

Г. М. Гарибян, О. С. Мержелян

Излучение заряда, пролетающего параллельно границе раздела сред

Задача об излучении заряженной частицы, пролетающей параллельно границе раздела двух сред [1]-[4] решена методом, предложенным [5], [6] одним из авторов. Использование этого метода позволяет весьма простым способом решить эту задачу и получить некоторые новые результаты, относящиеся в основном к излучению в той среде, где движется сама частица.

1. Поля излучения в общем случае

Пусть заряд e пролетает на расстоянии a от границы раздела двух сред, находясь в среде с диэлектрической постоянной ϵ_1 , а вторая среда обладает диэлектрической постоянной ϵ_2 ($\mu_1 = \mu_2 = 1$). Граница раздела сред есть плоскость $z = a$, а координаты заряда равны $x = z = 0$, $y = vt$. Поле во второй среде будет решением однородных уравнений Максвелла, тогда как в первой среде оно будет складываться из решений неоднородных и однородных уравнений. Решениями неоднородных уравнений являются поля (см., например, [7], [5])

$$E(r, t) = \int E(k) e^{i(kr - \omega t)} dk \text{ и т. п.,}$$

$$E(k) = \frac{ei}{2\pi^2} \frac{1}{\epsilon_1} \frac{\frac{\omega}{c^2} \epsilon_1 v - k}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1},$$

$$H(k) = \frac{\epsilon_1}{c} [v, E(k)],$$
(1)

где $m = kv = k_y v$, $dk = dk_x \frac{d\omega}{v} dk_z$. Решения однородных уравнений будем искать в виде

$$E_{1,2}(r, t) = \int E_{1,2}(k) e^{i(k_x x + \frac{\omega}{v} y + \omega_{1,2} z - \omega t)} dk \text{ и т. п.,}$$
(2)

причем $\alpha_{1,2}^2 = \frac{\omega^2}{v^2} (\beta^2 \varepsilon_{1,2}^2 - 1) - k_x^2$. Из физических соображений очевидно (см. [5]), что у α_1 действительная и мнимая части должны быть отрицательны, а у α_2 — положительны. Если обозначить через n_x, n_y, n_z орты координатных осей, то из однородных уравнений Максвелла получим

$$H_{1,2}(k) = \frac{c}{\omega} \left(n_x k_x + n_y \frac{\omega}{v} + n_z \alpha_{1,2}, E'_{1,2}(k) \right), \quad (3)$$

а также условие поперечности полей

$$k_x E'_{1,2x}(k) + \frac{\omega}{v} E'_{1,2y}(k) + \alpha_{1,2} E'_{1,2z}(k) = 0. \quad (4)$$

Фурье-компоненты полей излучения определяются из граничных условий для полных полей при $z=a$ и имеют вид

$$\begin{aligned} E'_{1x}(k) &= k_x \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \alpha_1 + k_z - \alpha_1 - \alpha_2 \right) A_1, \\ E'_{1z}(k) &= \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \alpha_1^2 - k_z \alpha_2 \right) A_1, \\ E'_{2x}(k) &= k_x (k_z - \alpha_1) A_2, \\ E'_{2z}(k) &= \alpha_1 (\alpha_1 - k_z) A_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$A_{1,2} = \frac{ei}{2\pi^2} \frac{e^{i(k_z - \alpha_{1,2})a}}{\left(\varepsilon_2 \alpha_1 - \varepsilon_1 \alpha_2 \right) \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \right)}.$$

Для определения этих компонент были использованы граничные условия как для электрических, так и для магнитных полей в отличие от симметричных задач, где достаточно воспользоваться только условиями для электрических полей (см., например, [5], [8]). Это обстоятельство связано с тем, что сейчас магнитное поле имеет, как это видно из формул (3), (5), также и составляющую вдоль направления движения частицы.

Для получения частотного спектра полей излучения надо провести в формулах (2) с компонентами (5) интегрирование по k_z и k_x . Интегрирование по k_z в полях излучения сводится для обеих сред к взятию вычета в точке

$$k_z = + \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} \xi_{1,2}^2 - k_x^2}, \quad \text{где} \quad \xi_{1,2}^2 = \beta^2 \varepsilon_{1,2} - 1.$$

Интегрирование по k_x необходимо провести отдельно для каждой из сред.

