it)| = O(|t|^{r - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}|t|}) \quad |t| \rightarrow \infty. \quad (2.13')$$

Ввиду (2.13'), при  $s = \frac{1}{2} + it$ ,  $|t| \rightarrow \infty$ , будем иметь

$$\begin{aligned}
\left| \Gamma \left( \mu_1 - \frac{\rho}{\rho_1} \mu + \frac{\rho}{\rho_1} (1-s) \right) \right| &= \left| \Gamma \left( \mu_1 - \frac{\rho}{\rho_1} \mu + \frac{\rho}{\rho_1} s \right) \right| = \\
&= O \left( |t|^{\mu_1 - \frac{\rho}{\rho_1} \left( \mu - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} - \frac{\pi \rho}{2 \rho_1} |t|} \right),
\end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned}
\left| \Gamma \left( \mu_2 - \frac{\rho}{\rho_2} \mu + \frac{\rho}{\rho_2} (1-s) \right) \right| &= \left| \Gamma \left( \mu_2 - \frac{\rho}{\rho_2} \mu + \frac{\rho}{\rho_2} s \right) \right| = \\
&= O \left( |t|^{\mu_2 - \frac{\rho}{\rho_2} \left( \mu - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} - \frac{\pi \rho}{2 \rho_2} |t|} \right).
\end{aligned} \quad (2.15)$$

Кроме того, при  $s = \frac{1}{2} + it$

$$\begin{aligned}
|e^{i\pi(s + \mu - 1)(\pi - \alpha)}| &= e^{-\rho(\pi - \alpha)|t|}, \\
|\sin \pi \rho(s + \mu - 1)| &= O(e^{\pi \rho |t|}), \quad |t| \rightarrow \infty.
\end{aligned} \quad (2.16)$$

Из (2.1), (2.14), (2.15) и (2.16) ввиду обозначений (2.3) и (2.5) получим

$$\left| K_{p_1, p_2} \left( \frac{1}{2} + it; \alpha \right) \right| = O \left( e^{-\frac{\pi}{2} |t| - \pi p - p(\pi - \alpha)t} \right), \quad |t| \rightarrow \infty,$$

откуда, в силу условия (2.7), следует ограниченность функции  $K_{p_1, p_2} \left( \frac{1}{2} + it; \alpha \right)$  при  $|t| \rightarrow \infty$ , т. е. утверждение (2.9) леммы. Отметим, что из (2.16) и (2.1') следует справедливость утверждения (2.9) и в предельном случае, когда  $p_2 = +\infty$ .

б) Функция  $H_{p_1, p_2}^{(\pm)}(s)$  имеет полюсы в точках  $s_k^{(1)} = \mu - \frac{p_1 p_2}{p} - \frac{p_1}{p} k$ ,  $s_k^{(2)} = \mu - \frac{p_2 p_1}{p} - \frac{p_2}{p} k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), поэтому при выполнении условия (2.10) эти полюсы лежат слева от линии  $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ . Следовательно, при условии (2.10) достаточно лишь установить ограниченность функций  $H_{p_1, p_2}^{(\pm)}(s)$  на прямой  $s = \frac{1}{2} + it$  при  $|t| \rightarrow \infty$ .

Из (2.2), (2.14) и (2.15) имеем

$$\left| H_{p_1, p_2}^{(\pm)} \left( \frac{1}{2} + it \right) \right| = O \left( e^{-\frac{\pi}{2} (|t| \pm t)} \right) = O(1), \quad |t| \rightarrow \infty,$$

откуда и следует утверждение (2.11).

Отметим, наконец, что из (2.2') и (2.13') вытекает справедливость утверждения (2.10) и в предельном случае, когда  $p_2 = +\infty$ .

Функции  $K_{p_1, p_2}(s; \alpha)$  и  $H_{p_1, p_2}^{(\pm)}(s)$  удовлетворяют важным функциональным уравнениям.

Лемма 2. На всей плоскости комплексного переменного  $s$  справедливы тождества:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & e^{-i\frac{\pi}{2}(1-p)} K_{p_1, p_2} \left( s; \frac{\pi}{2p} \right) H_{p_1, p_2}^{(-)}(1-s) + \\ & + e^{i\frac{\pi}{2}(1-p)} K_{p_1, p_2} \left( s; 2\pi - \frac{\pi}{2p} \right) H_{p_1, p_2}^{(+)}(1-s) = 2\pi p; \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & e^{i\frac{\pi}{2}(1-p)} K_{p_1, p_2} \left( s; \frac{\pi}{2p} + \omega \right) H_{p_1, p_2}^{(+)}(1-s) + \\ & + e^{-i\frac{\pi}{2}(1-p)} K_{p_1, p_2} \left( s; \frac{3\pi}{2p} + \omega \right) H_{p_1, p_2}^{(-)}(1-s) = O \end{aligned} \quad (2.18)$$

для всех значений параметра  $\omega$  из отрезка  $\left[ 0, 2\pi \left( 1 - \frac{1}{p} \right) \right]$ , если  $p > 1$ .

Доказательство.

а) Из (2.1) и (2.2) имеем

$$K_{\rho_1, \rho_2} \left( s; \frac{\pi}{2\rho} \right) H_{\rho_1, \rho_2}^{(-)}(1-s) = - \frac{i\pi\rho e^{i\pi\rho(s+\mu-1)} e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{\sin \pi\rho(s+\mu-1)},$$

$$K_{\rho_1, \rho_2} \left( s; 2\pi - \frac{\pi}{2\rho} \right) H_{\rho_1, \rho_2}^{(+)}(1-s) = \frac{i\pi\rho e^{-i\pi\rho(s+\mu-1)} e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{\sin \pi\rho(s+\mu-1)},$$

откуда и вытекает тождество (2.17).

б) Из (2.1) и (2.2) имеем

$$K_{\rho_1, \rho_2}(s; \alpha) H_{\rho_1, \rho_2}^{(+)}(1-s) = \frac{\pi\rho e^{i\rho(s+\mu-1)(\pi-\alpha)} e^{i\frac{\pi}{2}(1-s)}}{\sin \pi\rho(s+\mu-1)},$$

$$K_{\rho_1, \rho_2} \left( s; \alpha + \frac{\pi}{\rho} \right) H_{\rho_1, \rho_2}^{(-)}(1-s) = - \frac{\pi\rho e^{i\rho(s+\mu-1)(\pi-\alpha)} e^{i\frac{\pi}{2}(1-s) - i\pi(\mu-1)}}{\sin \pi\rho(s+\mu-1)}$$

и, заменив в этих равенствах  $\alpha$  через  $\frac{\pi}{2\rho} + \omega$ , приходим к требуемому тождеству (2.18). Отметим, наконец, что если  $0 \leq \omega \leq 2\pi \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)$ , то значения  $\frac{\pi}{2\rho} + \omega$  и  $\frac{3\pi}{2\rho} + \omega$  не выходят из промежутка  $\left[ \frac{\pi}{2\rho}, 2\pi - \frac{\pi}{2\rho} \right]$ .

Следует указать на то, что в специальном случае, когда  $\rho = \frac{1}{2}$  и в силу (2.7) параметр  $\alpha$  имеет единственное значение  $\alpha = \pi$ , тождество (2.17) принимает более простой вид

$$K_{\rho_1, \rho_2}(s; \pi) H_{\rho_1, \rho_2}(1-s) = \pi, \quad (2.19)$$

где

$$H_{\rho_1, \rho_2}(s) = e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} H_{\rho_1, \rho_2}^{(-)}(s) + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} H_{\rho_1, \rho_2}^{(+)}(s) =$$

$$= 2\pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\mu_1 - \frac{\mu}{2\rho_1} + \frac{s}{2\rho_1}\right) \Gamma\left(\mu_2 - \frac{\mu}{2\rho_2} + \frac{s}{2\rho_2}\right) \sin \frac{\pi}{2}(\mu - s);$$

при этом  $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = 2$ .

В частности, если  $\rho_1 = \rho_2 = \mu_2 = 1$ , то  $\rho = \frac{1}{2}$ ,  $\mu = \mu_1 + \frac{1}{2}$  и, как

легко видеть,

$$K_{1,1}(s; \pi) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\mu_1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{s}{2}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{\mu_1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{s}{2}\right)},$$

$$H_{1,1}(s) = 2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu_1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu_1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{s}{2}\right)}. \quad (2.20)$$

Отсюда в качестве дополнения к лемме 1 вытекает, что при условии  $0 < \mu_1 < +\infty$  (т. е.  $\frac{1}{2} < \mu < +\infty$ ) одновременно имеем

$$\sup_{-\infty < t < +\infty} \left| K_{1,1}\left(\frac{1}{2} + it; \pi\right) \right| < +\infty, \quad (2.9')$$

$$\sup_{-\infty < t < +\infty} \left| H_{1,1}\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| < +\infty. \quad (2.11')$$

2°. Из результата леммы 1 и из ее дополнения, о котором говорилось выше, следует, что при условии

$$\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \min \left\{ \frac{1}{\rho}, \frac{\mu_1 \rho_1}{\rho}, \frac{\mu_2 \rho_2}{\rho} \right\}$$

одновременно будем иметь

$$\frac{K_{\rho_1, \rho_2}(s; \alpha)}{1-s} \quad \text{и} \quad \frac{H_{\rho_1, \rho_2}^{(\pm)}(s)}{1-s} \in L_2\left(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty\right);$$

в случае же, когда  $\rho_1 = \rho_2 = \mu_2 = 1$ , лишь при условии

$$0 < \mu_1 < +\infty$$

будем иметь

$$\frac{K_{1,1}(s; \pi)}{1-s} \quad \text{и} \quad \frac{H_{1,1}(s)}{1-s} \in L_2\left(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty\right).$$

Отсюда по теории преобразований Меллина в классах  $L_2$  приходим к следующему заключению, которое мы сформулируем в качестве отдельной леммы.

Лемма 3.

а) При условии

$$\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \min \left\{ \frac{1}{\rho}, \frac{\mu_1 \rho_1}{\rho}, \frac{\mu_2 \rho_2}{\rho} \right\} \quad (2.21)$$

существуют пределы в среднем

$$\frac{k_{\rho_1, \rho_2}(x; \alpha)}{x} = \frac{1}{2\pi i} \text{l.i.m.}_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{2}-i\alpha}^{\frac{1}{2}+i\alpha} \frac{K_{\rho_1, \rho_2}(s; \alpha)}{\sqrt{2\pi\rho}(1-s)} x^{-s} ds \in L_2(0, +\infty), \quad (2.22)$$

$$\frac{h_{\rho_1, \rho_2}^{(\pm)}(x)}{x} = \frac{1}{2\pi i} \text{l.i.m.}_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{2}-i\alpha}^{\frac{1}{2}+i\alpha} \frac{H_{\rho_1, \rho_2}^{(\pm)}(s)}{\sqrt{2\pi\rho}(1-s)} x^{-s} ds \in L_2(0, +\infty). \quad (2.23)$$

б) Если  $\rho_1 = \rho_2 = \mu_2 = 1$ , то при условии

$$0 < \mu_1 < +\infty \quad (2.21')$$

существуют пределы в среднем

$$\frac{k(x; \mu_1)}{x} = \frac{1}{2\pi i} \text{l.i.m.}_{a \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} \frac{K_{1,1}(s; \pi)}{V \pi (1-s)} x^{-s} ds \in L_2(0, +\infty), \quad (2.22')$$

$$\frac{h(x; \mu_1)}{x} = \frac{1}{2\pi i} \text{l.i.m.}_{a \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} \frac{H_{1,1}(s)}{V \pi (1-s)} x^{-s} ds \in L_2(0, +\infty). \quad (2.23')$$

Лемма 4.

