

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. М. Манукян

Изгиб железобетонной балки с учетом неустановившейся ползучести только сжатой зоны бетона

В настоящей работе исследуются деформации и напряжения в изгибаемой железобетонной балке с учетом нелинейной ползучести только сжатой зоны бетона.

В линейной постановке эта задача была изучена в нашей работе [1]. Но экспериментальные исследования показывают, что в широком диапазоне изменения напряжений $\left(\frac{1}{2} R \leq \sigma \leq R\right.$, где R —предел прочности материала) линейная связь между деформациями ползучести

и соответствующими напряжениями нарушается. Поэтому, при решении рассматриваемой задачи будем исходить из нелинейных уравнений теории ползучести, развитой в работе [2]. Решение задачи сводится к интегрированию нелинейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода, методом, данным в работе [3]. Особенность этого метода решения заключается в том, что в качестве первого приближения берется не упругое решение, а решение соответствующей задачи линейной ползучести. Именно благодаря этому значительно усиливается быстрота сходимости последовательных приближений.

Решение рассматриваемой задачи когда бетон находится в состоянии установившейся ползучести, а напряжение арматуры получает свое предельное значение σ_T , приведено в работе [4].

§ 1. Постановка задачи и основные уравнения

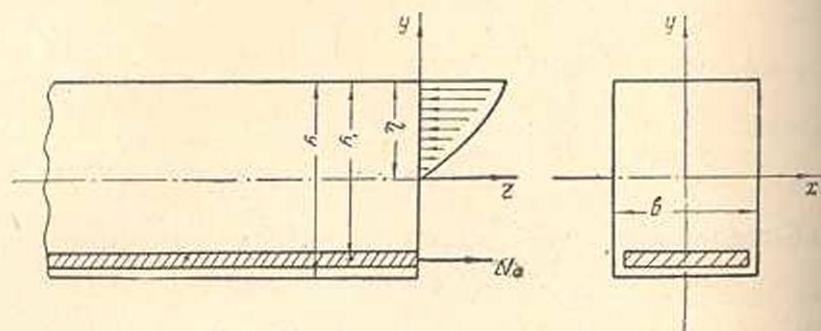
Рассмотрим изгибаемую железобетонную балку с одиночной арматурой (фиг. 1). Допустим, что балка имеет одну плоскость симметрии и все внешние силы действуют в этой плоскости.

Далее, положим, что сжимаемая зона бетона работает полностью, а растянутая зона не работает вследствие образования в ней трещин. Обозначим расстояние от сжатого края сечения до центра тяжести арматуры через h_1 , высоту сечения— h , ширину— b , расстояние нейтральной оси от верхнего края балки— η .

Направим координатные оси ox и oy параллельно главным осям инерции поперечного сечения, а ось oz —по направлению, параллельному геометрической оси балки.

При изучении напряженного состояния в изгибаемой железобетонной балке примем, что сечения после деформации остаются плоскими.

Для упрощения дальнейших выкладок будем полагать, что модуль мгновенной деформации E_s постоянен.



Фиг. 1

Как известно, между полной продольной деформацией бетона $\varepsilon_s(t)$ и напряжением $\sigma_s(t)$ с учетом нелинейной ползучести бетона существует зависимость [2]

$$\varepsilon_s(t) = \frac{\sigma_s(t)}{E_s} - \int_{\tau_1}^t F[\sigma_s(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (1.1)$$

Здесь $C(t, \tau)$ — мера ползучести бетона при одноосном напряженном состоянии, $F(\sigma_s)$ — некоторая функция, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести для бетона, определяемая из опыта в результате испытания на простую ползучесть и нормированная условием $F(1) = 1$, τ_1 — возраст бетона в момент приложения нагрузки, t — время.

Пусть $F(\sigma_s)$ является степенной функцией вида

$$F(\sigma_s) = \alpha \sigma_s + \beta \sigma_s^m, \quad (1.2)$$

где α , β , m — постоянные параметры, определяемые из опыта.

