ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 3, 1960 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

Г. В. Бадалян

Асимптотическое представление квази-полиномов Лежандра для больших значений индекса

В настоящей работе рассматриваются введенные нами квази-полиномы

$$P_n(x)=\frac{\sqrt{2\gamma_n^*+1}}{2\pi i}\int\limits_{C_n^*}\prod_{\nu=0}^{n-1}\frac{\zeta+\gamma_\nu^*+1}{\zeta-\gamma_\nu^*}\,\frac{x^\zeta d\zeta}{\zeta-\gamma_n^*},\tag{1}$$

где $0=\gamma_0^*<\gamma_1^*\leqslant\cdots\to\infty$. Простой контур C^* здесь, и впредь в аналогичных случаях, охватывает окрестности нулей знаменателя подинтегральной функции.

Функции $P_n(x)$ мы называем квази-полиномами Лежандра, так как

$$\int\limits_0^1 P_n(x)\,P_m(x)\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ 1, & m=n,\end{cases}$$

(см. [1], [2]).

Ставится задача выделить главную часть $P_n(x)$ для больших значений n при $x\in[\delta_0,\ 1-\delta_0]$, где $\delta_0>0$—произвольное, но фиксированное число; впредь всегда будем считать, что $\delta_0<x<1-\delta_0$.

Для удобства обозначим

$$\gamma_\nu^*+\frac{1}{2}=\gamma_\nu,\quad t=\ln\frac{1}{x},\quad k_n=\sqrt{2\gamma_n}=\sqrt{2\gamma_n^*+1}\,,\tag{2}$$

тогда

$$x^{\frac{1}{2}}P_n(x)=\frac{k_n}{2\pi i}\int\limits_C\prod_{\nu=0}^{n-1}\frac{\zeta+\gamma_\nu}{\zeta-\gamma_\nu}\,\frac{e^{-t\zeta}d\zeta}{\zeta-\gamma_n}.\tag{1'}$$

Предварительно введем некоторые основные обозначения и докажем необходимые для дальнейшего изложения вспомогательные предложения.

Обозначим:

1) $$\varphi(t)=ty-2\sum_{\nu=0}^{n-1}\int\limits_0^y\frac{\gamma_\nu\,du}{u^2+\gamma_\nu^2}=ty-2\sum_{\nu=0}^{n-1}\operatorname{arctg}\frac{y}{\gamma_\nu};\tag{3}$$

2) $R_0=R_0(t)$ — единственный корень уравнения

$$\varphi'(t)=t-2\sum_{0}^{n-1}\frac{\gamma_\nu}{R_0^2+\gamma_\nu^2}=0; \tag{4}$$

3) через $R_1,\ R_2>0$ — числа, удовлетворяющие соответственно условиям

$$\frac{R_1}{R_0}=1+\delta,\quad \frac{R_2}{R_0}=1-\delta, \tag{5}$$

где $\delta\,(0<\delta<1)$ — пока произвольное, но достаточно малое число;

4) $$\psi(y)=t(y-1)-2\int_1^y\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\gamma_\nu\,du}{R_0^2u^2+\gamma_\nu^2}; \tag{6}$$

5) $$\tilde{I}(\alpha,\beta)=\frac{k_n}{2\pi}\int_\alpha^\beta\prod_{\nu=0}^{n-1}\frac{iy+\gamma_\nu}{iy-\gamma_\nu}\,\frac{e^{-ity}\,dy}{iy-\gamma_n}, \tag{7}$$

где $\alpha,\ \beta$ — произвольные числа.

Лемма 1. *Справедливы неравенства*

$$0<\frac{\delta}{4}\psi''(1)<\varphi'(R_1)<\delta\psi''(1), \tag{8}$$

$$\frac{\delta}{4}\psi''(1)<-\varphi'(R_2)<\delta\psi''(1). \tag{8'}$$

Доказательство. Согласно (3) и (4)

$$\varphi'(R_1)=t-2\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\gamma_\nu}{R_0^2(1+\delta)^2+\gamma_\nu^2}=$$

$$=t-2\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\gamma_\nu}{(R_0^2+\gamma_\nu^2)\left[1+\dfrac{(2+\delta)\,\delta R_0^2}{R_0^2+\gamma_\nu^2}\right]},$$

однако, нетрудно заметить, что при достаточно малом $\delta>0$ справедливо неравенство

$$1-\frac{(2+\delta)\,\delta R_0^2}{R_0^2+\gamma_\nu^2}<\frac{1}{1+\dfrac{(2+\delta)\,\delta R_0^2}{R_0^2+\gamma_\nu^2}}<1-\frac{1}{2}\,\frac{(2+\delta)\,\delta R_0^2}{R_0^2+\gamma_\nu^2}.$$

В силу последнего неравенства для $\varphi'(R_1)$ получаем

$$\frac{(2+\delta)\,\delta R_0^2}{2}\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\gamma_\nu}{(R_0^2+\gamma_\nu^2)^2}<\varphi'(R_1)<(2+\delta)\delta R_0^2\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\gamma_\nu}{(R_0^2+\gamma_\nu^2)^2}.$$

Если еще заметить, что

$$4R_0^2\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\gamma_\nu}{(R_0^2+\gamma_\nu^2)^2}=\psi''(1),$$

то будем иметь

$$\frac{(2+\delta)\delta}{8}\psi''(1)<\varphi'(R_1)<\frac{(2+\delta)\delta}{4}\psi''(1)$$