а) При условии (2.21)

$$\begin{aligned} k_{\rho_1, \rho_2}(x; \alpha) &= \frac{1}{V 2\rho} \int_0^x \Phi_{\rho_1, \rho_2}(e^{i\alpha} t^{\frac{1}{\rho}}; \mu_1, \mu_2) t^{\alpha-1} dt = \\ &= \frac{1}{V 2\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{i\alpha} x^{\frac{1}{\rho}})^k x^{\mu}}{\Gamma(\mu_1 + k\rho_1^{-1}) \Gamma(\mu_2 + k\rho_2^{-1}) (\mu + k\rho^{-1})} \end{aligned} \quad (2.24)$$

для всех  $\alpha \in \left[ \frac{\pi}{2\rho}, 2\pi - \frac{\pi}{2\rho} \right]$ .

б) При условии (2.21')

$$\begin{aligned} k(x; \mu_1) &= \int_0^x J_{\mu_1-1}(2t) t^{\frac{1}{2}} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{\frac{2k+\mu_1+\frac{1}{2}}{2}}}{\Gamma(1+k) \Gamma(\mu_1+k) \left( \mu_1 + \frac{1}{2} + 2k \right)}. \end{aligned} \quad (2.24')$$

Доказательство. Функция

$$K_{\rho_1, \rho_2}(1-s; \alpha) = \frac{\pi^{\frac{\alpha}{2}} \rho e^{i\rho(\mu-s)(\pi-\alpha)}}{\sin \pi\rho (\mu-s) \Gamma\left(\mu_1 - \frac{\rho}{\rho_1} \mu + \frac{\rho}{\rho_1} s\right) \Gamma\left(\mu_2 - \frac{\rho}{\rho_2} \mu + \frac{\rho}{\rho_2} s\right)} \quad (2.25)$$

мероморфна, все ее полюсы просты и принадлежат\* последовательности

\* Некоторое подмножество из последовательности  $\{s_k\}$  может являться устраняемыми особыми точками функции  $K_{\rho_1, \rho_2}(1-s; \alpha)$ . Это будет иметь место во всех тех точках  $s_k$ , где хотя одно из выражений

$$\mu_1 - \frac{\rho}{\rho_1} \mu + \frac{\rho}{\rho_1} s_k \quad \text{или} \quad \mu_2 - \frac{\rho}{\rho_2} \mu + \frac{\rho}{\rho_2} s_k$$

равняется нулю или отрицательному целому числу.

$$s_k = \mu + \frac{k}{\rho} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Далее, так как по условию (2.21), в частности, имеем

$$\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho},$$

то на прямой  $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$  функция  $K_{\rho_1, \rho_2}(1-s; \alpha)$  не имеет полюсов, а в полуплоскости  $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$  ее полюсы могут лежать лишь на последовательности

$$s_k = \mu + \frac{k}{\rho} \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Наконец, заметим, что по (2.25)

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=s_k} \frac{K_{\rho_1, \rho_2}(1-s; \alpha)}{s} x^{s-1} &= \\ &= -\sqrt{\pi} \frac{(e^{i\alpha} x^{\frac{1}{\rho}})^k x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu_1 + k\rho_1^{-1}) \Gamma(\mu_2 + k\rho_2^{-1}) (\mu + k\rho^{-1})} \quad (k=0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Пусть

$$R_n = \mu + \left(n + \frac{1}{2}\right) \rho^{-1} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

и  $L_n$  означает контур области  $D_n$ , являющийся пересечением круга  $|s| < R_n$  с полуплоскостью. Функция

$$\frac{K_{\rho_1, \rho_2}(1-s; \alpha)}{s} x^{s-1}$$

голоморфна в области  $D_n$  кроме точек  $s_k = \mu + k\rho^{-1}$  ( $k=0, 1, 2, \dots, n$ ), где она может иметь простые полюсы с вычетами, которые даются формулами (2.26). Поэтому для  $x \in (0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_n} \frac{K_{\rho_1, \rho_2}(1-s; \alpha)}{s} x^{s-1} ds &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\rho}} \sum_{k=0}^n \frac{(e^{i\alpha} x^{\frac{1}{\rho}})^k x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu_1 + k\rho_1^{-1}) \Gamma(\mu_2 + k\rho_2^{-1}) (\mu + k\rho^{-1})} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\rho} x} \int_0^x \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{(e^{i\alpha} t^{\frac{1}{\rho}})^k}{\Gamma(\mu_1 + k\rho_1^{-1}) \Gamma(\mu_2 + k\rho_2^{-1})} \right\} t^{\mu-1} dt. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Пусть  $\frac{1}{2} \pm iR_n^*$  — точки пересечения окружности  $|s| = R_n$  с прямой  $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ ; так как  $R_n^* = \sqrt{R_n^2 - \frac{1}{4}}$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^* = +\infty$ .

Напишем формулу (2.27) в развернутом виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - iR_n^*}^{\frac{1}{2} + iR_n^*} \frac{K_{\rho_1, \rho_2}(1-s; \alpha)}{\sqrt{2\pi\rho} s} x^{s-1} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - iR_n^*}^{\frac{1}{2} + iR_n^*} \frac{K_{\rho_1, \rho_2}(s; \alpha)}{\sqrt{2\pi\rho}(1-s)} x^{-s} ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho} x} \int_0^x \left( \sum_{k=0}^n \frac{(e^{i\alpha} t^{\frac{1}{\rho}})^k}{\Gamma(\mu_1 + k\rho_1^{-1}) \Gamma(\mu_2 + k\rho_2^{-1})} \right) t^{\mu-1} dt + Y_n(x), \quad (2.27')$$

где

$$Y_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|s|=R_n^* \\ \operatorname{Re} s > \frac{1}{2}}} \frac{K_{\rho_1, \rho_2}(1-s; \alpha)}{\sqrt{2\pi\rho} s} x^{s-1} ds, \quad x \in (0, +\infty). \quad (2.28)$$

Займемся теперь оценкой функции  $Y_n(x)$ . С этой целью заметим сначала, что из формулы Стирлинга (2.12) следует, что для любого  $a \in (-\infty, +\infty)$  при  $R \rightarrow \infty$

$$|\Gamma(a + Re^{i\varphi})| = O(R^{R \cos \varphi + a - \frac{1}{2}} e^{-R(\varphi \sin \varphi + \cos \varphi)}), \quad |\varphi| < \frac{\pi}{2}; \quad (2.29)$$

при этом порядок правой части равномерен относительно всех значений  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ . Далее, справедлива следующая оценка

при  $s = R_n e^{i\varphi}$ ,  $n \geq n_0$

$$\left| \frac{e^{i\varphi(\mu-s)(\pi-\alpha)}}{\sin \pi\rho(\mu-s)} \right| <$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} \exp\{\rho R_n [(\pi-\alpha) \sin \varphi - \pi |\sin \varphi|]\}, & \text{если } \frac{\pi}{4} < |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2} \exp\{\rho R_n (\pi-\alpha) \sin \varphi\}, & \text{если } |\varphi| < \frac{\pi}{4}. \end{cases} \quad (2.30)$$

Из (2.29) ввиду (2.3) и (2.5) следует, что если  $s = R_n e^{i\varphi}$ , то при  $n \rightarrow \infty$

$$\left| \Gamma\left(\mu_1 - \frac{\rho}{\rho_1} \mu + \frac{\rho}{\rho_1} s\right) \Gamma\left(\mu_2 - \frac{\rho}{\rho_2} \mu + \frac{\rho}{\rho_2} s\right) \right|^{-1} =$$

$$= O(R_n^{-R_n \cos \varphi + \frac{1}{2}} e^{R_n(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi)}), \quad |\varphi| < \frac{\pi}{2}. \quad (2.31)$$

Из оценок (2.30) и (2.31) вытекает, что при  $s = R_n e^{i\varphi}$ ,

$$\frac{\pi}{4} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad n \geq n_0$$

$$|K_{\rho_1, \rho_2}(1-s; x)| \leq m_1 R_n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{e}{R_n}\right)^{R_n \cos \varphi} e^{-\left(\rho_2 - \frac{\pi}{2}\right) \sin \varphi},$$

а при

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < -\frac{\pi}{4}$$

$$|K_{\rho_1, \rho_2}(1-s; x)| \leq m_2 R_n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{e}{R_n}\right)^{R_n \cos \varphi} e^{-\left[\rho(2\pi - \pi) - \frac{\pi}{2}\right] \sin \varphi},$$

где  $m_j (j=1, 2, \dots)$  — постоянные, не зависящие от  $n \geq n_0$ . Но ввиду того, что  $\frac{\pi}{2\sigma} < \alpha < 2\pi - \frac{\pi}{2\sigma}$ , из этих оценок следует, что при

$$s = R_n e^{i\varphi}, \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad n \geq n_0$$

$$|K_{\rho_1, \rho_2}(1-s; x)| \leq m_3 R_n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{e}{R_n}\right)^{R_n \cos \varphi}. \quad (2.32)$$

Из оценки (2.31) и из второй оценки (2.30) при  $s = R_n e^{i\varphi}$ ,  $0 \leq |\varphi| \leq \frac{\pi}{4}$ ,  $n \geq n_0$  получим

$$|K_{\rho_1, \rho_2}(1-s; x)| \leq m_4 R_n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m_5 e}{R_n}\right)^{R_n \cos \varphi}. \quad (2.32')$$

Выберем  $n \geq n_1 \geq n_0$  настолько большим, чтобы при фиксированном  $x > 0$  имели

$$\max \left\{ \frac{ex}{R_n}, \frac{m_5 ex}{R_n} \right\} < e^{-1},$$

тогда из оценок (2.32) и (2.32') получим

$$|K_{\rho_1, \rho_2}(1-s; x) x^s| \leq m_6 R_n^{\frac{1}{2}} e^{-R_n \cos \varphi} \quad (2.33)$$

при  $s = R_n e^{i\varphi}$ ,  $n \geq n_1$ ,  $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$ .

