

А. Г. Багдоев, Э. М. Нерсисян

Определение давления на фронте ударной волны в полупространстве

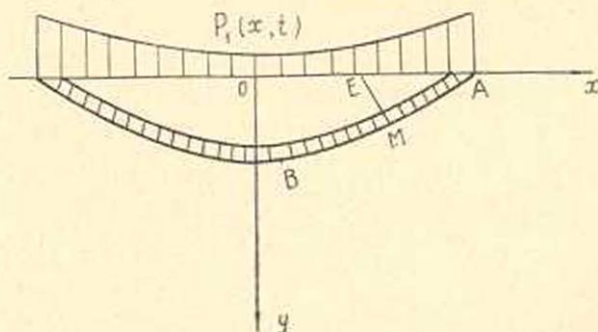
Рассматривается задача о распространении давления в сжимаемую жидкость, занимающую нижнее полупространство. Движение жидкости предполагается осесимметричным. Уравнение состояния жидкости политропическое

$$P=B(s) (\rho^{\gamma} - \rho_0^{\gamma}), \quad (1)$$

где ρ и P означают плотность и давление в жидкости, s — энтропию.

Обозначим через O точку возникновения давления на поверхности. Направим ось Ox по свободной поверхности жидкости, ось Oy — перпендикулярно вниз.

В настоящей работе вычисляется распределение давления на ударной волне, идущей в жидкости (линия AB на фиг. 1).



Фиг. 1.

В предположении малости движения жидкости этот вопрос разрешен в работе [2]. Здесь мы пользуемся следующим приближением, уточняющим линейную теорию.

Рассмотрим реальный случай, когда давление на поверхности резко падает со временем. Тогда основная часть давления в возмущенной жидкости будет сосредоточена в узкой прифронтной области (заштрихованная область фиг. 1).

Предположим, что до начала движения жидкость была однородной, хотя случай неоднородной жидкости получится столь же просто.

Для определения давления в точке M фронта, используем соотношение вдоль луча ME , полученное в работе К. Е. Губкина [1]

$$P = \alpha P_{ak}, \quad (2)$$

где α определяется по значению давления в точке E , P_{ak} соответствует линейному случаю [2]

$$P_{ak} = \frac{\alpha_0 \sqrt{\frac{R(t_0)}{x}}}{L(t)} = \frac{\sqrt{-\frac{R'^3(t_0) \sin^2 \theta}{a_0^2 R''(t_0)}}}{L(t)} \sqrt{\frac{R(t_0)}{x}}, \quad (3)$$

$$\text{где } L(t) = \sqrt{t - t_0 - \frac{R'^3(t_0) \sin^2 \theta}{a_0^2 R''(t_0)}}, \quad \cos \theta = \frac{a_0}{R'(t_0)},$$

a_0 — скорость звука в невозмущенной жидкости, $x = R(t)$ — координата фронта на поверхности, t — время, t_0 определяется уравнением

$$t_0 = t - \frac{1}{a_0} \sqrt{[x - R(t_0)]^2 + y^2}. \quad (4)$$

Уравнение фронта бегущей ударной волны [1] в наших обозначениях запишется

$$\frac{x}{\cos \theta} = a_0(t - t') + \alpha \alpha_0 \frac{\gamma + 1}{2} \sqrt{\frac{R(t')}{\rho_0 a_0 L(t) \sqrt{x_t}}} \int_{t'}^t \frac{dt}{\rho_0 a_0 L(t) \sqrt{x_t}} + f(x), \quad (5)$$

где $x_t = R(t') + a_0(t - t') \cos \theta$.

Здесь ρ_0 — начальная плотность жидкости, t' — момент прохождения фронта через точку E , $f(x)$ определяется из условия в точке E

$$\frac{R(t')}{\cos \theta} = a_0(\zeta - t') + \alpha \alpha_0 \frac{\gamma + 1}{2} \int_{t'}^{\zeta} \frac{\sqrt{R(t')}}{\rho_0 a_0 L(t) \sqrt{x_t}} dt + f(x), \quad (6)$$

ζ — момент возникновения последовательных волн N_n [1] в точке E , определяемый из граничного условия [2]

$$P_1[R(t'), \zeta] = \frac{\alpha_0 \alpha}{L(\zeta)}, \quad (7)$$

$P_1(x, t)$ — распределение давления на поверхности за фронтом. Для исключения параметра α воспользуемся соотношением вдоль ударной волны (2.7) работы [1]

$$\frac{\alpha_0 \alpha^2}{\rho_0 a_0} \int_{R(t')}^x \frac{\sqrt{R(t')}}{\sqrt{x} L(t) \cos \theta} dx = \frac{4}{\gamma + 1} \int_{\zeta}^t \alpha f'(x) dx. \quad (8)$$

Если вспомнить значение L , (6) упрощается

$$f'(\zeta) = -a - P_1[R(t'), \zeta] \frac{\gamma+1}{2} \sqrt{R(t')} \frac{1}{a_0^2 \rho_0} - \frac{1}{V x_2} - \frac{d}{d\zeta} \{P_1[R(t'), \zeta] L(\zeta)\} \times \\ \times \frac{\gamma+1}{2} \frac{\sqrt{R(t')}}{a_0 \rho_0} \left(\frac{2}{1 - a_0 \cos \theta} \ln \frac{\sqrt{x_2} + \sqrt{a_0 \cos \theta} L(\zeta)}{\sqrt{R(t')} + \sqrt{a_0 \cos \theta} L(t')} \right). \quad (9)$$

Если подставить $f(x)$ из (9) и x из (7) в (8), получим уравнение, определяющее ζ в функции координат точки M ударной волны.