или

$$\frac{\delta}{4}\psi''(1)<\varphi'(R_1)<\delta\psi''(1).$$

Этим неравенство (8) установлено. Неравенство (8′) доказывается аналогично, а именно:

имеем

$$2\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\gamma_\nu}{R_0^2+\gamma_\nu^2}<2\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\gamma_\nu}{R_0^2(1-\delta)^2+\gamma_\nu^2}=$$

или

$$=2\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\gamma_\nu}{(R_0^2+\gamma_\nu^2)\left(1-\dfrac{(2-\delta)\delta R_0^2}{R_0^2+\gamma_\nu^2}\right)},$$

но при достаточно малом $\delta>0$

$$1+\frac{(2-\delta)\delta R_0^2}{R_0^2+\gamma_\nu^2}<\frac{1}{1-\dfrac{(2-\delta)\delta R_0^2}{R_0^2+\gamma_\nu^2}}<1+2\frac{(2-\delta)\delta R_0^2}{R_0^2+\gamma_\nu^2},$$

таким образом

$$2\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\gamma_\nu}{R_0^2+\gamma_\nu^2}+\frac{(2-\delta)\delta}{2}\psi''(1)<2\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\gamma_\nu}{R_2^2+\gamma_\nu^2}<$$

$$<2\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\gamma_\nu}{R_0^2+\gamma_\nu^2}+\frac{(2-\delta)\delta}{2}\psi''(1).$$

Отнимая со всех сторон последнего неравенства t, получаем

$$\frac{(2-\delta)\delta}{4}\psi''(1)<-\varphi'(R_2)<\frac{(2-\delta)\delta}{2}\psi''(1)$$

или

$$\frac{\delta}{4}\psi''(1)<-\varphi'(R_2)<\delta\psi''(1). \tag{8'}$$

Лемма 2. *При* $1-\delta<\xi<1+\delta$, $0<\delta<1$ *справедливо неравенство*

$$|\psi'''(\xi)|<\frac{3}{(1-\delta)^4}\psi''(1). \tag{9}$$

Доказательство. Последовательное дифференцирование $\psi(y)$ показывает, что

$$\psi'''(\xi)=4R_0^2\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\gamma_\nu^3+3\xi R_0^2\gamma_\nu}{(\gamma_\nu^2+\xi^2R_0^2)^3},$$

а это значит, что

$$|\psi'''(\xi)|<12R_0^2\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\gamma_\nu}{(R_0^2\xi^2+\gamma_\nu^2)^2}<$$

$$<\frac{12}{(1-\delta)^4}\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{R_0^2\gamma_\nu}{(R_0^2+\gamma_\nu^2)^2}<\frac{3}{(1-\delta)^4}\psi''(1).$$

Лемма 3. *Пусть* $0<t<\delta$, *а* $I(\alpha,\beta)$ *определено в* (7). *Тогда справедливы неравенства*

$$|I(0,R_2)|<\frac{2k_n}{\gamma_n|\varphi'(R_2)|}<\frac{8k_n}{\gamma_n\delta\psi''(1)}, \tag{11}$$

$$|I(-R_2,0)|<\frac{2k_n}{\gamma_n|\varphi'(R_2)|}<\frac{8k_n}{\gamma_n\delta\psi''(1)}. \tag{11'}$$

Доказательство. Действительно

$$\prod_{\nu=0}^{n-1}\frac{iy+\gamma_\nu}{iy-\gamma_\nu}=e^{2i\sum\limits_{\nu=0}^{n-1}\operatorname{arctg}\frac{y}{\gamma_\nu}}=\exp\left(2i\sum_{\nu=0}^{n-1}\int_0^y\frac{\gamma_\nu du}{u^2+\gamma_\nu^2}\right),$$

значит

$$I(\alpha,\beta)=\frac{k_n}{2\pi}\int_\alpha^\beta\frac{e^{-i\varphi(y)}}{iy-\gamma_n}dy.$$

Для вычисления $I(0,R_2)$ заметим, что

$$\varphi'(y)=t-2\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\gamma_\nu}{y^2+\gamma_\nu^2}$$

в промежутке $[0,R_2]$ отрицательна и монотонно возрастает. Значит

$$\min|\varphi'(y)|\geqslant|\varphi'(R_2)|.$$

Запишем теперь

$$I(0,R_2)=\frac{k_n}{2\pi}\int_0^{R_2}\frac{e^{-i\varphi(y)}\varphi'(y)}{(iy-\gamma_n)\varphi'(y)}dy$$

и вычислим интеграл правой части последнего равенства по частям. Будем иметь

$$I(0,R_2)=\frac{k_n}{2\pi}\left.\frac{ie^{-i\varphi(y)}}{(iy-\gamma_n)\varphi'(y)}\right|_{y=0}^{R_2}+$$

$$+\frac{k_n}{2\pi}\int\limits_0^{R_2}\frac{ie^{-i\varphi(y)}\,dy}{(iy-\gamma_n)^2\varphi'(y)}+\frac{k_n}{2\pi}\int\limits_0^{R_2}\frac{ie^{-i\varphi(y)}\varphi''(y)}{(iy-\gamma_n)\,|\varphi'(y)|^2}\,dy.$$