Наконец, из (2.28) и из оценки (2.33) получим

$$|Y_n(x)| \leq m_7 R_n^{\frac{1}{2}} x^{-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R_n \cos \varphi} d\varphi < \frac{m_8}{x R_n^{1/2}} \quad (n \geq n_1).$$

откуда следует равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(x) = 0, \quad x \in (0, +\infty). \quad (2.34)$$

В тождестве (2.27') переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , ввиду (2.34) будем иметь

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - iR_n^*}^{\frac{1}{2} + iR_n^*} \frac{K_{\rho_1, \rho_2}(s; \alpha)}{V_{2\rho}(1-s)} x^{-s} ds = \\ & = \frac{1}{V_{2\rho} x} \int_0^x \Phi_{\rho_1, \rho_2}(e^{it} t^{\frac{1}{\rho}}; \mu_1, \mu_2) t^{\mu-1} dt, \quad x \in (0, +\infty). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Покажем теперь, что равенство (2.35) сохраняется, если в его левой части числа  $R_n^*$  могут быть заменены любыми числами  $a_n$ , удовлетворяющими условию

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

Положим, что  $\{a_n\}$  такая последовательность, а числа  $k_n$  определены так, чтобы

$$R_{k_n}^* \leq a_n < R_{k_n+1}^*, \quad n \geq 1.$$

Обозначив

$$V(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - ia}^{\frac{1}{2} + ia} \frac{K_{\rho_1, \rho_2}(1-s; \alpha)}{s} x^{-s} ds,$$

по лемме 1 имеем

$$|V(a) - V(R_{k_n}^*)| \leq \frac{m_s}{Vx} \int_{a_n}^{R_{k_n+1}^*} \frac{dt}{\left|\frac{1}{2} + it\right|} \leq \frac{m_s}{Vx} \frac{R_{k_n+1}^* - R_{k_n}^*}{a_n}. \quad (2.36)$$

Но  $R_n^* = \sqrt{R_n^2 - \frac{1}{4}}$  и  $R_n = n + \left(n + \frac{1}{2}\right)\rho^{-1}$ . Поэтому  $R_{n+1}^* - R_n^* = O(1)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Ввиду этого, переходя к пределу в (2.36) при  $n \rightarrow \infty$ , из (2.35) получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - i\infty}^{\frac{1}{2} + i\infty} \frac{K_{\rho_1, \rho_2}(s; \alpha)}{V_{2\rho}(1-s)} x^{-s} ds = \frac{1}{V_{2\rho} x_0} \int_0^x \Phi_{\rho_1, \rho_2}(e^{it} t^{\frac{1}{\rho}}; \mu_1, \mu_2) t^{\mu-1} dt,$$

откуда и из определения (2.22) функции  $k_{\rho_1, \rho_2}(x; \alpha)$  следует формула (2.24). При этом попутно было доказано, что интеграл (2.22) сходится не только в среднем, но и в обычном смысле.

б) Что касается формулы (2.24'), то она следует из (2.24) при  $\rho_1 = \rho_2 = \mu = 1$ , если учесть соотношение (1.12) и то обстоятельство, что для справедливости оценок (2.9') и (2.11') достаточно лишь выполнение условия (2.21').

3. Приведем теперь несколько вспомогательных лемм, которые позволят нам установить для функций  $h_{\rho_1, \rho_2}^{(\pm)}(x)$  результат, аналогичный лемме 4.

Обозначим

$$\Psi_j(s) = \sin \pi \left( \mu_j - \frac{\rho_j}{\rho} \mu + \frac{\rho_j}{\rho} (1-s) \right) \quad (j=1, 2), \quad (2.37)$$

$$r_k^{(j)} = 1 - \mu + \frac{\mu_j \rho_j}{\rho} + \frac{\rho_j}{\rho} k \quad (j=1, 2; k=0, 1, 2, \dots).$$

При условии

$$\mu < \frac{1}{2} - \min \left\{ \frac{\mu_1 \rho_1}{\rho}, \frac{\mu_2 \rho_2}{\rho} \right\}, \quad (2.10)$$

очевидно, имеем

$$\frac{1}{2} < r_k^{(j)} < r_{k+1}^{(j)} \quad (j=1, 2; k=0, 1, 2, \dots), \quad (2.38)$$

поэтому функция  $\Psi_j(s)$  в полуплоскости  $\operatorname{Re} s \geq \frac{1}{2}$  обращается в нуль лишь в точках последовательности  $\{r_k^{(j)}\} (k=0, 1, 2, \dots)$ .

Полагая, что  $0 < \tau_k^{(1)} < \tau_k^{(2)} < 1$ , обозначим, наконец,

$$R_k^{(j)} = r_k^{(j)} + \frac{\rho_j}{\rho} \tau_k^{(j)}. \quad (2.39)$$

Лемма 5. Пусть

$$0 < \tau_1^{(j)} \leq \tau_k^{(j)} \leq \tau_2^{(j)} < 1 \quad (j=1, 2; k=0, 1, 2, \dots); \quad (2.40)$$

тогда при  $k \geq k_0$  справедливы оценки

$$|\Psi_j(R_k^{(j)} e^{i\varphi})| \geq \begin{cases} \frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{\pi \rho_j}{\rho} R_k^{(j)} |\sin \varphi| \right\}, & \text{если } \frac{\pi}{4} \leq |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}, \\ \min \{ |\sin \pi \tau_1^{(j)}|, |\sin \pi \tau_2^{(j)}| \}, & \text{если } 0 \leq |\varphi| \leq \frac{\pi}{4}, \end{cases} \quad (2.41)$$

для  $j=1, 2$ .

Доказательство. Из (2.37) имеем

$$4|\Psi_j(R e^{i\varphi})|^2 = e^{\frac{2\pi \rho_j}{\rho} R \sin \varphi} + e^{-\frac{2\pi \rho_j}{\rho} R \sin \varphi} - 2 \cos 2\pi \left( \frac{\rho_j}{\rho} R \cos \varphi + \frac{\rho_j}{\rho} (\mu - 1) - \mu_j \right) = f_j(\varphi; R). \quad (2.42)$$

Отсюда следует, что если  $k \geq k_0$  и  $\frac{\pi}{4} \leq |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$ , то

$$f_j(\varphi; R_k^{(j)}) \geq \frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{2\pi\rho}{\rho_j} R_k^{(j)} |\sin \varphi| \right\},$$

т. е. первая из оценок (2.41). Для установления второй из оценок (2.41) нужно заметить, что  $f_j(\varphi; R)$  — четная функция от

$\varphi \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ . Поэтому достаточно оценить снизу функцию  $f_j(\varphi; R)$

на отрезке  $\left[ 0, \frac{\pi}{4} \right]$ . Имеем

$$\begin{aligned} f_j(\varphi; R) &= \frac{4\pi\rho}{\rho_j} R \left\{ \cos \varphi \operatorname{sh} \left( \frac{2\pi\rho}{\rho_j} R \sin \varphi \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sin \varphi \sin 2\pi \left( \frac{\rho}{\rho_j} R \cos \varphi + \frac{\rho}{\rho_j} (u-1) - u_j \right) \right\} > \\ &> \frac{4\pi\rho}{\rho_j} R \sin \varphi \left\{ \frac{2\pi\rho}{\rho_j} R \cos \varphi - 1 \right\}, \end{aligned}$$

откуда следует, что при  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ , если  $k \geq k_0$  достаточно велико,

$f_j(\varphi; R_k^{(j)}) \geq 0$ . Поэтому в силу четности функции  $f_j(\varphi; R)$  для  $|\varphi| \leq \frac{\pi}{4}$  будем иметь

$$f_j(\varphi; R_k^{(j)}) \geq f_j(0; R_k^{(j)}) = 4 \sin^2 \pi \left( u_j - \frac{\rho u}{\rho_j} + \frac{\rho}{\rho_j} (1 - R_k^{(j)}) \right), \quad k \geq k_0$$

или ввиду (2.37) и (2.39)

$$f_j(\varphi; R_k^{(j)}) \geq 4 \sin^2 \pi \tau_k^{(j)}, \quad (j = 1, 2; k \geq k_0).$$

Вторая из оценок следует отсюда ввиду условия (2.40).

Лемма 6. При условии (2.10) последовательность чисел

$$\frac{1}{2} < R_1 < R_2 < \dots < R_k < \dots; \quad \lim R_k = +\infty$$

можно выбрать таким образом, чтобы имели место оценки

$$|H_{\rho_1, \rho_2}^{(\pm)}(1 - R_k e^{i\varphi})| < C_1 \sqrt{R_k} \left( \frac{C_2}{R_k} \right)^{R_k \cos \varphi}, \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{2} \quad (k \geq k_0), \quad (2.43)$$

где  $C_1, C_2 \gg 1$  — постоянные, не зависящие от  $k$ .

Доказательство. Из (2.2), воспользовавшись формулой дополнения и обозначениями (2.37), напомним функцию  $H_{\rho_1, \rho_2}^{(\pm)}(1-s)$  в виде

$$H_{\rho_1, \rho_2}^{(\pm)}(1-s) = \frac{\Psi_3^{(\pm)}(s)}{\Psi_1(s) \Psi_2(s)}, \quad (2.44)$$

где

$$\Psi_3^{(\pm)}(s) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}} e^{\pm i \frac{\pi}{2} (1-s)}}{\Gamma\left(1-\mu_1 + \frac{\rho}{\rho_1} \mu - \frac{\rho}{\rho_1} (1-s)\right) \Gamma\left(1-\mu_2 + \frac{\rho}{\rho_2} \mu - \frac{\rho}{\rho_2} (1-s)\right)}. \quad (2.45)$$

Что касается функций  $\Psi_3^{(\pm)}(s)$ , то они легко оцениваются сверху на дугах  $|s|=R$ ,  $|\arg s| \leq \frac{\pi}{2}$  при помощи формулы Стирлинга (2.29).

Для  $s = Re^{i\varphi}$  имеем

$$\begin{aligned} & \left| \Gamma\left(1-\mu_j + \frac{\rho}{\rho_j} \mu - \frac{\rho}{\rho_j} (1-s)\right) \right| = \\ & = O \left\{ \left( \frac{\rho}{\rho_j} R \right)^{\frac{\rho}{\rho_j} \cos \varphi - \mu_j + \frac{\rho}{\rho_j} \mu - \frac{\rho}{\rho_j} + \frac{1}{2}} e^{-\frac{\rho R}{\rho_j} (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi)} \right\}, \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}, \quad (j=1, 2), \end{aligned}$$

откуда, полагая  $\rho_2 < +\infty$ , для  $s = Re^{i\varphi}$  получим

$$\begin{aligned} & \left| \Gamma\left(1-\mu_1 + \frac{\rho}{\rho_1} \mu - \frac{\rho}{\rho_1} (1-s)\right) \Gamma\left(1-\mu_2 + \frac{\rho}{\rho_2} \mu - \frac{\rho}{\rho_2} (1-s)\right) \right| > \\ & > A_1 (qR)^{R \cos \varphi - \frac{1}{2}} e^{-R(\varphi \sin \varphi + \cos \varphi)}, \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}, \quad (2.46) \end{aligned}$$

где  $A_1 > 0$  не зависит от  $R$  и  $\varphi$ , а

$$q = q(\rho_1, \rho_2) = \min \left( \frac{\rho}{\rho_1}, \frac{\rho}{\rho_2} \right), \quad 0 < q \leq 1.$$

Из (2.45) и (2.46) для  $s = Re^{i\varphi}$  ( $R > 1$ ) будем иметь

$$|\Psi_3^{(\pm)}(s)| \leq A_2 \sqrt{R} \left( \frac{e}{qR} \right)^{R \cos \varphi} e^{R \left( \varphi \pm \frac{\pi}{2} \right) \sin \varphi}, \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}, \quad (2.47)$$

где  $A_2 > 0$  не зависит от  $R$  и  $\varphi$ .