Такого вида функция характерна тем, что обладает достаточной общностью и хорошо описывает экспериментальные кривые ползучести в широком диапазоне изменения напряжений [5, 6].

Очевидно, что если в (1.2) параметр β является малым, то функция $F(\sigma_s)$ будет описывать кривые ползучести материалов, обладающих слабой нелинейностью.

Внося выражение $F(\sigma_s)$ из (1.2) в (1.1), получим

$$\varepsilon_s(t) = \frac{\sigma_s(t)}{E_s} - \alpha \int_{\tau_1}^t \sigma_s(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau - \beta \int_{\tau_1}^t [\sigma_s(\tau)]^m \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (1.3)$$

Пользуясь гипотезой плоских сечений, можем написать

$$\varepsilon_s(t) = A(z, t)y, \quad (1.4)$$

где $A(z, t)$ — неизвестная кривизна балки в данный момент времени t .
Здесь в каждый момент времени рассматриваются те точки балки

которые от перемещающейся нейтральной оси находятся на расстоянии y .

Подставляя выражение $\varepsilon_s(t)$ из (1.4) в (1.3), получим

$$\sigma_s(t) - \alpha \int_{\tau_1}^t \sigma_s(\tau) K(t, \tau) d\tau - \beta \int_{\tau_1}^t [\sigma_s(\tau)]^m K(t, \tau) d\tau = E_s A(z, t) y, \quad (1.5)$$

где

$$K(t, \tau) = E_s \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}. \quad (1.6)$$

Таким образом, задача сводится к решению нелинейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода (1.5). Функция $A(z, t)$ определяется из уравнений равновесия.

§ 2. Решение интегрального уравнения (1.5)

Пользуясь методом, развитым в работе [3], будем искать решение уравнения (1.5) в следующей форме

$$\sigma_s(t) = \sigma_s^{(0)}(t) + \beta \sigma_s^{(1)}(t) + \beta^2 \sigma_s^{(2)}(t) + \dots \quad (2.1)$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.5) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях β , получим

$$\sigma_s^{(0)}(t) - \alpha \int_{\tau_1}^t \sigma_s^{(0)}(\tau) K(t, \tau) d\tau = E_s A(z, t) y, \quad (2.2)$$

$$\sigma_s^{(1)}(t) - \alpha \int_{\tau_1}^t \sigma_s^{(1)}(\tau) K(t, \tau) d\tau = \int_{\tau_1}^t [\sigma_s^{(0)}(\tau)]^m K(t, \tau) d\tau, \quad (2.3)$$

$$\sigma_s^{(2)}(t) - \alpha \int_{\tau_1}^t \sigma_s^{(2)}(\tau) K(t, \tau) d\tau = m \int_{\tau_1}^t [\sigma_s^{(0)}(\tau)]^{m-1} \sigma_s^{(1)}(\tau) K(t, \tau) d\tau, \quad (2.4)$$

...

Таким образом, решение нелинейного интегрального уравнения (1.5) сводится к решению некоторой совокупности рекуррентных линейных интегральных уравнений (2.2), (2.3), (2.4)...

Займемся решением этих уравнений.

Решение уравнения (2.2) будет

$$\sigma_s^{(0)}(t) = E_s y H_0(t, \tau_1), \quad (2.5)$$

где

$$H_0(t, \tau_1) = A(z, t) + \alpha \int_{\tau_1}^t A(z, \tau) R(t, \tau, \alpha) d\tau. \quad (2.6)$$

Здесь $R(t, \tau, \alpha)$ — резольвента линейного интегрального уравнения Вольтерра с ядром $K(t, \tau)$.