2. Поля излучения во второй среде

Интегрирование по k_x произведем методом перевала, что даст нам поля на больших расстояниях от границы раздела сред. Обозначим через ρ расстояние от проекции траектории частицы на плоскость раздела сред до исследуемой точки поля:

$$z-a=\rho \cos \theta, \quad x=\rho \sin \theta.$$

Интегрирование проведем на примере E'_{2z} , которое теперь имеет вид

$$E'_{2z} = \frac{e}{\pi v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} \xi_1^2 - k_x^2}}{\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} \xi_1^2 - k_x^2} + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} \xi_2^2 - k_x^2}} e^{i \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} \xi_1^2 - k_x^2} a} e^{i f(k_x) \rho} dk_x d\omega, \quad (6)$$

где $f(k_x) = ik_x \sin \theta + i \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} \xi_2^2 - k_x^2} \cos \theta$. Точкой перевала будет $k_x = \frac{\omega}{v} \xi_2 \sin \theta$ (под $\xi_{1,2}$ мы будем понимать положительное значение квадратного корня). Дальнейшие действия аналогичны проведенным в [5] и в результате получим

$$E'_{2z} = \frac{e}{v} \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{i \frac{\omega}{v} \xi_2} \frac{\cos \theta \sqrt{\xi_1^2 - \xi_2^2 \sin^2 \theta}}{\varepsilon_1 \xi_2 \cos \theta + \varepsilon_2 \sqrt{\xi_1^2 - \xi_2^2 \sin^2 \theta}} e^{i \frac{\omega}{v} \sqrt{\xi_1^2 - \xi_2^2 \sin^2 \theta} a} \times \\ \times e^{i \frac{\omega}{v} (y + \xi_2 \rho - vt)} d\omega \quad (7)$$

для $\xi_1^2 - \xi_2^2 \sin^2 \theta > 0$ и

$$E'_{2z} = \frac{e}{v} \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{i \frac{\omega}{v} \xi_2} \frac{\cos \theta \frac{i|\omega|}{\omega} \sqrt{\xi_2^2 \sin^2 \theta - \xi_1^2}}{\varepsilon_1 \xi_2 \cos \theta + \varepsilon_2 \frac{i|\omega|}{\omega} \sqrt{\xi_2^2 \sin^2 \theta - \xi_1^2}} e^{-\frac{|\omega|}{v} \sqrt{\xi_2^2 \sin^2 \theta - \xi_1^2} a} \times \\ \times e^{i \frac{\omega}{v} (y + \xi_2 \rho - vt)} d\omega \quad (8)$$

для $\xi_1^2 - \xi_2^2 \sin^2 \theta < 0$. Приведем также формулы для остальных компонент полей при $\xi_1^2 - \xi_2^2 \sin^2 \theta > 0$

$$E'_{2x} = \frac{e}{v} \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_2 \xi_1 \sin \theta \cdot \cos \theta e^{i \frac{\omega}{v} \gamma_2 a + \gamma_2} d\omega, \\ E'_{2y} = -\frac{e}{v} \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_2 \xi_1 \eta \cos \theta e^{i \frac{\omega}{v} \gamma_2 a + \gamma_2} d\omega, \quad (9)$$

$$H'_{2x} = \frac{ec}{v^2} \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_2 (\xi_2^2 \eta \cos \theta + \nu_2) \cos \theta e^{i \frac{\omega}{v} \nu_2 a + \gamma_2} d\omega,$$

$$H'_{2y} = \frac{ec}{v^2} \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_2 \xi_2 (\xi_2 \cos \theta - \nu_2) \sin \theta \cos \theta e^{i \frac{\omega}{v} \nu_2 a + \gamma_2} d\omega.$$

При этом были введены обозначения

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{\sqrt{i \frac{\omega}{v} \xi_2}}{\varepsilon_1 \xi_2 \cos \theta + \varepsilon_2 \nu_2}, & \gamma_2 &= i \frac{\omega}{v} (y + \xi_2 z - vt), \\ \eta &= \xi_2 \sin^2 \theta + \nu_2 \cos \theta, & \nu_2 &= \sqrt{\xi_1^2 - \xi_2^2 \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (10)$$