В лемме 5 мы получили оценки снизу для функций  $\Psi_1'(s)$  и  $\Psi_2(s)$  на последовательностях полуокружностей

$$|s| = R_k^{(1)}, \quad |\arg s| \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad |s| = R_k^{(2)}, \quad |\arg s| \leq \frac{\pi}{2} \quad (k > k_0)$$

соответственно.

Покажем теперь, что последовательность чисел  $\frac{1}{2} < R_1 < R_2 < \dots < R_k < \dots$ ;  $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = +\infty$  можно выбрать таким образом, чтобы

оценки (2.41) были справедливы на полуокружностях  $|s| = R_k$ ,  $|\arg s| \leq \frac{\pi}{2}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), иначе говоря, чтобы имели место оценки

$$|\Psi_j(R_k e^{i\varphi})| \geq \begin{cases} \frac{1}{2} \exp\left\{\frac{\pi \rho}{\rho_1} R_k |\sin \varphi|\right\}, & \text{если } \frac{\pi}{4} \leq |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}, \\ A_3(\rho_1, \rho_2), & \text{если } |\varphi| \leq \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (2.41')$$

для  $j = 1, 2$  и  $k \geq k_0$ , где  $A_3 > 0$  не зависит от  $k \geq k_0$  и  $\varphi$ .

С этой целью различим два случая.

*Случай  $\rho_1 \neq \rho_2 < +\infty$ .* По известной теореме П. Л. Чебышева [4], если  $\alpha > 0$  и  $\beta$  — любые вещественные числа, то существует бесчисленное множество целых значений  $x$  и  $y$ , для которых

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{3}{|x|}.$$

Полагая, что  $\rho_2 < \rho_1$  и

$$\alpha = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \beta = \frac{\rho_1 \rho_1 - \rho_2 \rho_2}{\rho_1}$$

заключаем, что существуют последовательности целых чисел

$$\begin{aligned} n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots; \quad \lim n_k = +\infty, \\ m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots; \quad \lim m_k = +\infty, \end{aligned}$$

для которых

$$\left| \frac{\rho_2}{\rho} n_k + \frac{\rho_2 \rho_2}{\rho} - \frac{\rho_1}{\rho} m_k - \frac{\rho_1 \rho_1}{\rho} \right| < \frac{3\rho_1}{\rho n_k} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Отсюда, ввиду (2.37), получим

$$\left| r_{m_k}^{(1)} - r_{n_k}^{(2)} \right| < \frac{3\rho_1}{\rho n_k} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2.48)$$

Обозначим

$$\gamma_k = \frac{\rho}{\rho_2} (r_{m_k}^{(1)} - r_{n_k}^{(2)}) + \frac{1}{2}; \quad (2.49)$$

тогда, выбирая  $k_0 \geq 1$  из условия

$$\frac{3\rho_1}{\rho n_k} < \frac{\rho_2}{4\rho}, \quad k \geq k_0,$$

ввиду (2.48) будем иметь

$$\frac{1}{4} < \gamma_k < \frac{3}{4}, \quad k \geq k_0.$$

Имея в виду (2.49), обозначим

$$R_k = r_{m_k}^{(1)} + \frac{\rho_2}{2\rho} = r_{n_k}^{(2)} + \frac{\rho_2}{\rho} \gamma_k \quad (k \geq k_0);$$

тогда, одновременно используя обозначения (2.39), будем иметь

$$R_k = R_{m_k}^{(1)} = r_{m_k}^{(1)} + \frac{\rho_1}{\rho} \tau_{m_k}^{(1)}, \quad \text{где } \tau_{m_k}^{(1)} = \frac{\rho_2}{2\rho_1}, \quad (k \geq k_0) \quad (2.50)$$

$$R_k = R_{n_k}^{(2)} = r_{n_k}^{(2)} + \frac{\rho_2}{\rho} \tau_{n_k}^{(2)}, \quad \text{где } \tau_{n_k}^{(2)} = \gamma_k.$$

при этом

$$0 < \frac{\rho_2}{4\rho_1} < \tau_{m_k}^{(1)} = \frac{\rho_2}{2\rho_1} < 1, \quad \frac{1}{4} < \tau_{n_k}^{(2)} < \frac{3}{4} \quad (k \geq k_0). \quad (2.50')$$

Из (2.50), (2.50') и из оценок (2.41) леммы 5 следуют требуемые оценки (2.41').

Наконец, из формулы (2.44) и из оценок (2.47) и (2.41'), будем иметь

$$\begin{aligned} & |H_{\rho_1, \rho_2}^{(+)}(1 - R_k e^{i\varphi})| \leq \\ & \leq \begin{cases} A_4 \sqrt{R_k} \left(\frac{e}{qR_k}\right)^{R_k \cos \varphi} \exp \left\{ R_k \left( \varphi \sin \varphi \pm \frac{\pi}{2} \sin \varphi - \pi |\sin \varphi| \right) \right\}, \\ \quad \frac{\pi}{4} < |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \quad (k \geq k_0) \\ A_5 \sqrt{R_k} \left(\frac{e}{qR_k}\right)^{R_k \cos \varphi} \exp \left\{ R_k \left( \varphi \pm \frac{\pi}{2} \right) \sin \varphi \right\}, \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases} \quad (2.51) \end{aligned}$$

В заключение, заметив, что

$$\exp \left\{ R_k \left( \varphi \sin \varphi \pm \frac{\pi}{2} \sin \varphi - \pi |\sin \varphi| \right) \right\} \leq 1, \quad \frac{\pi}{4} < |\varphi| < \frac{\pi}{2},$$

$$\exp \left\{ R_k \left( \varphi \pm \frac{\pi}{2} \right) \sin \varphi \right\} \leq \exp \left\{ \frac{3\pi}{4} R_k \cos \varphi \right\}, \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{4},$$

из (2.51) приходим к утверждению (2.43) леммы.

*Случай  $\rho_1 = \rho_2$ .* В этом случае  $\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{\rho_2}{\rho} = 2$  и нули функций  $\Psi_j(s)$  ( $j = 1, 2$ ), лежащие в полуплоскости  $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ , соответственно запишутся формулами

$$r_k^{(1)} = \frac{3}{2} + \nu_1 - \nu_2 + 2k, \quad r_k^{(2)} = \frac{3}{2} + \nu_2 - \nu_1 + 2k \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.52)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае условие (2.10) примет вид

$$\mu_1 + \mu_2 < 1 + \min\{2\mu_1, 2\mu_2\},$$

откуда следует, что

$$|\mu_1 - \mu_2| < 1. \quad (2.53)$$

Из (2.52) получим, что при

$$\mu_2 = \mu_1$$

$$r_k = r_k^{(1)} = r_k^{(2)} = \frac{3}{2} + 2k \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (2.54)$$

а при  $\mu_2 \neq \mu_1$ , в силу (2.53), будем иметь

$$r_{k_1}^{(1)} \neq r_{k_2}^{(2)} \quad (k_1, k_2 = 0, 1, 2, \dots).$$

Исходя из этого, требуемую в лемме последовательность чисел  $\{R_k\}$  мы выберем следующим образом:

а) если  $\mu_2 = \mu_1$

$$R_k = r_k + 1 = r_k^{(1)} + \frac{\rho_1}{\rho} \cdot \frac{1}{2} = r_k^{(2)} + \frac{\rho_2}{\rho} \cdot \frac{1}{2};$$

б) если  $\mu_2 > \mu_1$

$$R_k = r_k^{(1)} + (\mu_2 - \mu_1) = \begin{cases} r_k^{(1)} + \frac{\rho_1}{\rho} \frac{\mu_2 - \mu_1}{2}, \\ r_{k-1}^{(2)} + \frac{\rho_2}{\rho} \frac{2 - (\mu_2 - \mu_1)}{2}; \end{cases}$$

в) если  $\mu_2 < \mu_1$

$$R_k = r_{k-1}^{(1)} + [2 - (\mu_1 - \mu_2)] = \begin{cases} r_{k-1}^{(1)} + \frac{\rho_1}{\rho} \frac{2 - (\mu_1 - \mu_2)}{2}, \\ r_k^{(2)} + \frac{\rho_2}{\rho} \frac{\mu_1 - \mu_2}{2}. \end{cases}$$

В каждом из указанных случаев а), б) и в) из оценки (2.41) леммы 5 получим

$$|\Psi_j(R_k e^{i\varphi})| \geq \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2}} \exp\left\{\frac{1}{2} \pi R_k |\sin \varphi|\right\}, & \frac{\pi}{4} < |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \\ A_0(\mu_1, \mu_2), & |\varphi| \leq \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad k \geq k_0$$

для  $j=1, 2$ , откуда, как и выше, приходим к оценке (2.43).

Лемма доказана в предположении, что  $\rho_2 < +\infty$ . Но при  $\rho_2 = +\infty$ , согласно формуле (2.2'), будем иметь

$$\begin{aligned} H^{(\pm)}(1-s) &= H_{\rho, +\infty}^{(\pm)}(1-s) = e^{\pm i \frac{\pi}{2}(1-s)} \Gamma(1-s) = \\ &= \frac{e^{\pm i \frac{\pi}{2}(1-s)}}{\sin \pi s \Gamma(s)}. \end{aligned}$$

Из формулы Стирлинга (2.29) получим, что для  $s = Re^{i\varphi}$  ( $R > 1$ )

$$\left| \frac{e^{\pm i\frac{\pi}{2}(1-s)}}{\Gamma(s)} \right| < A_7 \left| \bar{R} \left( \frac{e}{R} \right)^{R \cos \varphi} e^{R \left( \varphi \pm \frac{\pi}{2} \right) \sin \varphi} \right|, \quad |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \quad (2.55)$$

где  $A_7 > 0$  не зависит от  $R$  и  $\varphi$ .

Заметив, что

$$r_k = k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

суть нули функции  $\sin \pi s$ , лежащие в полуплоскости  $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ , и обозначив

$$R_k = k + \frac{1}{2} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

из леммы 5 получим оценку

$$|\sin \pi s| > \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2}} \exp(\pi R_k |\sin \varphi|), & \frac{\pi}{4} \leq |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & |\varphi| \leq \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (2.56)$$

для  $s = R_k e^{i\varphi}$ .

Из оценок (2.55) и (2.56), как и выше, приходим к утверждению (2.43) леммы в случае  $p_2 = +\infty$ .

4°. Перейдем теперь к доказательству последней из основных лемм этого параграфа — установим, что функции  $h_{p_1, p_2}^{(\pm)}(x)$  и  $h(x; p_1)$ , определенные в лемме 3, можно представить как пределы некоторых специально подобранных последовательностей полиномов, а в частных случаях, как суммы сходящихся на  $(0, +\infty)$  рядов.