Если для меры ползучести бетона принять [2]

$$C(t, \tau) = \left(\frac{A_1}{\tau} + C_0 \right) \left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)} \right], \quad (2.7)$$

где A_1 , C_0 , γ — постоянные параметры, определяемые из опыта, то

выражение резольвенты $R(t, \tau, \alpha)$ можно представить в следующем виде

$$\alpha R(t, \tau, \alpha) = \gamma - \eta'(\tau) + [\eta'(\tau) + \eta''(\tau) - \gamma \eta'(\tau)] e^{\eta(\tau)} \int_{\tau}^t e^{-\eta(x)} dx, \quad (2.8)$$

где

$$\eta(\tau) = \gamma \int_{\tau_1}^{\tau} \left[1 + \alpha E_c \left(\frac{A_1}{\tau} + C_0 \right) \right] d\tau. \quad (2.9)$$

Решение уравнения (2.3) будет

$$\sigma_s^{(1)}(t) = (E_s y)^m [H_1(t, \tau_1) + \alpha \int_{\tau_1}^t H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau]. \quad (2.10)$$

Здесь положено

$$H_1(t, \tau_1) = \int_{\tau_1}^t [H_0(\tau, \tau_1)]^m K(t, \tau) d\tau. \quad (2.11)$$

Если ограничиваться только вторым приближением, то решение основного уравнения (1.5) можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} \sigma_s(t) = & E_s y \{ H_0(t, \tau_1) + \beta (E_s y)^{m-1} [H_1(t, \tau_1) + \\ & + \alpha \int_{\tau_1}^t H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau] \} + O(\beta^2). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Для определения неизвестной функции $A(z, t)$ пользуемся уравнениями равновесия

$$\int_0^{\eta} \sigma_s(t) b dy + N_a(t) = 0, \quad (2.13)$$

$$\int_0^{\eta} \sigma_s(t) b y dy - N_a(t) (h_1 - \eta) = M_z.$$

Здесь $N_a(t)$ — усилие в арматуре, равное $F_a \sigma_a(t)$, F_a — площадь поперечного сечения арматуры, $\sigma_a(t)$ — напряжение в арматуре, $\eta = \eta(t)$ — неизвестная высота сжатой зоны балки в момент времени t , M_z — величина изгибающего момента.

Из условия совместности деформаций арматуры и соприкасающегося с ней слоя бетона имеем

$$\varepsilon_s(t) |_{y=-(h_1-\eta)} = \varepsilon_a(t). \quad (2.14)$$

Пользуясь этими соотношениями и замечая, что

$$\varepsilon_a(t) = \frac{\sigma_a(t)}{E_a}, \quad (2.15)$$

получим выражение усилия $N_a(t)$

$$N_a(t) = -F_a E_a A(z, t)(h_1 - \eta), \quad (2.16)$$

где E_a — модуль деформации арматуры.

Подставляя значения $\sigma_s(t)$ и $N_a(t)$ из (2.12) и (2.16) в уравнения (2.13), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} b E_s \eta^2 H_0(t, \tau_1) + \beta \frac{b}{m+1} E_s^m \eta^{m+1} \int_{\tau_1}^t \left\{ [H_0(\tau, \tau_1)]^m + \right. \\ & \left. + 2 \int_{\tau_1}^{\tau} [H_0(x, \tau_1)]^m R(t, x, \alpha) \right\} K(t, \tau) d\tau = F_a E_a A(z, t)(h_1 - \eta), \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} b \eta^3 E_s H_0(t, \tau_1) + \beta \frac{b}{m+2} \eta^{m+2} E_s^m \int_{\tau_1}^t \left\{ [H_0(\tau, \tau_1)]^m + \right. \\ & \left. + 2 \int_{\tau_1}^{\tau} [H_0(x, \tau_1)]^m R(t, x, \alpha) dx \right\} K(t, \tau) d\tau + F_a E_a A(z, t)(h_1 - \eta)^2 = M_z. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Решение уравнения (2.6) будет

$$A(z, t) = H_0(t, \tau_1) - \alpha \int_{\tau_1}^t H_0(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau. \quad (2.19)$$

Здесь $K(t, \tau)$ является резольвентой ядра $R(t, \tau, \alpha)$.