Это значит, что

$$|I(0,R_2)|<\frac{k_n}{2\pi\sqrt{R_0^2+\gamma_n^2}\,|\varphi'(R_2)|}+\frac{k_n}{2\pi\gamma_n|\varphi'(0)|}+\frac{2k_n}{2\pi\gamma_n|\varphi'(R_2)|}+$$

$$+\frac{k_n}{2\pi\gamma_n}\int\limits_0^{R_2}\frac{\varphi''(y)\,dy}{|\varphi'(y)|^2}\leqslant\frac{2k_n}{\gamma_n|\varphi'(R_2)|}$$

или в силу (8′)

$$|I(0,R_2)|\leqslant\frac{2k_n}{\gamma_n|\varphi'(R_2)|}<\frac{8k_n}{\gamma_n\delta\psi''(1)}.$$

Лемма 4. *Пусть* $0<t<\infty$, *а* $I(\alpha,\beta)$ *определено в* (7). *Тогда справедливы неравенства*

$$|I(R_1,T)|<\frac{k_n}{\gamma_n\varphi'(R_1)}<\frac{4k_n}{\gamma_n\delta\psi''(1)},\tag{13}$$

$$|I(-R_1,-T)|<\frac{k_n}{\gamma_n\varphi'(R_1)}<\frac{4k_n}{\gamma_n\delta\psi''(1)},\tag{13′}$$

где $T>R_1$ — *произвольное число.*

Лемма доказывается повторением всех выкладок доказательства предыдущей леммы с учетом только того, что на $[R_1,T]$

$$\varphi'(y)=t-2\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\gamma_\nu}{y^2+\gamma_\nu^2}>0$$

и строго монотонно возрастает.

В силу (8) будем иметь

$$|I(R_1,T)|\leqslant\frac{3k_n}{\pi\gamma_n\varphi'(R_1)}<\frac{k_n}{\gamma_n\varphi'(R_1)}<\frac{4k_n}{\gamma_n\delta\psi''(1)}.$$

Так же доказывается неравенство (13).

Лемма 5. *Пусть* $1-\delta<\xi<1+\delta$, $\delta\,(0<\delta<1)$ *достаточно малое число*

$$I_1(\delta)=\int\limits_{-\delta}^{\delta}\frac{\exp\left\{-iR_0\left[\dfrac{\psi''(1)}{2!}y^2+\dfrac{\psi'''(\xi)}{3!}y^3\right]\right\}}{i(y+1)R_0-\gamma_n}\,dy,$$

$$I_2(\delta)=\frac{1}{iR_0-\gamma_n}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\exp\left\{-iR_0\left[\frac{\psi''(1)}{2!}y^2+\frac{\psi'''(\xi)}{3!}y^3\right]\right\}dy.$$

где $\psi(y)$ *определено в* (6), *тогда*

$$I_1(\delta) = I_2(\delta) + 0\left(\frac{R_0\delta^2}{R_0^2 + \gamma_n^2}\right). \tag{14}$$

Доказательство. Действительно

$$I_1(\delta) = I_2(\delta) - i\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\exp\left\{-iR_0\left[\frac{\psi''(1)}{2!}y^2 + \frac{\psi'''(\xi)}{3!}y^3\right]\right\}R_0 y}{(iR_0 - y)\,[i(y+1)R_0 - \gamma_n]}\,dy.$$

Это значит, что

$$|I_1(\delta) - I_2(\delta)| \leqslant \frac{R_0\delta^2}{(1-\delta)^2R_0^2 + \gamma_n^2} < \frac{1}{(1-\delta)^2}\frac{R_0\delta^2}{R_0^2 + \gamma_n^2}.$$

Этим лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть* $1 - \delta < \xi < 1 + \delta$, $0 < \delta < 1$,

$$Y_1(\delta) = \int_{-\delta}^{\delta}\exp\left\{-iR_0\left[\frac{\psi''(1)}{2!}y^2 + \frac{\psi'''(\xi)}{3!}y^3\right]\right\}dy,$$

$$Y_2(\delta) = \int_{-\delta}^{\delta}\exp\left[-iR_0\frac{\psi''(1)}{2!}y^2\right]dy,$$

тогда

$$Y_1(\delta) = Y_2(\delta) + 0\,[R_0\delta^4\psi''(1)]. \tag{15}$$

Доказательство. Действительно имеем

$$Y_1(\delta) - Y_2(\delta) = \int_{-\delta}^{\delta}e^{-iR_0\frac{\psi''(1)}{2!}}\left[e^{-iR_0\frac{\psi'''(\xi)}{3!}y^3} - 1\right]dy,$$

значит

$$|Y_1(\delta) - Y_2(\delta)| \leqslant 4\int_0^{\delta}\left|\sin\frac{R_0\psi'''(\xi)}{12}y^3\right|dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\max\limits_{1-\delta<\xi<1+\delta}|\psi'''(\xi)|}{12}R_0\delta^4.$$

Используя неравенство (9) (лемма 2), получаем

$$|Y_1(\delta) - Y_2(\delta)| < \frac{R_0\delta^4}{4}\psi''(1).$$

Этим лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть* $0 < t < \infty$, $I(\alpha, \beta)$ *определено в* (7). *Тогда*

$$I(R_2, R_1) = \frac{1}{2\pi} \frac{k_n R_0 \delta e^{-i\varphi(R_0)}}{\alpha_n (R_0 i - \gamma_n)} \int_{-\alpha_n}^{\alpha_n} e^{-iy^2} dy + O(\Delta_n), \tag{16}$$

$$I(-R_1, -R_2) = -\frac{1}{2\pi} \frac{k_n R_0 \delta e^{i\varphi(R_0)}}{\alpha_n (R_0 i + \gamma_n)} \int_{-\alpha_n}^{\alpha_n} e^{iy^2} dy + O(\Delta_n), \tag{16'}$$