С этой целью сначала введем некоторые дополнительные обозначения.

Заметим, что формулу (2.23) леммы, при помощи которой были определены функции  $h_{p_1, p_2}^{(\pm)}(x)$ , можно записать также в виде

$$\frac{h_{p_1, p_2}^{(\pm)}(x)}{x} = \frac{1}{2\pi i} \text{l.i.m.}_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{2} - i\alpha}^{\frac{1}{2} + i\alpha} \frac{H_{p_1, p_2}^{(\pm)}(1-s)}{\sqrt{2\pi s}} x^{s-1} ds. \quad (2.23')$$

Обозначим через  $M_j$  ( $j = 1, 2$ ) множество точек

$$r_k^{(j)} = 1 - \frac{1}{p} + \frac{p_j p_j}{p} + \frac{p_j}{p} k \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Пусть

$$G_0 = M_1 \cdot M_2$$

есть общая часть множеств  $M_1$  и  $M_2$ , а

$$G_1 = M_1 - G_0, \quad G_2 = M_2 - G_0$$

Очевидно, что в точках множества  $G_0$  подинтегральные функции в (2.23')

$$\varphi^{(\pm)}(s, x) = \frac{H_{\rho_1, \rho_2}^{(\pm)}(1-s)}{\sqrt{2\pi\rho} s} x^{s-1}, \quad x > 0$$

имеют полюсы второго порядка. Все точки  $G_0$  можно представить формулой

$$s_k^{(0)} = 1 - \mu + \frac{\mu_1 \rho_1}{\rho} + \frac{\rho_1}{\rho} \nu_k = 1 - \mu + \frac{\mu_2 \rho_2}{\rho} + \frac{\rho_2}{\rho} \gamma_k \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (2.57)$$

где  $\{\nu_k\}$  и  $\{\gamma_k\}$  — определенные возрастающие последовательности неотрицательных целых чисел. На множествах  $G_1$  и  $G_2$  функции  $\varphi^{(\pm)}(s)$  имеют лишь полюсы первого порядка. Если обозначить через

$$\{\nu_k^*\} = \{k\} - \{\nu_k\} \quad \text{и} \quad \{\gamma_k^*\} = \{k\} - \{\gamma_k\}$$

возрастающие последовательности целых чисел, дополняющих соответственно  $\{\nu_k\}$  и  $\{\gamma_k\}$  до полной последовательности  $\{k\}$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ), то точки  $G_1$  можно представить в виде

$$s_k^{(1)} = 1 - \mu + \frac{\mu_1 \rho_1}{\rho} + \frac{\rho_1}{\rho} \nu_k^* \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (2.58)$$

а точки  $G_2$  — в виде

$$s_k^{(2)} = 1 - \mu + \frac{\mu_2 \rho_2}{\rho} + \frac{\rho_2}{\rho} \gamma_k^* \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (2.59)$$

Разумеется, что, вообще говоря, одно или два из множеств  $G_0$ ,  $G_1$ ,  $G_2$  могут содержать лишь конечное множество точек или могут быть пустыми.

Нам необходимо иметь значения вычетов функции

$$\varphi^{(\pm)}(s, x) = \frac{\Psi_3^{(\pm)}(s)}{\sqrt{2\pi\rho} s \Psi_1(s) \Psi_2(s)} x^{s-1} \quad (x > 0) \quad (2.60)$$

в точках множеств  $G_1$ ,  $G_2$  и  $G_0$ .

Заметив, что по (2.37) и (2.45)

$$\frac{\Psi_3^{(-)}(s)}{\Psi_2(s)} = \pi^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\mu_2 - \frac{\rho}{\rho_2} \mu + \frac{\rho}{\rho_2} (1-s)\right)}{\Gamma\left(1 - \mu_1 + \frac{\rho}{\rho_1} \mu - \frac{\rho}{\rho_1} (1-s)\right)} e^{-i\frac{\pi}{2}(s-1)},$$

из (2.58) будем иметь

$$\frac{\Psi_3^{(-)}(s_k^{(1)})}{\Psi_2(s_k^{(1)})} = \pi^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\mu_2 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \mu_1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \nu_k^*\right)}{\Gamma(1 + \nu_k^*)} e^{\pm i\frac{\pi}{2}\left(\frac{\mu_1 \rho_1}{\rho} - \mu + \frac{\rho_1}{\rho} \nu_k^*\right)}. \quad (2.61)$$

Далее, так как

$$\lim_{s \rightarrow s_k^{(1)}} \frac{s - s_k^{(1)}}{\Psi_1(s)} = (-1)^{1+\nu_k^*} \frac{\rho_1}{\pi \rho}, \quad (2.62)$$

то из (2.60) и (2.61) получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=s_k^{(1)}} \{\varphi^{(\pm)}(s; x)\} = \\ = (-1)^{1+\nu_k^*} \frac{\rho_1}{\pi \rho \sqrt{2\rho}} \frac{\Gamma\left(\mu_2 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \mu_1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \nu_k^*\right)}{\Gamma(1 + \nu_k^*) \left(1 - \mu + \frac{\mu_1 \rho_1}{\rho} + \frac{\rho_1}{\rho} \nu_k^*\right)} \times \\ \times (x e^{\mp i \frac{\pi}{2}})^{\frac{\mu_1 \rho_1}{\rho} - \mu + \frac{\rho_1}{\rho} \nu_k^*}, \end{aligned}$$

откуда, учитывая условия (2.3) и (2.5), приходим к формуле

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=s_k^{(1)}} \{\varphi^{(\pm)}(s; x)\} = -\frac{\rho_1}{\pi \rho \sqrt{2\rho}} \exp\left\{\pm i \frac{\pi}{2} \left(\frac{\mu_2 \rho_2 - \mu_1 \rho_1}{\rho_2} - \frac{1}{2}\right)\right\} \times \\ \times \frac{1}{x} \int_0^x \left\{ e^{\pm i \frac{\pi}{2} (\mu_2 - \mu_1) \nu_k^*} \frac{\Gamma\left(\mu_2 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \mu_1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \nu_k^*\right)}{\Gamma(1 + \nu_k^*)} t^{\frac{\rho_1}{\rho} \nu_k^*} \right\} t^{\frac{\mu_1 \rho_1 - \mu_2 \rho_2}{\rho_2} - \frac{1}{2}} dt. \quad (2.63) \end{aligned}$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=s_k^{(2)}} \{\varphi^{(\pm)}(s; x)\} = -\frac{\rho_2}{\pi \rho \sqrt{2\rho}} \exp\left\{\pm i \frac{\pi}{2} \left(\frac{\mu_1 \rho_1 - \mu_2 \rho_2}{\rho_1} - \frac{1}{2}\right)\right\} \times \\ \times \frac{1}{x} \int_0^x \left\{ e^{\pm i \frac{\pi}{2} (\mu_1 - \mu_2) \gamma_k^*} \frac{\Gamma\left(\mu_1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \mu_2 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \gamma_k^*\right)}{\Gamma(1 + \gamma_k^*)} t^{\frac{\rho_2}{\rho} \gamma_k^*} \right\} t^{\frac{\mu_2 \rho_2 - \mu_1 \rho_1}{\rho_1} - \frac{1}{2}} dt. \quad (2.63') \end{aligned}$$

Для вычисления вычетов функции  $\varphi^{(\pm)}(s; x)$  в точках множества  $G_0$  обозначим  $s = s_k^{(0)} + \alpha$ ; тогда из (2.37), (2.57) и (2.45) будем иметь

$$\Psi_1(s) \Psi_2(s) = (-1)^{\gamma_k + \gamma_k^*} \sin \frac{\pi \rho}{\rho_1} \alpha \sin \frac{\pi \rho}{\rho_2} \alpha,$$

$$\begin{aligned} \Psi_3^{(\pm)}(s) = \pi^{\frac{3}{2}} e^{\mp i \frac{\pi}{2} (s_k^{(0)} - 1)} \frac{e^{-i \frac{\pi}{2} \alpha}}{\Gamma\left(1 + \nu_k + \frac{\rho}{\rho_1} \alpha\right) \Gamma\left(1 + \gamma_k + \frac{\rho}{\rho_2} \alpha\right)} \end{aligned}$$

и поэтому

$$\operatorname{Res}_{s=s_k^{(0)}} \{\varphi^{(\pm)}(s; x)\} =$$

$$= (-1)^{\gamma_k + \gamma_k} \frac{\pi}{\sqrt{2\rho}} (xe^{\mp i \frac{\pi}{2}})^{s_k^{(0)}-1} \times \\ \times \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{d}{d\alpha} \left[ \frac{\alpha^2 x e^{\mp i \frac{\pi}{2} \alpha}}{\sin \frac{\pi \rho}{\rho_1} \alpha \sin \frac{\pi \rho}{\rho_2} \alpha (s_k^{(0)} + \alpha) \Gamma \left( 1 + \gamma_k + \frac{\rho}{\rho_1} \alpha \right) \Gamma \left( 1 + \gamma_k + \frac{\rho}{\rho_2} \alpha \right)} \right].$$

Заметив теперь, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{d}{d\alpha} \left[ \frac{\alpha^2}{\sin \frac{\pi \rho}{\rho_1} \alpha \sin \frac{\pi \rho}{\rho_2} \alpha} \right] = 0$$

получим формулу

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=s_k^{(0)}} \{ \varphi^{(\pm)}(s; x) \} = \\ = (-1)^{\gamma_k + \gamma_k} \frac{\rho_1 \rho_2}{\pi \rho^2 \sqrt{2\rho}} (xe^{\mp i \frac{\pi}{2}})^{s_k^{(0)}-1} \times \\ \times \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{d}{d\alpha} \left[ \frac{x^2 e^{\mp i \frac{\pi}{2} \alpha}}{(s_k^{(0)} + \alpha) \Gamma \left( 1 + \gamma_k + \frac{\rho}{\rho_1} \alpha \right) \Gamma \left( 1 + \gamma_k + \frac{\rho}{\rho_2} \alpha \right)} \right] = \\ = (-1)^{\gamma_k + \gamma_k} \frac{\rho_1 \rho_2}{\pi \rho^2 \sqrt{2\rho}} \frac{(xe^{\mp i \frac{\pi}{2}})^{s_k^{(0)}-1}}{s_k^{(0)} \Gamma(1 + \gamma_k) \Gamma(1 + \gamma_k)} \times \\ \times \left\{ \log x \mp i \frac{\pi}{2} - \frac{1}{s_k^{(0)}} - \frac{\rho}{\rho_1} \frac{\Gamma'(1 + \gamma_k)}{\Gamma(1 + \gamma_k)} - \frac{\rho}{\rho_2} \frac{\Gamma'(1 + \gamma_k)}{\Gamma(1 + \gamma_k)} \right\}. \quad (2.64) \end{aligned}$$

Запишем ее в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=s_k^{(0)}} \{ \varphi^{(\pm)}(s; x) \} = \\ = \frac{\rho_1 \rho_2}{\pi \rho^2 \sqrt{2\rho}} \frac{1}{x} \int_0^x \left[ (-1)^{\gamma_k + \gamma_k} \frac{e^{\mp i \frac{\pi}{2} (1-s_k^{(0)})}}{\Gamma(1 + \gamma_k) \Gamma(1 + \gamma_k)} \left[ \log t \mp i \frac{\pi}{2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\rho}{\rho_1} \frac{\Gamma'(1 + \gamma_k)}{\Gamma(1 + \gamma_k)} - \frac{\rho}{\rho_2} \frac{\Gamma'(1 + \gamma_k)}{\Gamma(1 + \gamma_k)} \right] t^{s_k^{(0)}-1} dt \right]. \quad (2.65) \end{aligned}$$

Отметим теперь, что в частном случае, когда  $\rho_1 = \rho_2$ , формулы (2.63'), (2.63'') и (2.65) значительно упрощаются.