Внося выражение $A(z, t)$ из (2.19) в (2.17) и (2.18), найдем

$$\begin{aligned} & [p_1 \tau_1^2 - p_2(1 - \zeta)] H_0(t, \tau_1) + p_2(1 - \zeta) \alpha \int_{\tau_1}^t H_0(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau + \\ & + \beta p_3 \tau_1^{m+1} \int_{\tau_1}^t \left\{ [H_0(\tau, \tau_1)]^m + \alpha \int_{\tau_1}^{\tau} [H_0(x, \tau_1)]^m R(t, x, \alpha) dx \right\} K(t, \tau) d\tau = 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} & [q_1 \tau_1^3 + q_2(1 - \zeta)^2] H_0(t, \tau_1) - q_2(1 - \zeta)^2 \alpha \int_{\tau_1}^t H_0(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau + \\ & + \beta q_3 \tau_1^{m+2} \int_{\tau_1}^t \left\{ [H_0(\tau, \tau_1)]^m + \alpha \int_{\tau_1}^{\tau} [H_0(x, \tau_1)]^m R(t, x, \alpha) dx \right\} K(t, \tau) d\tau = M_z, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2} b E_s h_1^2, \quad p_2 = F_a E_a h_1, \quad p_3 = \frac{b h_1^{m+1}}{m+1} E_s^m, \\ q_1 &= \frac{1}{3} b E_s h_1^3, \quad q_2 = F_a E_a h_1^2, \quad q_3 = \frac{b h_1^{m+2}}{m+2} E_s^m, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$\zeta = \frac{\eta}{h_1}$ — есть отношение высоты сжатой зоны сечения балки в момент времени t к полезной высоте сечения.

Таким образом, определение искомых функций $H_0(t, \tau_1)$ и $\zeta(t)$ свелось к совместному решению двух нелинейных интегральных уравнений (2.20) и (2.21). К этим уравнениям применим вышеизложенный метод.

Ищем решение этих уравнений в следующей форме

$$H_0(t, \tau_1) = H_0^{(0)}(t, \tau_1) + \beta H_0^{(1)}(t, \tau_1) + \beta^2 H_0^{(2)}(t, \tau_1) + \dots, \quad (2.23)$$

$$\zeta(t) = \zeta_0(t) + \beta \zeta_1(t) + \beta^2 \zeta_2(t) + \dots \quad (2.24)$$

Подставляя эти выражения в (2.20), (2.21) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях β , получим

$$[p_1 \zeta_0^2 - p_2(1 - \zeta_0)] H_0^{(0)}(t, \tau_1) + p_2(1 - \zeta_0) \alpha \int_{\tau_1}^t H_0^{(0)}(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau = 0, \quad (2.25)$$

$$[q_1 \zeta_0^3 + q_2(1 - \zeta_0)^2] H_0^{(0)}(t, \tau_1) - q_2(1 - \zeta_0)^2 \alpha \int_{\tau_1}^t H_0^{(0)}(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau = M_z, \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} & [p_1 \zeta_0^2 - p_2(1 - \zeta_0)^2] H_0^{(1)}(t, \tau_1) + (2p_1 \zeta_0 + p_2) \zeta_1 H_0^{(0)}(t, \tau_1) + \\ & + p_2(1 - \zeta_0) \alpha \int_{\tau_1}^t H_0^{(1)}(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau - p_2 \zeta_1 \alpha \int_{\tau_1}^t H_0^{(0)}(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau + \\ & + \alpha \int_{\tau_1}^t [H_0^{(0)}(x, \tau_1)]^m R(t, x, z) dx \} K(t, \tau) d\tau = 0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} & [q_1 \zeta_0^3 + q_2(1 - \zeta_0)^2] H_0^{(1)}(t, \tau_1) + [3q_1 \zeta_0^2 - 2q_2(1 - \zeta_0)] \zeta_1 H_0^{(0)}(t, \tau_1) - \\ & - q_2(1 - \zeta_0)^2 \alpha \int_{\tau_1}^t H_0^{(1)}(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau + 2q_2(1 - \zeta_0) \zeta_1 \alpha \int_{\tau_1}^t H_0^{(0)}(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau + \\ & + q_2 \zeta_0^{m+2} \alpha \int_{\tau_1}^t \{ [H_0^{(0)}(\tau, \tau_1)]^m + \alpha \int_{\tau_1}^t [H_0^{(0)}(x, \tau_1)]^m R(t, x, z) dx \} K(t, \tau) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Аналогично можно написать остальные уравнения.