где

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{R_0 \psi''(1)}{2}}\, \delta, \quad \Delta_n = \max\left(\frac{R_0 \delta^2 k_n}{R_0^2 + \gamma_n^2},\ R_0 \delta^3 k_n \psi''(1)\right).$$

Доказательство. Имеем

$$I(R_2, R_1) = \frac{k_n e^{-i\varphi(R_0)}}{2\pi} \int_{R_2}^{R_1} \frac{e^{-i[\varphi(y) - \varphi(R_0)]} dy}{iy - \gamma_n},$$

а

$$\varphi(y) - \varphi(R_0) = t(y - R_0) - \int_{R_0}^{y} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\gamma_\nu du}{u^2 + \gamma_\nu^2}.$$

Введем замену переменной $y = R_0 y'$, тогда

$$I(R_2, R_1) = \frac{k_n R_0 e^{-i\varphi(R_0)}}{2\pi} \int_{\frac{R_2}{R_0}}^{\frac{R_1}{R_0}} \frac{\exp\left\{-iR_0\left[t(y-1) - \int_1^y \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\gamma_\nu du}{R_0^2 u^2 + \gamma_\nu^2}\right]\right\}}{iyR_0 - \gamma_n} dy$$

или, согласно (6),

$$I(R_2, R_1) = \frac{k_n R_0 e^{-i\varphi(R_0)}}{2\pi} \int_{1-\delta}^{1+\delta} \frac{e^{-iR_0\psi(y)} dy}{iyR_0 - \gamma_n}. \tag{17}$$

Представим $\psi(y)$ формулой Тейлора. Зная, что

$$\psi(1) = \psi'(1) = 0,$$

будем иметь

$$\psi(y) = \frac{\psi''(1)}{2!}(y-1)^2 + \frac{\psi'''(\xi)}{3!}(y-1)^3. \tag{18}$$

Подставляя значение $\psi(y)$ из (18) в (17), будем иметь

$$I(R_2, R_1) =$$

$$= \frac{k_n R_0 e^{-i\varphi(R_0)}}{2\pi} \int\limits_{1-\delta}^{1+\delta} \frac{\exp\left[-iR_0 \frac{\psi''(1)}{2!}(y-1)^2 - iR_0 \frac{\psi'''(\xi)}{3!}(y-1)^3\right]}{iyR_0 - \gamma_n} dy$$

или

$$I(R_2, R_1) =$$

$$= \frac{k_n R_0 e^{-i\varphi(R_0)}}{2\pi} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{\exp\left[-iR_0 \frac{\psi''(1)}{2!} y^2 + \frac{iR_0\psi'''(\xi)}{3!} y^3\right]}{i(y+1)R_0 - \gamma_n} dy, \qquad (17')$$

где $1-\delta < \xi < 1+\delta$.

В силу (14) получаем

$$I(R_2, R_1) = \frac{k_n R_0 e^{-i\varphi(R_0)}}{2\pi(iR_0 - \gamma_n)} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \exp\left\{-iR_0 \left[\frac{\psi''(1)}{2!} y^2 + \frac{\psi'''(\xi)}{3!} y^3\right]\right\} dy +$$

$$+ 0\left(\frac{R_0 k_n \delta^2}{R_0^2 + \gamma_n^2}\right). \qquad (17'')$$

Далее, используя лемму 6 (15), имеем

$$I(R_2, R_1) = \frac{k_n R_0 e^{-i\varphi(R_0)}}{2\pi(iR_0 - \gamma_n)} \int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{-i\frac{R_0\psi''(1)}{2} y^2} dy + 0(\Delta_n), \qquad (17''')$$

где

$$\Delta_n = \max\left(\frac{R_0\delta^2 k_n}{R_0^2 + \gamma_n^2},\ R_0\delta^4 k_n \psi''(1)\right).$$

Для завершения доказательства леммы упростим

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{-i\frac{R_0\psi''(1)}{2} y^2} dy.$$

Введем новую переменную

$$\sqrt{\frac{R_0\psi''(1)}{2}}\, y = y' \quad (\psi''(1) > 0),$$

тогда

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{-i\frac{R_0\psi''(1)}{2} y^2} dy = \sqrt{\frac{2}{R_0\psi''(1)}} \int\limits_{-\sqrt{\frac{R_0\psi''(1)}{2}}\,\delta}^{\sqrt{\frac{R_0\psi''(1)}{2}}\,\delta} e^{-iy^2} dy =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{R_0\psi''(1)}}\int_{-\alpha_n}^{\alpha_n} e^{-iy^2}\,dy = \frac{\delta}{\alpha_n}\int_{-\alpha_n}^{\alpha_n} e^{-iy^2}\,dy, \tag{18}$$

где

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{R_0\psi''(1)}{2}}\,\delta.$$

Неравенство (17'''), в силу (18), запишется так

$$I(R_2, R_1) = \frac{k_n R_0 \delta e^{-i\varphi(R_0)}}{2\pi(iR_0-\gamma_n)\alpha_n}\int_{-\alpha_n}^{\alpha_n} e^{-iy^2}\,dy + 0(\Delta_n). \tag{19}$$

Этим справедливость (16) доказана.