Полученное значение ζ нужно подставить в значение давления вдоль луча в точке M , которое можно записать в виде

$$P = P_1[R(t'), \zeta] \frac{L(\zeta)}{L(t')} \sqrt{\frac{R(t')}{x}}. \quad (10)$$

Значение t' получится из уравнения $\zeta = t'$. Уравнение для t' получится, если вычесть (6) из (5).

$$\frac{x - R(t')}{\cos \theta} = a_0(t - t') + P_1[R(t'), t'] L(t') \frac{\gamma+1}{2} \int_{t_0}^t \frac{\sqrt{R(t')}}{\rho_0 a_0 L(t') \sqrt{x_2}} dt. \quad (11)$$

Если пренебречь вторым слагаемым в (11), имеем

$$t' = t_0.$$

Таким образом, в точке M давление определяется из (10), где ζ определяется в функции координат точки M с помощью соотношений (8), (7) и (9)

$$\frac{1}{\rho_0 a_0^2} L^2(\zeta) \{P_1[R(t'), \zeta]\}^2 \int_{R(t')}^x \frac{\sqrt{R(t')}}{\sqrt{x \cos \theta} \sqrt{\frac{x - R(t_0)}{a_0 \cos \theta} - \frac{R^2(t_0) \sin^2 \theta}{a_0^2 R''(t_0)}} dx = \\ = \frac{4}{\gamma+1} \int_{\zeta}^t P_1[R(t'), \zeta] L(\zeta) f'(\zeta) d\zeta. \quad (12)$$

Все соотношения, полученные в работе [1], выведены для идеального газа; они остаются верными и для среды с уравнением состояния (1), поскольку исходные уравнения, из которых они выводятся, в обоих случаях совпадают.

Однако, при вычислении скорости звука a_0 нужно пользоваться уже формулой

$$a_0 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P \rho^{-1}}{\rho^1 - \rho_0^1}.$$

Уравнение (12) можно записать в более простом виде

$$L^2(\zeta) P_1^2[R(t'), \zeta] \frac{\sqrt{R(t')}}{\rho_0 a_0^2 \cos \theta} \left\{ 2 \sqrt{a_0 \cos \theta} \ln \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a_0 \cos \theta} L(t)}{\sqrt{R(t')} + \sqrt{a_0 \cos \theta} L(t')} \right\} =$$

$$= \frac{4}{\gamma+1} \int_0^t P_1[R(t'), \zeta] L(\zeta) f'(\zeta) d\zeta. \quad (12')$$

Для иллюстрации полученных формул были проведены расчеты для частного закона давления на поверхности (достаточно резко падающее со временем давление)

$$P_1(x, t) = (3 - 50t)^2 \kappa z / \text{см}^2,$$

$$R(t) = 340(3t - 25t^2),$$

для жидкости с параметрами $\gamma=7$, $a_0=200 \text{ м/сек}$; $\rho=100 \frac{\kappa z \text{ сек}^2}{\text{м}^4}$ в момент времени $0,01 \text{ сек}$.

Результаты расчетов по формуле (3) дают давление на ударной волне для акустического случая.

Результаты расчетов по формулам (9), (10) и (12) дают давление на ударной волне по уточненным формулам.

Таблица 1

x	P_1	P_{ak}	P	y
9,35	6,25	6,25	6,25	0
8	6,67359	6,63014	6,61357	0,32091
7	6,97932	6,90438	6,86112	0,550195
6	7,27893	7,17531	7,12437	0,77777
5	7,59421	7,40864	7,31014	0,99907
4	7,90054	7,61813	7,55735	1,21525
3	8,20611	7,76346	7,70017	1,42745
2	8,51642	7,74611	7,68362	1,6392
1	8,81532	6,96137	6,92622	1,83895
0,5	8,96721	4,22587	4,2060	1,93963

В таблице 1 $y=f(x, t)$ является уравнением ударной волны при $t=0,01 \text{ сек}$.

Как видно из таблицы 1, при $t=0,01 \text{ сек}$, нелинейные добавки будут незначительными и, следовательно, линейная теория достаточно хорошо описывает явление. Очевидно, что для больших моментов времени ($t \sim 0,06$), когда давление достаточно затухнет, нелинейные добавки станут существенными.

Например, при $t=0,04$ в точках $x=2$ имеем $P_{ak}=4,0915$, $P=3,6522$. Здесь нелинейная добавка порядка $10^0/0$.

Для более резко падающих давлений нелинейные добавки будут еще значительнее.

Ա. Գ. Բագդոևի, է. Մ. Ներսիսյան

ՃՆՇՄԱՆ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ՀԱՐՎԱԾՈՂ ԱԼԻՔԻ ՃԱԿԱՏՈՒՄ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Տվյալ աշխատությունում դիտարկվում է ստորին կիսատարածությունը զրադեցրած սեղմվող հեղուկի մեջ ճնշման տարածման խնդիրը:

Հաշվվում է ճնշման բաշխումը հեղուկի մեջ տարածվող հարվածող ալիքի վրա:

Նույն հարցը հեղուկի փոքր շարժումների համար լուծված է [2] աշխատությունում: Այստեղ մենք որոշում ենք հաջորդ մոտավորությունը, որը ճշտում է տեսությունը:

Աշխատությունում բերվում են հաշվման արդյունքները, որոնք ցույց են տալիս ոչ-դժախն ֆակտորների ազդեցությունը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Губкин К. Е. Распространение разрывов в звуковых волнах. ПММ, т. XXII, вып. 4 1958.
2. Багдоев А. Г. Распространение давления в упругом полупространстве. ДАН Арм. ССР, т. XXVIII, № 2, 1959.