Таким образом, решение системы нелинейных интегральных уравнений (2.20) и (2.21) сводится к решению некоторой совокупности систем линейных интегральных уравнений.

Займемся решением этих уравнений.

Систему уравнений (2.25) и (2.26) можно написать в следующем виде

$$H_0^{(0)}(t, \tau_1) = \frac{6M_z}{E_0 F_0 \zeta_0^2 (3 - \zeta_0) h_1^2}, \quad (2.29)$$

$$\int_{\tau_1}^t H_0^{(0)}(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau = \left[1 - \frac{\zeta_0^2}{2m_1(1 - \zeta_0)} \right] H_0^{(0)}(t, \tau_1), \quad (2.30)$$

где $\mu = \frac{F_0}{bh_1}$ — коэффициент армирования, $m_1 = \frac{E_a}{E_0}$ — модульное отношение, $\zeta_0(t)$ и $H_0^{(0)}(t, \tau_1)$ — неизвестные функции.

Формулы (2.29) и (2.30) совпадают с формулами (3.10) и (3.11), полученными нами для линейной ползучести [1].

Заметим, что если исключить из уравнения (2.30) функцию $H_0^{(0)}(t, \tau_1)$, то получим для определения $\zeta_0(t)$ нелинейное интегральное уравнение Вольтерра, решение которого связано с практически непреодолимой трудностью. Поэтому к интегральному уравнению (2.30) применим метод Н. М. Крылова и Н. И. Боголюбова, как это мы делали при рассмотрении линейной задачи [1]. Тогда для определения $\zeta_0(t_k)$ и $H_0^{(0)}(t, \tau_1)$ получим [1]

$$a_k \zeta_0^1(t_k) + b_k \zeta_0^2(t_k) + c_k \zeta_0^3(t_k) + d_k \zeta_0(t_k) + l_k = 0, \quad (2.31)$$

где

$$\zeta_0(t_k) = \frac{\eta_0(t_k)}{h_1}, \quad \zeta_0(\tau_1) = \mu m_1 \sqrt{1 + \frac{2}{\mu m_1}} - 1, \quad (2.32)$$

$$a_k = -\mu m_1 E_s A_k, \quad b_k = 4\mu m_1 E_s A_k,$$

$$c_k = 3 \{ f[\zeta_0(\tau_1)] \varphi[\zeta_0(t_1)] \varphi[\zeta_0(t_2)] \dots \varphi[\zeta_0(t_{k-1})] - a_k \},$$

$$d_k = -l_k = 6\mu m_1 f[\zeta_0(\tau_1)] \varphi[\zeta_0(t_1)] \varphi[\zeta_0(t_2)] \dots$$

$$\dots \varphi[\zeta_0(t_{k-1})] \left[1 + E_s C \left(t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2} \right) \right], \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} A_k = & \varphi[\zeta_0(t_1)] \varphi[\zeta_0(t_2)] \dots \varphi[\zeta_0(t_{k-1})] \left[C(t_k, \tau_1) - C \left(t_k, \frac{\tau_1 + t_1}{2} \right) \right] + \\ & + f[\zeta_0(\tau_1)] \varphi[\zeta_0(t_2)] \dots \varphi[\zeta_0(t_{k-1})] \left[C \left(t_k, \frac{\tau_1 + t_1}{2} \right) - C \left(t_k, \frac{t_1 + t_2}{2} \right) \right] + \\ & + f[\zeta_0(\tau_1)] \varphi[\zeta_0(t_1)] \varphi[\zeta_0(t_3)] \dots \varphi[\zeta_0(t_{k-1})] \left[C \left(t_k, \frac{t_1 + t_2}{2} \right) - \right. \\ & \left. - C \left(t_k, \frac{t_2 + t_3}{2} \right) \right] + \dots + f[\zeta_0(\tau_1)] \varphi[\zeta_0(t_1)] \varphi[\zeta_0(t_2)] \dots \varphi[\zeta_0(t_{k-2})] \times \\ & \times \left[C \left(t_k, \frac{t_{k-2} + t_{k-1}}{2} \right) - C \left(t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$f[\zeta_0(\tau_1)] = \frac{1}{3} \zeta_0^2(\tau_1) + \mu m_1 [1 - \zeta_0(\tau_1)], \quad (2.35)$$

$$\varphi[\zeta_0(t_k)] = \frac{1}{6} \zeta_0^2(t_k) [3 - \zeta_0(t_k)] \quad (2.36)$$