В случае когда $\xi_1^2 - \xi_2^2 \sin^2 \theta < 0$ формулы для полей получатся заменой $\sqrt{\xi_1^2 - \xi_2^2 \sin^2 \theta} \rightarrow i \frac{|\omega|}{\omega} \sqrt{\xi_2^2 \sin^2 \theta - \xi_1^2}$. Поля задаваемые формулами (7)–(9) имеют место для $\rho \gg \lambda / \xi_2 \tan^2 \theta$, где λ – длина волны излучения, деленная на 2π . Это ограничение связано с использованием метода перевала.

Вычислим количество энергии, которое пройдет за все время пролета частицы через цилиндрическую полосу единичной ширины и радиуса ρ , расположенную во второй среде

$$\frac{d\omega}{dy} = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} [E_x H_y]_{\rho} \cdot \rho d\theta dt = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (E_x H_y - E_y H_x) \frac{\rho d\theta dt}{\cos \theta} \quad (11)$$

В области, где $\xi_1^2 - \xi_2^2 \sin^2 \theta > 0$ получим

$$\frac{d\omega}{dy} = \frac{2e^2 c^2}{\pi v^4} \int_{\xi_2^2 > 1} d\omega \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{(\xi_1^2 + \eta^2 \xi_2^2) \xi_2^2}{(\varepsilon_1 \xi_2 \cos \theta + \varepsilon_2 \nu_2)^2} \cos^2 \theta d\theta. \quad (12)$$

В области же, где $\xi_1^2 - \xi_2^2 \sin^2 \theta < 0$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dy} &= \frac{2e^2 c^2}{\pi v^4} \int_{\xi_2^2 > 1} d\omega \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\xi_2^2 [\xi_2^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \sin^2 \theta - \varepsilon_2 \xi_1^2] \xi_2^2 \cos^2 \theta}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) [(\varepsilon_2 + \varepsilon_1) \cos^2 \theta + \xi_2^2 \sin^2 \theta - \varepsilon_1 \cos^2 \theta]} \times \\ &\times e^{-2a \frac{\omega}{v} \sqrt{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \xi_2^2 - \xi_1^2 \cos^2 \theta}} d\theta. \end{aligned} \quad (13)$$

При выводе формул (12) и (13) полагалось $\xi_2^2 > 0$. В противном

случае, как видно из (7)–(9), излучение отсутствует. Кроме того, для простоты мы полагали среды прозрачными. Формулы (12) и (13) были впервые получены Пафомовым [3].

Для анализа полученных формул удобно рассмотреть два отдельных случая. В первом случае будем считать $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Тогда очевидно, что $\xi_1^2 < \xi_2^2$ и могут иметь место следующие случаи:

а) $\xi_1^2 < 0$, $\xi_2^2 > 0$, т. е. первая среда является нечеренковской, а вторая — черенковской средой. В этом случае для вектора Пойтинга имеет место формула (13), которая описывает черенковское излучение генерированное частицей во второй среде. На возможность такого эффекта впервые указали Гинзбург и Франк [8];

б) $\xi_1^2 > 0$, $\xi_2^2 > 0$, т. е. обе среды являются черенковскими. В этом случае для углов $\sin^2 \theta < \xi_1^2 / \xi_2^2$ будет иметь место формула (12), которая описывает черенковское излучение, образовавшееся в первой среде и прошедшее во вторую. Это следует из того, что формула (12) не зависит от α и помимо этого при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ она переходит в формулу Тамма и Франка. Для углов же $\sin^2 \theta > \xi_1^2 / \xi_2^2$ будет справедлива формула (13), которая дает черенковское излучение, образовавшееся во второй среде. Оба этих потока движутся под черенковскими углами характерными для второй среды, что видно из формул (7)–(9).