Для вычисления $I(-R_1, -R_2)$ имеем

$$I(-R_1, -R_2) = \frac{k_n i}{2\pi i}\int_{-R_1}^{R_2}\prod_{\nu=0}^{n-1}\frac{iy+\gamma_\nu}{iy-\gamma_\nu}\,\frac{e^{-ity}\,dy}{iy-\gamma_n} =$$

$$= -\frac{k_n}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\exp\left\{-2i\sum_{0}^{n-1}\int_{0}^{y}\frac{\gamma_\nu\,du}{u^2+\gamma_\nu^2}+iyt\right\}}{-iy-\gamma_n}\,dy = -\frac{k_n}{2\pi}\int_{R_2}^{R_1}\frac{e^{i\varphi(y)}\,dy}{iy+\gamma_n}. \tag{20}$$

Повторяя теперь все выкладки, приведенные выше для вычисления $I(R_2, R_1)$, будем иметь

$$I(-R_1, -R_2) = -\frac{k_n R_0 \delta e^{i\varphi(R_0)}}{2\pi\alpha_n(iR_0+\gamma_n)}\int_{-\alpha_n}^{\alpha_n} e^{iy^2}\,dy + 0(\Delta_n). \tag{21}$$

Этим лемма доказана.

Теорема 1. *Для всякого* $0 < x < 1$, $t = \ln\frac{1}{x}$ *и достаточно большого* n, *справедливо соотношение*

$$x^{\frac{1}{2}}P_n(x) = \frac{\sqrt{2\gamma_n}\,R_0\delta}{\pi\alpha_n(R_0^2+\gamma_n^2)}\{(A_nR_0 - B_n\gamma_n)\sin\varphi(R_0) +$$

$$+ (B_nR_0 + A_n\gamma_n)\cos\varphi(R_0)\} + 0(\Delta_n^*), \tag{22}$$

где

$$A_n = 2\int_0^{\alpha_n}\cos x^2\,dx,\quad B_n = 2\int_0^{\alpha_n}\sin x^2\,dx,\quad \Delta_n^* = \max\left(\Delta_n, \frac{\sqrt{\gamma_n}}{\gamma_n\delta\psi''(1)}\right).$$

а R_0, $\varphi(y)$, $\psi(y)$ *определены в* (3), (4) *и* (6).

Доказательство. Заметим, что

$$x^{\frac{1}{2}}P_n(x)=-I(R_2,R_1)-I(-R_1,R_2)-I(0,R_2)-I(-R_2,0)-$$
$$-I(R_1,\infty)-I(-\infty,-R_1). \qquad (23)$$

Подставив в (23) значения всех слагаемых правой части соответственно из (11), (11′), (13), (13′), (16), (16′), будем иметь

$$x^{\frac{1}{2}}P_n(x)=\frac{1}{2\pi}\frac{k_nR_0\delta e^{i\varphi(R_0)}}{\alpha_n(R_0i-\gamma_n)}\int\limits_{-\alpha_n}^{\alpha_n}e^{-iy^2}dy+0(\Delta_n^*),$$

где

$$\Delta_n^*=\max\left(\Delta_n,\ \frac{1}{\delta\psi''(1)\sqrt{\gamma_n}}\right),$$

а

$$\Delta_n=\max\left\{\frac{R_0\delta^4\sqrt{\gamma_n}}{R_0^2+\gamma_n^2},\ R_0\delta^4\psi''(1)\sqrt{\gamma_n}\right\},$$

притом нетрудно заметить, что

$$\frac{2R_0^2}{R_0^2+\gamma_n^2}t<\psi''(1)<2t.$$

Для краткости обозначим

$$H_n=\frac{k_nR_0\delta}{2\pi\alpha_n}=\frac{\sqrt{2\gamma_n}R_0\delta}{2\pi\alpha_n}. \qquad (24)$$

Будем иметь

$$x^{\frac{1}{2}}P_n(x)=H_n\left\{\frac{e^{i\varphi(R_0)}(A_n+iB_n)}{R_0i+\gamma_n}-\frac{e^{-i\varphi(R_0)}(A_n-iB_n)}{R_0i-\gamma_n}\right\}+0(\Delta_n^*)=$$
$$=H_n\frac{e^{i\varphi(R_0)}(A_nR_0i-R_0B_n-A_n\gamma_n-iB_n\gamma_n)}{-R_0^2-\gamma_n^2}+$$
$$+\frac{e^{-i\varphi(R_0)}(A_nR_0i+B_nR_0+A_n\gamma_n-i\gamma_nB_n)}{R_0^2+\gamma_n^2}+0(\Delta_n^*)=$$
$$=H_n\left\{\frac{i(A_nR_0-B_n\gamma_n)}{-R_0^2-\gamma_n^2}(e^{i\varphi(R_0)}-e^{-i\varphi(R_0)})+\frac{R_0B_n+A_n\gamma_n}{R_0^2+\gamma_n^2}(e^{i\varphi(R_0)}+e^{-i\varphi(R_0)})+\right.$$
$$+0(\Delta_n^*)=$$
$$=2H_n\frac{A_nR_0-B_n\gamma_n}{R_0^2+\gamma_n^2}\sin\varphi(R_0)+2H_n\frac{R_0B_n+A_n\gamma_n}{R_0^2+\gamma_n^2}\cos\varphi(R_0)+0(\Delta_n^*).$$

Этим теорема доказана.