и

$$H_0^{(0)}(t_k, \tau_1) = \frac{6M_s}{F_s E_s \zeta_0^2(t_k) [3 - \zeta_0(t_k)] h_1^2}. \quad (2.37)$$

В формулах (2.31)–(2.37) индексу k нужно давать значения 0, 1, 2, ..., n , причем $t_0 = \tau_1$.

Решая уравнение (2.31), определяем то значение $\zeta_0(t_k)$, которое

имеет в данном случае физический смысл. Пользуясь теоремой Штурма, нетрудно показать, что это уравнение имеет только один корень, который для данной задачи имеет физический смысл. Подставляя значение $\zeta_0(t_k)$ в выражение (2.37), определяем $H_0^{(0)}(t_k, \tau_1)$. Придавая индексу k значения $0, 1, 2, \dots, n$, получим числовые значения $\zeta_0(t)$ и $H_0^{(0)}(t, \tau_1)$ при $t=t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$, причем $t_0=\tau_1$.

Систему уравнений (2.27) и (2.28) можно написать в следующем виде

$$B_1(\zeta_0)H_0^{(0)}(t, \tau_1) + B_2(\zeta_0)\zeta_1(t) = B_3(\zeta_0)J(t, \tau_1), \quad (2.38)$$

$$D_1(\zeta_0)H_0^{(1)}(t, \tau_1) + D_2(\zeta_0) \int_{\tau_1}^t H_0^{(0)}(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau = D_3(\zeta_0)J(t, \tau_1), \quad (2.39)$$

где

$$B_1(\zeta_0) = \frac{1}{3} p_1 q_2 \zeta_0^2 (3 - \zeta_0), \quad B_2(\zeta_0) = \frac{3p_2(2 - \zeta_0)}{\zeta_0(3 - \zeta_0)} M_2, \quad (2.40)$$

$$B_3(\zeta_0) = -p_2 q_2 \left(1 + \frac{1 - \zeta_0}{m+1}\right) \zeta_0^{m+1}, \quad (2.41)$$

$$J(t, \tau_1) = \int_{\tau_1}^t \left\{ [H_0^{(0)}(\tau, \tau_1)]^m + \alpha \int_{\tau_1}^{\tau} [H_0^{(0)}(x, \tau_1)]^m R(t, x, \alpha) dx \right\} K(t, \tau) d\tau, \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} D_1(\zeta_0) &= q_1 \zeta_0^2 + q_2 (1 - \zeta_0)^2, \\ D_2(\zeta_0) &= q_2 (1 - \zeta_0)^2, \\ D_3(\zeta_0) &= -q_2 \zeta_0^{m+2} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Здесь $\zeta_1(t)$ и $H_0^{(1)}(t, \tau_1)$ неизвестны, а численные значения $B_1(\zeta_0)$, $B_2(\zeta_0)$, $B_3(\zeta_0)$, $D_1(\zeta_0)$, $D_2(\zeta_0)$, $D_3(\zeta_0)$ и $J(t, \tau_1)$ известны для некоторых значений времени $\tau_1, t_1, t_2, \dots, t_n$.