Действительно, как уже отмечалось в конце доказательства леммы 6, здесь возможны два случая:

а) Случай  $\mu_1 = \mu_2$ ,  $\mu_1 \neq \mu_2$ ; тогда множество  $G_0$  пусто, поэтому  $\gamma_k^* = \gamma_k = k$  ( $k > 0$ ) и  $s_k^{(1)} = \frac{3}{2} + \mu_1 - \mu_2 + 2k$ ,

$$s_k^{(2)} = \frac{3}{2} + \mu_2 - \mu_1 + 2k \quad (k > 0).$$

Ввиду этого формулы (2.63') и (2.63'') принимают вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=s_k^{(1)}} \{\varphi^{(1)}(s; x)\} = \\ = \int \sqrt{\frac{2}{t}} \frac{\exp \left\{ \mp i \frac{\pi}{2} \left( \mu_1 - \mu_2 + \frac{1}{2} \right) \right\}}{\sin \pi (\mu_1 - \mu_2)} \times \\ \times \frac{1}{x} \int_0^x \left| (-1)^k \frac{t^{2k + \mu_1 - \mu_2}}{k! \Gamma(1 + \mu_1 - \mu_2 + k)} \right| \sqrt{t} dt, \end{aligned} \quad (2.66')$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=s_k^{(2)}} \{\varphi^{(2)}(s; x)\} = \\ = \int \sqrt{\frac{2}{t}} \frac{\exp \left\{ \mp i \frac{\pi}{2} \left( \mu_2 - \mu_1 + \frac{1}{2} \right) \right\}}{\sin \pi (\mu_2 - \mu_1)} \times \\ \times \frac{1}{x} \int_0^x \left| (-1)^k \frac{t^{2k + \mu_2 - \mu_1}}{k! \Gamma(1 + \mu_2 - \mu_1 + k)} \right| \sqrt{t} dt. \end{aligned} \quad (2.66'')$$

б) Случай  $\mu_1 = \mu_2$ ,  $\mu_1 = \mu_2$ ; тогда множества  $G_1$  и  $G_2$  пусты, поэтому  $\gamma_k = \gamma_k = k$  ( $k > 0$ ) и

$$s_k^{(0)} = \frac{3}{2} + 2k \quad (k > 0).$$

Ввиду этого формула (2.65) принимает вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=s_k^{(0)}} \{\varphi^{(0)}(s; x)\} = \\ = \frac{4e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\pi \sqrt{2\rho}} \frac{1}{x} \int_0^x \left| (-1)^k \left[ \log t \mp i \frac{\pi}{2} - \frac{\Gamma'(1+k)}{\Gamma(1+k)} \right] \frac{t^{2k}}{(k!)^2} \right| \sqrt{t} dt. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Наконец, ради упрощения формулировки приводимой ниже леммы, введем также следующие обозначения.

Обозначим через  $\{s_k\}$  последовательность всех полюсов функции  $\varphi^{(\alpha)}(s; x)$ , пронумерованную в порядке

$$\frac{1}{2} < s_0 < s_1 < \dots < s_n < \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty.$$

Пусть  $\{R_n\}$  ( $n \geq n_0$ ) есть последовательность чисел, выбранная нами в лемме 6, и  $p_n, q_n, r_n$  суть соответственно числа тех чисел из последовательностей  $\{s_n^{(1)}\}, \{s_n^{(2)}\}, \{s_n^{(0)}\}$ , которые меньше  $R_n$ . Тогда из формул (2.63'), (2.63'') и (2.65) будем иметь

$$- \sum_{s_k^{(1)} < R_n} \operatorname{Res}_{s=s_k^{(1)}} [\varphi^{(-)}(s; x)] = \frac{1}{x} \int_0^x P_n^{(-)}(t) \sqrt{t} dt, \quad (2.68)$$

где

$$P_n^{(-)}(x) = \frac{p_1}{\pi \rho \sqrt{2\rho}} \exp \left\{ \pm i \frac{\pi}{2} \left( \frac{p_2 p_2 - p_1 p_1}{p_2} - \frac{1}{2} \right) \right\} \times \\ \times \sum_{k=1}^{p_n} e^{\pm i \frac{\pi}{2 p_2} (p_2 - p_1) \gamma_k^*} \frac{\Gamma \left( p_2 - \frac{p_1}{p_2} p_1 - \frac{p_1}{p_2} \gamma_k^* \right)}{\Gamma(1 + \gamma_k^*)} x^{\frac{p_1 p_1 - p_2 p_2}{p_2} + \frac{p_1}{p_2} \gamma_k^*}; \quad (2.68')$$

$$- \sum_{s_k^{(2)} < R_n} \operatorname{Res}_{s=s_k^{(2)}} [\varphi^{(-)}(s; x)] = \frac{1}{x} \int_0^x Q_n^{(-)}(t) \sqrt{t} dt, \quad (2.69)$$

где

$$Q_n^{(-)}(x) = \frac{q_2}{\pi \rho \sqrt{2\rho}} \exp \left\{ \pm i \frac{\pi}{2} \left( \frac{p_1 p_1 - p_2 p_2}{p_1} - \frac{1}{2} \right) \right\} \times \\ \times \sum_{k=1}^{q_n} e^{\pm i \frac{\pi}{2 p_1} (p_1 - p_2) \gamma_k^*} \frac{\Gamma \left( p_1 - \frac{p_2}{p_1} p_2 - \frac{p_2}{p_1} \gamma_k^* \right)}{\Gamma(1 + \gamma_k^*)} x^{\frac{p_2 p_2 - p_1 p_1}{p_1} + \frac{p_2}{p_1} \gamma_k^*}; \quad (2.69')$$

$$- \sum_{s_k^{(0)} < R_n} \operatorname{Res}_{s=s_k^{(0)}} [\varphi^{(-)}(s; x)] = \frac{1}{x} \int_0^x R_n^{(-)}(t) \sqrt{t} dt, \quad (2.70)$$

где

$$R_n^{(-)}(x) = - \frac{r_n p_2}{\pi \rho^2 \sqrt{2\rho}} \sum_{k=1}^{r_n} (-1)^{\gamma_k + \gamma_k} \frac{e^{\pm i \frac{\pi}{2} (1 - s_k^{(0)})}}{\Gamma(1 + \gamma_k) \Gamma(1 + \gamma_k)} \times \\ \times \left[ \log x \mp i \frac{\pi}{2} - \frac{p_1}{p_1} \frac{\Gamma'(1 + \gamma_k)}{\Gamma(1 + \gamma_k)} - \frac{p_2}{p_2} \frac{\Gamma'(1 + \gamma_k)}{\Gamma(1 + \gamma_k)} \right] x^{s_k^{(0)} - \frac{3}{2}}. \quad (2.70')$$

Обозначим теперь

$$\Psi_n^{(-)}(x) = P_n^{(-)}(x) + Q_n^{(-)}(x) + R_n^{(-)}(x), \quad (2.71)$$

при этом полагаем, что если одно из множеств  $G_1, G_2, G_0$  пусто, то соответствующую из функций  $P_n^{(-)}(x), Q_n^{(-)}(x), R_n^{(-)}(x)$  нужно положить равной нулю.

Из предыдущих формул следует

$$-\sum_{s_k < R_n} \operatorname{Res}_{s=s_k} [\varphi^{(\pm)}(s; x)] = \frac{1}{x} \int_0^x \Psi_n^{(\pm)}(t) \sqrt{t} dt. \quad (2.72)$$

Отметим частные случаи формулы (2.72).

а) Если  $\rho_1 = \rho_2$ ,  $\mu_1 \neq \mu_2$ , то, как было отмечено выше,  $R_n^{(\pm)}(x) \equiv 0$  и из формул (2.66') и (2.66'') получим

$$\begin{aligned} \Psi_n^{(\pm)}(x) = & \sqrt{\frac{2}{\rho}} e^{\pm i \frac{3\pi}{4}} \{\sin \pi(\mu_1 - \mu_2)\}^{-1} \times \\ & \times \left\{ e^{\pm i \frac{\pi}{2}(\mu_1 - \mu_2)} \sum_{k=0}^{\rho_n} (-1)^k \frac{x^{2k + \mu_1 - \mu_2}}{k! \Gamma(1 + \mu_1 - \mu_2 + k)} - \right. \\ & \left. - e^{\pm i \frac{\pi}{2}(\mu_1 - \mu_2)} \sum_{k=0}^{\rho_n} (-1)^k \frac{x^{2k + \mu_2 - \mu_1}}{k! \Gamma(1 + \mu_2 - \mu_1 + k)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Переходя к пределу в (2.73), заключаем, что равномерно на любом отрезке  $[a, b] \subset (0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n^{(\pm)}(x) = \\ = \sqrt{\frac{2}{\rho}} e^{\pm i \frac{3\pi}{4}} e^{\pm i \frac{\pi}{2}(\mu_1 - \mu_2)} \frac{J_{\mu_1 - \mu_2}(2x) - e^{\pm i \frac{\pi}{2}(\mu_1 - \mu_2)} J_{\mu_2 - \mu_1}(2x)}{\sin \pi(\mu_1 - \mu_2)}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Наконец, вспомнив определение функции Макдональда [8]

$$K_\nu(z e^{\pm i \frac{\pi}{2}}) = \frac{\pi}{2} \frac{J_{-\nu}(z) e^{\pm i \frac{\pi}{2}\nu} - J_\nu(z) e^{\pm i \frac{\pi}{2}\nu}}{\sin \pi \nu} \quad (2.75)$$

запишем формулу (2.74) в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n^{(\pm)}(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\rho}} e^{\pm i \frac{3\pi}{4}} K_{\mu_1 - \mu_2}(2x e^{\pm i \frac{\pi}{2}}). \quad (2.74')$$

б) Если  $\rho_1 = \rho_2$ ,  $\mu_1 = \mu_2$ , то, как было отмечено выше,  $P_n^{(\pm)}(x) = Q_n^{(\pm)}(x) = 0$  и из формулы (2.67) получим

$$\Psi_n^{(\pm)}(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\rho}} e^{\pm i \frac{3\pi}{4}} \sum_{k=0}^{\rho_n} (-1)^k \left[ \log x \mp i \frac{\pi}{2} - \frac{\Gamma'(1+k)}{\Gamma(1+k)} \right] \frac{x^{2k}}{(k!)^2}. \quad (2.76)$$

Из (2.76) следует, что равномерно на любом отрезке  $[a, b] \subset (0, +\infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n^{(\pm)}(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\rho}} e^{\pm i \frac{3\pi}{4}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[ \log x \mp i \frac{\pi}{2} - \frac{\Gamma'(1+k)}{\Gamma(1+k)} \right] \frac{x^{2k}}{(k!)^2} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\rho}} e^{\mp i \frac{\pi}{4}} K_0(2xe^{\mp i \frac{\pi}{2}}), \quad (2.76')$$

что в качестве предельного случая следует также из (2.74').