Следствие 1. *В условиях теоремы, если*

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{R_0\psi''(1)}{2}}\,\delta \to \infty, \text{ то}$$

$$x^{\frac{1}{2}} P_n(x) = \frac{\sqrt{\gamma_n R_0}}{(\gamma_n^2 + R_0^2)\sqrt{\frac{\pi R_0 \psi''(1)}{2}}} \{(\gamma_n + R_0)\cos\varphi(R_0) + (R_0 - \gamma_n)\sin\varphi(R_0)\} + o(\Delta_n^*). \tag{25}$$

Доказательство. Действительно, заметим прежде всего, что при $\alpha_n \to \infty$, когда $n \to \infty$

$$\int_0^{\alpha_n} \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + o(1),$$

$$\int_0^{\alpha_n} \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + o(1),$$

следовательно

$$A_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}} + 0(1), \quad B_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}} + o(1). \tag{26}$$

В силу (24) и (26) коэффициенты при $\sin\varphi(R_0)$ и $\cos\varphi(R_0)$ соотношения (22) запишутся так

$$2H_n \frac{A_n R_0 - B_n \gamma_n}{R_0^2 + \gamma_n^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{R_0 - \gamma_n}{R_0^2 + \gamma_n^2}\sqrt{\frac{\gamma_n R_0}{\psi''(1)}} + o\left(\frac{R_0 - \gamma_n}{R_0^2 + \gamma_n^2}\sqrt{\frac{\gamma_n R_0}{\psi''(1)}}\right),$$

$$2H_n \frac{B_n R_0 - A_n \gamma_n}{R_0^2 + \gamma_n^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{R_0 + \gamma_n}{R_0^2 + \gamma_n^2}\sqrt{\frac{\gamma_n R_0}{\psi''(1)}} + o\left(\frac{R_0 + \gamma_n}{R_0^2 + \gamma_n^2}\sqrt{\frac{\gamma_n R_0}{\psi''(1)}}\right).$$

Это значит, что в силу последних выкладок, (22) запишется так

$$x^{\frac{1}{2}} P_n(x) = \frac{1}{R_0^2 + \gamma_n^2}\sqrt{\frac{2\gamma_n R_0}{\pi\psi''(1)}}\{(R_0 + \gamma_n)\cos\varphi(R_0) + (R_0 - \gamma_n)\sin\varphi(R_0)\} + 0(\Delta_n^*) + o\left(\frac{R_0 + \gamma_n}{R_0^2 + \gamma_n^2}\sqrt{\frac{\gamma_n R_0}{\psi''(1)}}\right).$$

Этим следствие 1 доказано.

Следствие 2. *При* $0 < x < 1$, $\gamma_\nu = \nu + \frac{1}{2}$, $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ *и достаточно большом* n,

$$P_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{[x(1-x)]^{1/4}} \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) 2\arcsin\sqrt{x} + \frac{\pi}{4}\right] + o(1) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{[x(1-x)]^{1/4}} \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\arccos(2x-1)+\frac{\pi}{4}\right] + o(1). \quad (27)$$

Доказательство. Для доказательства нам нужно при больших n найти численные значения R_0, $\varphi(R_0)$ и $\psi''(1)$.

Из (3) следует, что R_0 определяется из уравнения

$$\ln\frac{1}{x} = 2\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\nu+\frac{1}{2}}{R_0^2+\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Зная, что при $n \to \infty$, $R_0 \to \infty$ с такой же быстротой как и n, используя известную теорему (см. [3], отд. II, гл. I, задачу 18), будем иметь

$$\ln\frac{1}{x} = \int_0^n \frac{2VdV}{R_0^2+V^2} + o(1),$$

$$\frac{1}{x} = \frac{R_0^2+n^2}{R_0^2} + o(1)$$

или

$$R_0^2(1-x) = n^2 x + o(R_0^2).$$

Значит

$$R_0 = n\sqrt{\frac{x}{1-x}} + o(1), \quad (\delta_0 < x < 1-\delta_0). \quad (28)$$

Вычислим теперь

$$\varphi(R_0) = R_0 \ln\frac{1}{x} - 2\sum_{\nu=0}^{n-1}\int_0^{R_0} \frac{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)du}{u^2+\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= R_0 \ln\frac{1}{x} - 2\sum_{\nu=0}^{n-1} \operatorname{arctg}\frac{R_0}{\nu+\frac{1}{2}}. \quad (29)$$

Для вычисления

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \operatorname{arctg}\frac{R_0}{\nu+\frac{1}{2}}$$

используем известную формулу (см. [3], отд. II, гл. IV, задачу 147)

$$\sum_{r_n \leqslant r} f(r_n) = N(r) f(r) - \int_0^r N(t) f'(t)\, dt.$$

Заметим, что у нас $N(t) = t+1$, значит

$$2\sum_{\nu=0}^{n-1}\operatorname{arctg}\frac{R_0}{\nu+\frac{1}{2}}=2n\operatorname{arctg}\frac{R_0}{n-\frac{1}{2}}+2R_0\int_0^{n-1}\frac{(t+1)\,dt}{R_0^2+\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}=$$

$$=2n\operatorname{arctg}\frac{R_0}{n-\frac{1}{2}}+R_0\ln\frac{R_0^2+\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}{R_0^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{R_0}\operatorname{arctg}\frac{n-\frac{1}{2}}{R_0}. \quad (30)$$