Сперва рассмотрим интегральное уравнение (2.39) и применим к нему метод Крылова и Боголюбова [1]. Тогда, придавая времени t последовательно возрастающие конкретные значения $t_1, t_2, \dots, t_n$, получим

$$H_0^{(1)}(t_1, \tau_1) = \frac{D_3[\zeta_0(t_1)]J(t_1, \tau_1)}{D_1[\zeta_0(t_1)] + \alpha E_2 D_2[\zeta_0(t_1)] C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right)}, \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(t_2, \tau_1) &= \frac{1}{D_1[\zeta_0(t_2)] + \alpha E_2 D_2[\zeta_0(t_2)] C\left(t_2, \frac{t_1 + t_2}{2}\right)} \left\{ D_3[\zeta_0(t_2)] \times \right. \\ &\times J(t_2, \tau_1) - \alpha E_2 D_2[\zeta_0(t_2)] \left[C\left(t_2, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) - C\left(t_2, \frac{t_1 + t_2}{2}\right) \right] H_0^{(1)}(t_1, \tau_1) \left. \right\}, \quad (2.45) \end{aligned}$$

$$H_0^{(1)}(t_k, \tau_1) = \frac{1}{D_1[\zeta_0(t_k)] + \alpha E_2 D_2[\zeta_0(t_k)] C\left(t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right)} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ D_3[\zeta_0(t_k)]J(t_k, \tau_1) - \alpha E_0 D_2[\zeta_0(t_k)] \left| C\left(t_k, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) - \right. \right. \\ & - C\left(t_k, \frac{t_1 + t_2}{2}\right) \left| H_0^{(1)}(t_1, \tau_1) - \dots - \alpha E_0 D_2[\zeta_0(t_k)] \left| C\left(t_k, \frac{t_{k-2} + t_{k-1}}{2}\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - C\left(t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right) \right| H_0^{(1)}(t_{k-1}, \tau_1) \right\}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Уменьшая расчетные интервалы времени, мы можем получить решение с любой точностью. Как показано в работе [7], применение этого метода к задачам теории ползучести оказывается весьма эффективным, так как большая точность получается даже при выборе сравнительно небольшого числа интервалов.

Из этих формул определим численные значения $H_0^{(1)}(t_1, \tau_1)$, $H_0^{(1)}(t_2, \tau_1), \dots, H_0^{(1)}(t_k, \tau_1)$, после чего из соотношения (2.38) можем получить

$$\zeta_1(t_k) = \frac{B_3[\zeta_0(t_k)]J(t_k, \tau_1) - B_1[\zeta_0(t_k)]H_0^{(1)}(t_k, \tau_1)}{B_2[\zeta_0(t_k)]}. \quad (2.47)$$

Придавая индексу k значения $0, 1, 2, \dots, n$, получим численные значения $\zeta_1(t)$ при $t=t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$, причем $t_0=\tau_1$.

Аналогичным образом можно определить остальные приближения.

Если ограничиваться только вторым приближением, то для $H_0(t, \tau_1)$ и $\zeta(t)$ получим

$$H_0(t_k, \tau_1) = H_0^{(0)}(t_k, \tau_1) + \beta_1 H_0^{(1)}(t_k, \tau_1) + O(\beta^2), \quad (2.48)$$

$$\zeta(t_k) = \zeta_0(t_k) + \beta_1 \zeta_1(t_k) + O(\beta^2), \quad (2.49)$$

где $H_0^{(0)}(t_k, \tau_1)$, $H_0^{(1)}(t_k, \tau_1)$ и $\zeta_1(t_k)$ определяются соответственно формулами (2.37), (2.46) и (2.47), а $\zeta_0(t_k)$ является решением уравнения (2.31).

Здесь $\zeta(t_k) = \frac{\tau_1(t_k)}{h_1}$ есть отношение высоты сжатой зоны сечения балки в момент времени t к полезной высоте сечения.