Тот факт, что излучение, образовавшееся в первой среде и прошедшее во вторую, движется под черенковским углом второй среды получается также из следующих простых соображений. Из закона

преломления имеем $\frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$, откуда имея в виду, что $\cos \theta_1 = \frac{1}{\beta \sqrt{\varepsilon_1}}$

получаем

$$\cos \theta_2 = \frac{1}{\beta \sqrt{\varepsilon_2}}. \quad (14)$$

Во втором случае, когда $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, имеем $\xi_1^2 > \xi_2^2$ и формула (13) не имеет места, т. е. во второй среде излучение не генерируется.

При этом оказывается возможным только случай $\xi_1^2 > 0$, $\xi_2^2 > 0$ описываемый формулой (12), т. е. во второй среде распространяется только излучение, пришедшее из первой.

Отмеченный выше факт, что при $\xi_2^2 < 0$ во второй среде не будет излучения даже если первая среда черенковская, легко понять из формулы (14), которая показывает, что излучение, идущее из первой среды, испытывает на границе полное внутреннее отражение.

3. Поля в первой среде

Для получения частотного спектра полей необходимо произвести интегрирование по переменной k_z , которое производится аналогично тому, как это делалось в предыдущем разделе. Введем расстояние ρ от траектории частицы до исследуемой точки поля: $x = \rho \sin \theta$, $z = -\rho \cos \theta$.

Так как в первой среде поле является суммой решений неоднородных и однородных уравнений Максвелла, то приведем сначала решения неоднородных уравнений на больших расстояниях

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{e}{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon_1} \sqrt{i \frac{\omega}{v} \xi_1} \sin\theta e^{\gamma_1} d\omega, \\ E_y &= -\frac{e}{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi_1}{\varepsilon_1} \sqrt{i \frac{\omega}{v} \xi_1} e^{\gamma_1} d\omega, \\ E_z &= -E_x \operatorname{ctg} \theta, \quad H = \beta \varepsilon_1 [n_y, E], \end{aligned} \quad (15)$$

где ε_1 в последней формуле надо понимать внесенной под знак интеграла по частотам, а γ_1 получается из γ_2 [см. формулу (10)] заменой индексов 1 и 2.

Для полей излучения получим выражения

$$\begin{aligned} E'_{1z} &= \frac{e}{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_1 (\varepsilon_2 \xi_1 \cos\theta - \varepsilon_1 \nu_1) \cos\theta e^{\gamma_1 + 2i\frac{\omega}{v} a \cos\theta} d\omega, \\ E'_{1x} &= -\frac{e}{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_1 (\varepsilon_2 \xi_1 \cos\theta + \varepsilon_1 \nu_1 - 2\varepsilon_1 \xi_1 \cos\theta) \sin\theta e^{\gamma_1 + 2i\frac{\omega}{v} a \cos\theta} d\omega, \quad (16) \\ E'_{1y} &= \frac{e}{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_1 \xi_1 (\varepsilon_2 \xi_1 \cos\theta + \varepsilon_1 \nu_1 (\sin^2\theta - \cos^2\theta) - 2\varepsilon_1 \xi_1 \cos\theta \cdot \sin^2\theta) \times \\ &\quad \times e^{\gamma_1 + 2i\frac{\omega}{v} a \cos\theta} d\omega, \end{aligned}$$

где ξ_1 и ν_1 получаются из формул (10) заменой индексов 1 и 2. Формулы написаны для случая $\xi_2^2 - \xi_1^2 \sin^2\theta > 0$. В обратном случае надо произвести замену, указанную в предыдущем пункте.

Наконец, для магнитных полей мы можем написать равенства

$$\begin{aligned} H'_{1x} &= \frac{1}{\beta} (E'_{1z} + \xi_1 \cos\theta E'_{1y}), \\ H'_{1y} &= -\frac{1}{\beta} (\xi_1 \cos\theta E'_{1x} + \xi_1 \sin\theta \cdot E'_{1z}), \\ H'_{1z} &= \frac{1}{\beta} (\xi_1 \sin\theta E'_{1y} - E'_{1x}). \end{aligned} \quad (17)$$

В этих формулах величину ξ_1 также надо понимать внесенной под знак интеграла по частотам.