Простые выкладки показывают, что при больших n, в силу (28),

$$2n\operatorname{arctg}\frac{R_0}{n-\frac{1}{2}}=2n\operatorname{arctg}\frac{R_0}{n}+\sqrt{x(1-x)}+o(1), \quad (31)$$

$$\frac{1}{R_0}\operatorname{arctg}\frac{R_0}{n-\frac{1}{2}}=o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (32)$$

$$R_0\ln\frac{R_0^2+\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}{R_0^2+\frac{1}{4}}=R_0\ln\frac{R_0^2+n^2}{R_0^2}-\sqrt{x(1-x)}+o(1)=$$

$$=n\sqrt{\frac{x}{1-x}}\ln\frac{1}{x}-\sqrt{x(1-x)}+o(1). \quad (33)$$

В силу (31), (32) и (33) равенство (30) заменится соотношением

$$2\sum_{\nu=0}^{n-1}\operatorname{arctg}\frac{R_0}{\nu+\frac{1}{2}}=2n\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}}+n\sqrt{\frac{x}{1-x}}\ln\frac{1}{x}+o(1),$$

следовательно для $\varphi(R_0)$ получим

$$\varphi(R_0)=-2n\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}}+o(1). \quad (34)$$

Вычислим, наконец, $\psi''(1)$.

$$\psi''(1)=4R_0^2\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\gamma_\nu}{(R_0^2+\gamma_\nu^2)^2}=$$

$$=2R_0^2\int_0^n\frac{2u\,du}{(R_0^2+u^2)^2}+o(1)=2\frac{n^2}{R_0^2+n^2}+o(1)=2(1-x)+o(1). \quad (35)$$

Подставляя теперь значения R_0, $\varphi(R_0)$, $\psi''(1)$ соответственно из

(28), (34) и (35) в (25), учитывая еще, что при $\gamma_\nu = \nu + \frac{1}{2}$,

$$\nu = 0, 1, 2, \cdots, \quad O\left(\frac{k_n}{\gamma_n \delta \psi''(1)}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}\,\delta}\right), \quad O(\Delta_n) = o(n\delta^4)$$

и принимая $\delta = n^{-\frac{3}{10}}$, будем иметь

$$x^{\frac{1}{2}} P_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{n^2 \sqrt{\frac{x}{1-x}}}{2(1-x)}} \frac{1}{n^2\left(1 + \frac{x}{1-x}\right)} \left\{ n\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 1\right) \cos\varphi(R_0) - n\left(1 - \sqrt{\frac{x}{1-x}}\right) \sin\varphi(R_0) \right\} + o(1) =$$

$$= \frac{[x(1-x)]^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \left(1 + \sqrt{\frac{x}{1-x}}\right) \cos\left(2n \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \sqrt{\frac{x}{1-x}}\right) \sin\left(2n \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\right) \right\} + o(1).$$

Заметим далее, что

$$\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{1-x}} = \arcsin \sqrt{x}.$$

Тогда

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1-x}{x}\right)^{1/4} \left\{ \left(1 + \sqrt{\frac{x}{1-x}}\right) \cos(2n \arcsin \sqrt{x}) + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \sqrt{\frac{x}{1-x}}\right) \sin(2n \arcsin \sqrt{x}) \right\} + o(1). \tag{36}$$

Упростим теперь

$$T(x) = \left(1 + \sqrt{\frac{x}{1-x}}\right) \cos(2n \arcsin \sqrt{x}) +$$

$$+ \left(1 - \sqrt{\frac{x}{1-x}}\right) \sin(2n \arcsin \sqrt{x}).$$

Для краткости обозначим

$$\sqrt{\frac{x}{1-x}} = \beta, \quad \arcsin \sqrt{x} = \theta,$$

тогда

$$T(x) = (1 + \beta) \cos[(2n + 1)\theta - \theta] + (1 - \beta) \sin[(2n + 1)\theta - \theta] =$$

$$= (1+\beta)\,[\cos(2n+1)\theta\cos\theta + \sin(2n+1)\theta\sin\theta] +$$

$$+ (1-\beta)\,[\sin(2n+1)\theta\cos\theta - \cos(2n+1)\theta\sin\theta] =$$

$$= [(1+\beta)\sqrt{1-x} - (1-\beta)\sqrt{x}\,]\cos(2n+1)\theta +$$

$$+ [(1+\beta)\sqrt{x} + (1-\beta)\sqrt{1-x}]\sin(2n+1)\theta,$$

но

$$(1+\beta)\sqrt{1-x} - (1-\beta)\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

$$(1+\beta)\sqrt{x} + (1-\beta)\sqrt{1-x} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Это значит, что

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,[\cos(2n+1)\theta + \sin(2n+1)\theta] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}\sin\left[(2n+1)\arcsin\sqrt{x} + \frac{\pi}{4}\right]. \tag{37}$$

В силу (37), $P_n(x)$ запишется так

$$P_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{[x(1-x)]^{1/4}}\sin\left[(2n+1)\arcsin\sqrt{x} + \frac{\pi}{4}\right] + o(1).$$

Этим следствие 2 доказано.

Докажем теперь, что последняя формула совпадает с известной классической формулой (см., например, [4], стр. 80).