Лемма 7. а) Если

$$\mu < \frac{1}{2} + \min \left\{ \frac{\mu_1 \rho_1}{\rho}, \frac{\mu_2 \rho_2}{\rho} \right\}, \quad (2.77)$$

то для любого  $R > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^R \left| \frac{h_{\rho_1, \rho_2}^{(\pm)}(x)}{x} - \frac{1}{x} \int_0^x \Psi_n^{(\pm)}(t) \sqrt{t} dt \right|^2 dx = 0; \quad (2.78)$$

б) Если  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_0$ , то при

$$\mu < \frac{1}{2} + \min \{2\mu_1, 2\mu_2\} \quad (2.79)$$

$$h_{\rho_1, \rho_2}^{(\pm)}(x) = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\rho_0}} e^{\mp i \frac{\pi}{4}} \int_0^x K_{\mu_1 - \mu_2}(2te^{\mp i \frac{\pi}{2}}) \sqrt{t} dt. \quad (2.80)$$

в) Если  $\rho_1 = \rho_2 = \mu_2 = 1$ , то при

$$0 < \mu_1 < +\infty \quad (2.81)$$

$$h(x, \mu_1) = 4k(x, \mu_1) = 4 \int_0^x J_{\mu_1-1}(2t) t^{\frac{1}{2}} dt. \quad (2.82)$$

Доказательство. Обозначим через  $L_n$  контур области  $D_n$ , являющийся пересечением круга  $|s| = R_n$  с полуплоскостью  $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ ,

где  $\{R_n\}$  есть последовательность чисел, выбранная в лемме 6.

Функция  $\varphi^{(\pm)}(s; x)$  голоморфна в области  $D_n$  кроме точек  $s = s_k$  ( $k = 1, 2, \dots, p_n + q_n + r_n$ ), поэтому по теореме Коши

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_n} \varphi^{(\pm)}(s; x) ds &= - \sum_{s_k < R_n} \operatorname{Res}_{s=s_k} [\varphi^{(\pm)}(s; x)] = \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x \Psi_n^{(\pm)}(t) \sqrt{t} dt \quad (x > 0), \end{aligned} \quad (2.83)$$

Обозначив через  $\frac{1}{2} \pm iR_n^*$  точки пересечения окружности  $|s| = R_n$  и прямой  $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ , из (2.83) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - iR_n^*}^{\frac{1}{2} + iR_n^*} \varphi^{(\pm)}(s; x) ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - iR_n^*}^{\frac{1}{2} + iR_n^*} \frac{H_{p_1, p_2}^{(\pm)}(1-s)}{\sqrt{2\pi\rho} s} x^{s-1} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - iR_n^*}^{\frac{1}{2} + iR_n^*} \frac{H_{p_1, p_2}^{(\pm)}(s)}{\sqrt{2\pi\rho} (1-s)} x^{-s} ds = \frac{1}{x} \int_0^x \Psi_n^{(\pm)}(t) \sqrt{t} dt + Y_n(x) \quad (x > 0) \quad (2.84) \end{aligned}$$

где

$$Y_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_n} \varphi^{(\pm)}(s; x) dx, \quad (2.85)$$

а  $l_n$  — дуга окружности  $|s| = R_n$ ,  $\operatorname{Re} s \geq \frac{1}{2}$ .

По оценке (2.43) леммы 6 имеем, что если  $n \geq n_0$ , то имеет место неравенство

$$|Y_n(x)| \leq C_3 \frac{\sqrt{R_n}}{x} \int_0^{\varphi_n} \left( \frac{x C_2}{R_n} \right)^{R_n \cos \varphi} d\varphi \quad (x > 0), \quad (2.85')$$

где  $\varphi_n = \arccos \frac{1}{2R_n}$ ,  $C_2 \geq 1$ .

Пусть при  $n \geq n_1$   $\varphi_n > \frac{\pi}{3}$ ; тогда, полагая, что  $0 < x \leq \frac{R_n}{2C_2}$ , из (2.85') будем иметь

$$\begin{aligned} |Y_n(x)| &\leq C_4 \left( \frac{x C_2}{R_n} \right)^{\frac{R_n}{2}} \frac{\sqrt{R_n}}{x} + \frac{C_3}{x \sqrt{R_n}} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\varphi_n} \frac{\left( \frac{x C_2}{R_n} \right)^{R_n \cos \varphi}}{\sin \varphi \log \frac{R_n}{x C_2}} d\varphi < \\ &< C_4 \frac{\sqrt{R_n}}{x} \left( \frac{x C_2}{R_n} \right)^{\frac{R_n}{2}} + \frac{1}{R_n \sqrt{x}} \frac{C_5}{\log \frac{R_n}{x C_2}} = Y_n^{(1)}(x) + Y_n^{(2)}(x). \quad (2.86) \end{aligned}$$

Но легко видеть, что

$$\int_0^{\frac{R_n}{2C_2}} |Y_n^{(1)}(x)|^2 dx \leq \frac{C_6}{R_n^2 R_n}, \quad \int_0^{\frac{R_n}{2C_2}} |Y_n^{(2)}(x)|^2 dx \leq \frac{C_7}{R_n^2},$$

поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{R_n}{2C_2}} |Y_n(x)|^2 dx = 0. \quad (2.87)$$

Теперь уже нетрудно установить утверждения леммы для всех трех случаев:

а) Из формулы (2.23) и тождества (2.84) ввиду (2.87) получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{R_n}{2C_2}} \left| \frac{h_{\rho_1, \rho_2}^{(\pm)}(x)}{x} - \frac{1}{x} \int_0^x \Psi_n^{(\pm)}(t) \sqrt{t} dt \right|^2 dx = 0 \quad (2.78')$$

т. е. больше того, что утверждалось в лемме.

б) Если  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_0$  и, таким образом,  $\frac{1}{\rho} = \frac{2}{\rho_0}$ , то формула (2.80) следует из (2.78) и из предельных соотношений (2.74') или (2.76').

в) Из определений (2.22') и (2.23') функций  $k(x, \rho_1)$  и  $h(x, \rho_1)$  ввиду формул (2.20) следует, что

$$h(x, \rho_1) = 4k(x, \rho_1),$$

откуда в силу (2.24) получим формулу (2.82).

### § 3. Прямые и обратные преобразования в классах

$L_2$  с ядрами  $k_{\rho_1, \rho_2}(x, z)$  и  $h_{\rho_1, \rho_2}^{(\pm)}(x)$

На основании результатов § 2 в настоящем параграфе приводится построение прямых и обратных интегральных преобразований в классах  $L_2$  с ядрами вида

$$\frac{h_{\rho_1, \rho_2}^{(\pm)}(x)}{x} \quad \text{и} \quad \frac{k_{\rho_1, \rho_2}(x, z)}{x}.$$

Нижеприводимые теоремы представляют собой естественные обобщения результатов работы автора, посвященных преобразованиям с ядрами Миттаг-Лефлера [1]; одновременно они в качестве частных случаев содержат ряд известных результатов Ханкеля, Харди и других авторов [5] об интегральных преобразованиях, ядрами которых служат различного рода функции типа Бесселя.

На протяжении этого параграфа будем считать, что параметры  $\rho_1, \rho_2, \rho$  и  $\rho_1, \rho_2, \mu$  удовлетворяют условиям

$$а) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}, \quad (3.1)$$

при этом

$$\frac{1}{2} < \rho_1 < +\infty, \quad \frac{1}{2} \leq \rho_2 \leq +\infty, \quad \rho > \frac{1}{2}; \quad (3.1')$$

$$б) \quad \mu = \mu_1 + \mu_2 - \frac{1}{2}, \quad \mu_1 > 0, \quad \mu_2 > 0, \quad (3.2)$$

при этом

$$\mu_2 = \frac{1}{2}, \text{ когда } \rho_2 = +\infty; \quad (3.2')$$

$$в) \quad \frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho} \min \{1, \mu_1 \rho_1, \mu_2 \rho_2\}; \quad (3.3)$$

если же  $\rho_1 = \rho_2 = \mu_2 = 1$ , то

$$0 < \mu_1 < +\infty. \quad (3.3')$$

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. Для любой функции  $g(y)$  из класса  $g(y) y^{\mu-1} \in L_2(0, +\infty)$  формула

$$f^{(\pm)}(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{h_{\rho_1, \rho_2}^{(\pm)}(xy)}{y} g(y) y^{\mu-1} dy, \quad x \in (0, +\infty) \quad (3.4)$$

определяет почти всюду функции  $f^{(+)}(x)$  и  $f^{(-)}(x)$ , принадлежащие классу  $L_2(0, +\infty)$ .

Двойственная формула

$$\begin{aligned} g(y) y^{\mu-1} = & e^{-i \frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{k_{\rho_1, \rho_2} \left( xy; \frac{\pi}{2\rho} \right)}{x} f^{(-)}(x) dx + \\ & + e^{i \frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{k_{\rho_1, \rho_2} \left( xy; -\frac{\pi}{2\rho} \right)}{x} f^{(+)}(x) dx \end{aligned} \quad (3.5)$$

также имеет место почти всюду на  $(0, +\infty)$ . Существуют постоянные  $M_1 > 0$ ,  $M_2 > 0$ , не зависящие от функций, такие, что

$$\int_0^\infty |f^{(-)}(x)|^2 dx \leq M_1 \int_0^\infty |g(y)|^2 y^{2(\mu-1)} dy$$

и

$$\int_0^\infty |g(y)|^2 y^{2(\mu-1)} dy \leq M_2 \left\{ \int_0^\infty |f^{(+)}(x)|^2 dx + \int_0^\infty |f^{(-)}(x)|^2 dx \right\}. \quad (3.6)$$

Теорема 2. Для любой функции  $f(x) \in L_2(0, +\infty)$  формула

$$g^{(\pm)}(y) y^{\mu-1} = \frac{d}{dy} \int_0^{\infty} \frac{k_{p_1, p_2}(xy; \pm \frac{\pi}{2p})}{x} f(x) dx \quad (3.7)$$

определяет почти всюду на  $(0, +\infty)$  функции  $g^{(\pm)}(y) y^{\mu-1}$ , принадлежащие классу  $L_2(0, +\infty)$ .