Поток электромагнитной энергии в первой среде будет складываться из потока черенковского поля, непосредственно созданного частицей, того же потока, но отраженного от границы раздела сред и их ин-

терференции. Формула для полного потока задается выражением (11), в котором под полями надо понимать сумму (15)–(17). Приведем эту формулу для того случая, когда вторая среда является идеальным проводником ($\varepsilon_2 = \infty$)

$$\frac{dw}{dy} = \frac{e^2}{2c^2\pi} \int_{\beta^2 \varepsilon_1 > 1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \varepsilon_1}\right) \left(2 - e^{-2i\frac{\omega}{v}\varepsilon_1 a \cos \theta} - e^{2i\frac{\omega}{v}\varepsilon_1 a \cos \theta}\right) d\omega d\theta. \quad (18)$$

Из последней формулы видно, что в случае прозрачных сред для данных a и θ существуют также частоты, определяемые соотношением $2\frac{\omega}{v}\varepsilon_1 a \cos \theta = (2n+1)\pi$, интенсивность которых учетверяется по сравнению с интенсивностью в однородной среде.

В то же время для частот ω таких, что $2\frac{\omega}{v}\varepsilon_1 a \cos \theta = 2n\pi$, соответствующая интенсивность равна нулю за счет интерференции с отраженным излучением. Что же касается отмеченного выше увеличения интенсивности, то оно происходит как за счет отраженного излучения, так и за счет частотного перераспределения интенсивности вследствие интерференции.

В заключение отметим, что к рассмотренной нами задаче можно подойти также как к частному случаю более общей задачи о наклонном падении заряда на границу раздела двух диэлектриков [6] (положив $v_z = 0$). Однако простое сравнение трехмерных фурье-компонент задачи, полученных указанными выше двумя разными способами, показывает, что они между собой не совпадают. Как нетрудно видеть, это связано с тем, что в задаче рассмотренной в [6] при сшивке полей необходимо было учитывать решения неоднородных уравнений Максвелла в каждой из сред. Совпадение имеет место только при сравнении проинтегрированных по k_x и k_z выражений для полных полей, и таким образом оба подхода к задаче приводят к одинаковому результату.

Физический институт АН Армянской ССР,
Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 5 I 1960

Գ. Մ. Ղափրյան, Լ. Ս. Մերգելյան

ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐԻ ԲԱԺԱՆՄԱՆ ՍԱՀՄԱՆԻՆ ԶՈՒԳԱՆԵՐԻ ՇԱՐԺՎՈՂ ԼԻՑԻԻ ՃԱՌԱԳԱՅՔՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկված է միջավայրերի բաժանման սահմանին դուրս
հեռ շարժվող լիցքի ճառագայթումը: Ստացված են բանաձևեր՝ դաշտերի և էներ-
գիայի հոսքի համար հրկրորդ միջավայրում, ինչպես նաև հետազոտված են
9 Известия АН, серия физ.-мат. наук, № 2

էլեկտրական և մագնիսական դաշտերն առաջին միջավայրում: Յուր է արված, որ արդյունքները կարող են ստացվել որպես ավելի ընդհանուր խնդրի մասնավոր դեպք:

ЛИТЕРАТУРА

1. Danos M. Излучение заряда протяженными электронными пучками. Journ. Appl. Phys., 26, 2, 1955. (Русский перевод см. Миллиметровые и субмиллиметровые волны. Москва — 1959).
2. Linhart J. G. Излучение Черенкова электронами, движущимися параллельно границе диэлектрика. Journ. Appl. Phys., 26, 527, 1955 (Русский перевод см. там же).
3. Пафомов В. Е. Излучение точечного заряда, летящего вдоль границы раздела двух сред. ЖЭТФ, 32, 610, 1957.
4. Ситенко А. Г., Ткалич В. С. Об эффекте Черенкова при движении заряда над границей раздела двух сред. ЖЭТФ, 29, 1074, 1959.
5. Гарибян Г. М. К теории переходного излучения. ЖЭТФ, 33, 1403, 1957.
6. Гарибян Г. М. К теории переходных эффектов в электродинамике. Изв. АН Арм. ССР, 11, № 4, 1958.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Москва, 1957.
8. Гинзбург В. Л., Франк И. М. Излучение электрона и атома, движущихся по оси канала в плотной среде. ДАН СССР, 56, 699, 1947.