Обозначим

$$x' = 2x - 1 \quad \left(x = \frac{1+x'}{2}\right).$$

Тогда

$$2\arcsin\sqrt{x} = \arcsin 2\sqrt{x(1-x)} =$$

$$= \arcsin 2\sqrt{\frac{1+x'}{2}\left(1 - \frac{1+x'}{2}\right)} = \arcsin\sqrt{1-x'^2} = \arccos x',$$

а

$$x(1-x) = \frac{1-x'^2}{4}.$$

Это значит, что

$$P_n(x) = P_n\left(\frac{1+x'}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(1-x'^2)^{1/4}}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\arccos x' +\right.$$

$$\left. + \frac{\pi}{4}\right] + o(1).$$

Нетрудно заметить, что

$$\hat{X}_n(x') = \frac{P_n\left(\frac{1+x'}{2}\right)}{\sqrt{2}},$$

так как

$$\int_0^1 P_n^2(x)\,dx = \int_{-1}^{1} P_n^2\left(\frac{1+x'}{2}\right)\frac{dx'}{2} = 1.$$

Следовательно для $\hat{X}_n(x)$ получаем

$$\hat{X}_n(x) = \left(\frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}\right)^{1/2} \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\arccos x + \frac{\pi}{4}\right] + o(1).$$

В связи с формулой (22) следует отметить, что с увеличением быстроты роста последовательности $\{\gamma_\nu\}$ нули $P_n(x)$ сгущаются к концам сегмента $[0, 1]$.

Отметим, что предложенный в настоящей работе метод можно применить к нахождению асимптотики $P_n^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, \cdots$, а также неопределенного интеграла от $P_n(x)$ любой кратности.

Отметим, наконец, что этим путем, в силу формулы (1.14) работы [1], можем найти асимптотику полиномов Лагерра, а также их производных и интегралов любого порядка. То же самое можно сделать для полиномов Эрмита.

Этим вопросам будет посвящена отдельная статья.

Ереванский государственный университет Поступила 20 I 1960

Հ. Վ. Բադալյան

ԼԵԺԱՆԴՐԻ ՔՎԱԶԻ-ՊՈԼԻՆՈՄՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄԸ ԻՆԴԵՔՍԻ ՄԵԾ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատության մեջ ուսումնասիրված է

$$P_n(x) = x^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2\gamma_n}}{2\pi i} \int_C \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{\zeta+\gamma_\nu}{\zeta-\gamma_\nu} \frac{x^{\zeta} d\zeta}{\zeta-\gamma_n}$$

Լեժանդրի քվազի բազմանդամի ասիմպտոտիկ վարքը մեծ n-երի համար, երբ $x \in (0, 1)$, $\frac{1}{2} = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots \to \infty$։

Ապացուցված է՝

Թ ե ո ր ե մ ա. Ցանկացած $x \in (0, 1)$ և բավականաչափ մեծ n-երի համար տեղի ունի հետևյալ առնչությունը՝

$$x^{\frac{1}{2}} P_n(x) = \frac{k_n R_0^{\frac{1}{2}}}{\pi \alpha_n (R_0^2 + \gamma_n^2)} \{(A_n R_0 - B_n \gamma_n) \sin\varphi(R_0) +$$

$$+ (B_n R_0 + A_n \gamma_n) \cos\varphi(R_0)\} + 0(\Delta_n^*),$$

որտեղ R_0-ն որոշված է որպես

$$\ln \frac{1}{x} - 2 \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\gamma_\nu}{R_0^2 + \gamma_\nu^2} = 0$$

հավասարման դրական արմատ (որը միակն է),

$$A_n = 2 \int_0^{\alpha_n} \cos x^2 dx, \quad B_n = 2 \int_0^{\alpha_n} \sin x^2 dx,$$

$$\Delta_n^* = \max \left\{ \frac{R_0 \delta^2 k_n}{R_0^2 + \gamma_n^2}, \quad R_0 \delta^4 k_n \psi''(1), \quad \frac{k_n}{\gamma_n \delta \psi''(1)} \right\},$$

$$k_n = \sqrt{2\gamma_n}, \quad \psi''(1) = 4R_0^2 \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\gamma_\nu}{(R_0^2 + \gamma_\nu^2)^2},$$

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{R_0 \psi''(1)}{2}}\, \delta,$$

իսկ $\delta > 0$-ն ընտրվում է այնպես, որ Δ_n^* հնարավորին չափ փոքր լինի:

Այն դեպքում, երբ

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{R_0 \psi''(1)}{2}}\, \delta \to \infty,$$

ստացվում է

$$x^{\frac{1}{2}} P_n(x) = \frac{\sqrt{\gamma_n R_0}}{(\gamma_n^2 + R_0^2) \sqrt{\frac{\pi R_0 \psi''(1)}{2}}} \{(\gamma_n + R_0) \cos\varphi(R_0) +$$

$$+ (R_0 - \gamma_n) \sin\varphi(R_0)\} + 0(\Delta_n^*),$$

իսկ, երբ $\gamma_\nu = \nu + \dfrac{1}{2}$, *ապա փոփոխականի անհրաժեշտ փոխարինումից հետո ստանում ենք Լեժանդրի կլասիկ բազմանդամների ասիմպտոտիկ ներկայացումը* $(-1, +1)$ *միջակայքում:*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бадалян Г. В.* Обобщение многочленов Лежандра и некоторые их приложения. „Известия АН АрмССР", **8**, № 5, 1955.
2. *Бадалян Г. В.* Обобщение многочленов Лежандра и некоторые их приложения „Известия АН АрмССР", **9**, № 1, 1956.
3. *Полиа Г.* и *Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Часть I, Издательство технико-теоретической литературы. М., 1956.
4. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. Издательство технико-теоретической литературы. М., 1953.