Двойственная формула

$$f(x) = e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{h_{p_1, p_2}^{(-)}(xy)}{y} g^{(+)}(y) y^{\mu-1} dy + \\ + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{h_{p_1, p_2}^{(+)}(xy)}{y} g^{(-)}(y) y^{\mu-1} dy \quad (3.8)$$

также имеет место почти всюду на  $(0, +\infty)$ . Существуют постоянные  $K_1 > 0$ ,  $K_2 > 0$ , не зависящие от функций и такие, что

$$\int_0^{\infty} |g^{(\pm)}(y)|^2 y^{2(\mu-1)} dy \leq K_1 \int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx$$

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx \leq K_2 \left\{ \int_0^{\infty} |g^{(+)}(y)|^2 y^{2(\mu-1)} dy + \int_0^{\infty} |g^{(-)}(y)|^2 y^{2(\mu-1)} dy \right\}. \quad (3.9)$$

Доказательства этих теорем основываются на функциональном тождестве (2.17) леммы 2 и на лемме 3 и проводятся точно таким же образом, как и доказательства теорем 1 и 5 работы [1]. Поэтому, отсылая читателей к указанной работе, мы доказательства опускаем.

Отметим некоторые частные случаи теорем 1 и 2.

1) При  $p_2 = +\infty$  и  $\mu_2 = 1$  из теорем 1 и 2 соответственно следуют теоремы 1 и 5 работы [1].

2) При

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 2,$$

т. е.  $p = \frac{1}{2}$ , обозначим

$$h_{p_1, p_2}(x) = e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} h_{p_1, p_2}^{(-)}(x) + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} h_{p_1, p_2}^{(+)}(x) \quad (3.10)$$

и заметим, что

$$k_{p_1, p_2}(x, \pm \pi) = k_{p_1, p_2}(x) = \int_0^x \Phi_{p_1, p_2}(-t^2; p_1, p_2) t^{\mu-1} dt. \quad (3.11)$$

Формулы обращения (3.4) и (3.5) теоремы 1 тогда запишутся в виде

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{h_{\rho_1, \rho_2}(xy)}{y} g(y) y^{\mu-1} dy, \quad (3.4')$$

$$g(y) y^{\mu-1} = \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{k_{\rho_1, \rho_2}(xy)}{x} f(x) dx, \quad (3.5')$$

в формулы (3.7) и (3.8) теоремы 2 соответственно примут вид (3.5') и (3.4').

В частности, если  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ , то  $\rho = \frac{1}{2}$  и тогда из формул (3.10) и (2.80), ввиду (2.75), получим

$$\begin{aligned} h_{1,1}(x) &= -4 \cos \pi \mu_2 \int_0^x J_{\mu_1 - \mu_2}(2t) \sqrt{t} dt - \\ &- 4 \sin \pi \mu_2 \int_0^x Y_{\mu_1 - \mu_2}(2t) \sqrt{t} dt, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где  $Y_\nu(z)$  — функция Бесселя второго рода, связанная с функциями  $K_\nu$  и  $J_\nu$  формулой

$$K_\nu(z e^{i\frac{\pi}{2}}) = \mp \frac{\pi i}{2} e^{i\frac{\pi\nu}{2}} [J_\nu(z) \mp i Y_\nu(z)]. \quad (3.13)$$

Преобразования с ядрами  $h_{1,1}(x)$  и  $k_{1,1}(x)$  были выведены Харди [5, 6] и исследованы Куком [5, 7]. Сводка этих результатов содержится также в книге [8].

Наконец, при  $\rho_1 = \rho_2 = \mu_2 = 1$  и  $0 < \mu_1 < +\infty$  по (3.11) и (2.24')

$$k_{1,1}(x) = \int_0^x J_{\mu_1-1}(2t) \sqrt{t} dt$$

и по (3.12) или по (2.82)

$$h_{1,1}(x) = 4 \int_0^x J_{\mu_1-1}(2t) \sqrt{t} dt.$$

В этом случае нетрудно убедиться, что теоремы 1 или 2 содержат известные формулы обращения Ханкеля [5] в классе  $L_2(0, +\infty)$ .

Следующая теорема доказывается на основании теоремы 1 и функционального тождества (2.18) леммы 2 точно так же, как и теорема 8 работы [1].

**Теорема 3.** Если  $g_1(y)$  — произвольная функция из класса

$$\int_0^\infty |g_1(y)|^2 y^{2\mu_2 - \rho - 1} dy < +\infty, \quad (3.12)$$

то функции

$$f^{(\pm)}(x) = \rho \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{h_{\rho_1, \rho_2}^{(\pm)}(xy^\rho)}{y^\rho} g_1(y) y^{2\rho-1} dy \quad (3.13)$$

принадлежат классу  $L_2(0, +\infty)$ .

Целые функции порядка  $\leq \rho$  и конечного типа, определяемые по формуле

$$G_\tau(z) = e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\rho}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_{\rho_1, \rho_2}(x^{\frac{1}{\rho}} z e^{-i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu_1, \mu_2) x^{\mu-1} f^{(-)}(x) dx + \\ + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\rho}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_{\rho_1, \rho_2}(x^{\frac{1}{\rho}} z e^{-i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu_1, \mu_2) x^{\mu-1} f^{(+)}(x) dx \quad (\tau > 0) \quad (3.14)$$

сходятся в среднем к  $g_1(y)$ , когда  $\tau \rightarrow +\infty$  в смысле

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^{\infty} |g_1(y) - G_\tau(y)|^2 y^{2\rho-1} dy = 0, \quad (3.15)$$

В случае, когда  $\rho > 1$ , справедливо также равенство

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^{\infty} |G_\tau(y e^{i\varphi})|^2 y^{2\rho-1} dy = 0 \quad \frac{\pi}{\rho} \leq \varphi \leq 2\pi - \frac{\pi}{\rho}. \quad (3.16)$$

Таким образом эта теорема дает нам аппарат приближения целыми функциями на луче  $(0, +\infty)$ . Но последнее утверждение этой теоремы — равенство (3.16), позволяет, как и в работе [1], построить аппарат приближения для произвольной конечной системы лучей, исходящих из начала координат.

Обозначим через  $[L]$  совокупность лучей

$$l_k: \arg z = \varphi_k \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (3.17)$$

$$0 = \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n < 2\pi,$$

исходящих из начала координат.

Обозначим, далее,

$$\alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{\pi}{\varphi_{k+1} - \varphi_k} \right\}. \quad (3.18)$$

**Теорема 4.** Пусть  $\rho \geq \alpha$  и

$$\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \min \left\{ \frac{1}{\rho}, \frac{\rho_1 \rho_1}{\rho}, \frac{\rho_2 \rho_2}{\rho} \right\}. \quad (3.19)$$

Для произвольной функции  $F(z)$  определенной на  $[L]$  и удовлетворяющей условию

$$\int_{[L]} |F(z)|^2 |z|^{2\mu_2 - \mu_1 - 1} |dz| < +\infty, \quad (3.20)$$

обозначив

$$f_k^{(\pm)}(x) = \varphi \frac{d}{dx} \int_0^{\pi} \frac{h_{\mu_1, \mu_2}^{(\mp)}(xr^2)}{r^2} F(re^{i\varphi_k}) r^{\mu_2 - 1} dr \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (3.21)$$

$$G_z^{(k)}(z) = e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{1}{V2\rho} \int_0^{\pi} \Phi_{\mu_1, \mu_2}(x^{\frac{1}{\rho}} z e^{i(\frac{\pi}{2\rho} - \varphi_k)}) ; \mu_1, \mu_2) x^{\mu_1 - 1} f_k^{(-)}(x) dx + \\ + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{1}{V2\rho} \int_0^{\pi} \Phi_{\mu_1, \mu_2}(x^{\frac{1}{\rho}} z e^{-i(\frac{\pi}{2\rho} + \varphi_k)}) ; \mu_1, \mu_2) x^{\mu_1 - 1} f_k^{(+)}(x) dx, \quad (3.22)$$

$$G_z(z) = \sum_{k=1}^n G_z^{(k)}(z); \quad (3.23)$$

имеем

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{[L]} |F(z) - G_z(z)|^2 |z|^{2\mu_2 - \mu_1 - 1} |dz| = 0. \quad (3.24)$$

Таким образом, теорема 4 представляет собой обобщение преобразования Ханкеля для системы лучей комплексной плоскости.

В заключение автор выражает признательность младшему научному сотруднику С. А. Акопяну за некоторые вычисления, связанные с этой работой.

Ереванский государственный университет,

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Поступила 26 XII 1959

Մ. Մ. Ջրբաշյան

ՄԻՏՏԱԳ-ԼԵՖԼԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՇԵՏ ԿԱՊԿԱԾ  
ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա հոդվածում հետադրությամբ են Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ամբողջ  
ֆունկցիաներ

$$\Phi_{\mu_1, \mu_2}(z; \mu_1, \mu_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu_1 + k\rho_1^{-1}) \Gamma(\mu_2 + k\rho_2^{-1})}$$

հետ կապված ինտեգրալ ձևափոխությունները: Այս ֆունկցիան  $\rho_1, \rho_2$  և  $\mu_1, \mu_2$  օժանդակ պարամետրերի մասնավոր արժեքների դեպքում կապված է Բեսսելի ֆունկցիայի հետ, մասնավորաբար, սահմանային դեպքում, երբ  $\rho_2 = +\infty$

$$\Phi_{\rho_1, \rho_2}(z; \mu_1, \mu_2) = \frac{1}{\Gamma(\mu_2)} E_{\rho_1}(z; \mu_1),$$

որտեղ  $E_{\rho_1}(z; \mu_1)$  — Միտտագ-Լեֆլերի ֆունկցիան է:  $E_{\rho_1}(z; \mu_1)$  ֆունկցիայի հետ կապված ինտեգրալ ձևափոխությունները հետազոտվել են հեղինակի մի ևս աշխատանքում [1]: Այս հոդվածում քննարկ արդյունքները մեր այդ աշխատանքի [1], ինչպես նաև Հանկելի, Հարդիի և այլ հեղինակների Բեսսելի ֆունկցիայի հետ կապված ինտեգրալ ձևափոխություններին նվիրված աշխատանքների քննական և լայն ընդհանրացումներն են հանդիսանում:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Джрбашян М. М. Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций. «Изв. АН СССР, мат. серия», **19**, 1955, 133—190.
2. См. напр., Маркушевич А. И. Теория аналитических функций, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
3. Джрбашян М. М. Об интегральном представлении функций, непрерывных на нескольких лучах. «Изв. АН СССР», **18**, 1954, 427—448.
4. См. напр., Энциклопедия элементарной математики, т. I, Гостехиздат, М.—Л., 1951, 340—341.
5. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
6. Hardy G. H. Some formule in the theory of Bessel Functions, London Math. Soc. Records, 12, 1924.
7. Cooke R. G. The inversion formule of Hardy and Titchmarsh, Proc. London Math. Soc., 24 (2), 1925.
8. Erdelyi A., Magnus W., Oberkethinger F., Tricomi F. G. Higher Transcendental Functions, New-York, Toronto, London, 1953, V, 2, pp. 73—75.