Пользуясь выражениями (1.4), (2.19), (2.48), (2.37) и (2.46), для определения полной продольной деформации бетона получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(t_1) = & H_0(t_1, \tau_1) y + \alpha E_0 \{ H_0(\tau_1, \tau_1) [C(t_1, \tau_1) - \\ & - C(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2})] + H_0(t_1, \tau_1) C(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}) \} y, \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(t_2) = & H_0(t_2, \tau_1) y + \alpha E_0 \{ H_0(\tau_1, \tau_1) [C(t_2, \tau_1) - \\ & - C(t_2, \frac{\tau_1 + t_1}{2})] + H_0(t_1, \tau_1) [C(t_2, \frac{\tau_1 + t_1}{2}) - C(t_2, \frac{t_1 + t_2}{2})] + \\ & + H_0(t_2, \tau_1) C(t_2, \frac{t_1 + t_2}{2}) \} y, \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_s(t_k) = & H_0(t_k, \tau_1)y + \alpha E_s \{ H_0(\tau_1, \tau_1) [C(t_k, \tau_1) - \\
& - C(t_k, \frac{\tau_1 + t_1}{2})] + H_0(t_1, \tau_1) [C(t_k, \frac{\tau_1 + t_1}{2}) - C(t_k, \frac{t_1 + t_2}{2})] + \\
& + H_0(t_2, \tau_1) [C(t_k, \frac{t_1 + t_2}{2}) - C(t_k, \frac{t_2 + t_3}{2})] + \dots + H_0(t_{k-1}, \tau_1) \times \\
& \times [C(t_k, \frac{t_{k-2} + t_{k-1}}{2}) - C(t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2})] + H_0(t_k, \tau_1) C(t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2}) \} y.
\end{aligned} \quad (2.52)$$

Если известна продольная деформация бетона, то можно согласно (2.14) определить деформацию в арматуре. Для определения закона изменения деформации в арматуре получим формулу

$$\frac{\varepsilon_a(t_k)}{\varepsilon_a(\tau_1)} = \frac{1 - \zeta(t_k)}{1 - \zeta(\tau_1)} \frac{\varepsilon_s(t_k)}{\varepsilon_s(\tau_1)}, \quad (2.53)$$

где индекс k принимает значения $0, 1, 2, \dots, n$, причем $t_0 = \tau_1$.

Перейдем к определению прогиба балки.

На основании (2.19) можем написать

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 W(t)}{dz^2} &= H_0(t, \tau_1) - \alpha \int_{\tau_1}^t H_0(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau, \\
\frac{d^2 W(\tau_1)}{dz^2} &= H_0(\tau_1, \tau_1),
\end{aligned} \quad (2.54)$$

где $W(t)$ — прогиб балки в момент времени t , $W(\tau_1)$ — прогиб балки в момент времени τ_1 .

Отсюда следует, что

$$\frac{d^2 W(t)}{dz^2} = \frac{H_0(t, \tau_1) - \alpha \int_{\tau_1}^t H_0(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau}{H_0(\tau_1, \tau_1)} \frac{d^2 W(\tau_1)}{dz^2}. \quad (2.55)$$

Интегрируя это уравнение и принимая для простоты такое закрепление опор балки, чтобы постоянные интегрирования равнялись нулю, получим

$$\frac{W(t)}{W(\tau_1)} = \frac{H_0(t, \tau_1) - \alpha \int_{\tau_1}^t H_0(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau}{H_0(\tau_1, \tau_1)}. \quad (2.56)$$

Для определения численных значений $\frac{W(t)}{W(\tau_1)}$ нужно пользоваться

выражениями (2.48), (2.37), (2.44), (2.45) и (2.46). Напряжение в бетоне определяется формулой (2.12), где вместо функции $H_0(t, \tau_1)$ нужно подставить ее значение из (2.48), (2.37), (2.44), (2.45) и (2.46). Если ограничиваться первыми двумя приближениями, то для определения напряжений в бетоне получим

$$\sigma_b(t) = E_b y \{ H_0(t, \tau_1) + \beta (E_s y)^{m-1} J(t, \tau_1) \} + O(\beta^2), \quad (2.57)$$

где $J(t, \tau_1)$ определяется формулой (2.42).

Если известна деформация арматуры, то напряжение в арматуре определяется по (2.15), т. е.

$$\tau_a(t) = E_a \varepsilon_a(t). \quad (2.58)$$

Для определения закона изменения $\zeta(t)$ находим

$$\frac{\zeta(t_k)}{\zeta(\tau_1)} = \frac{1}{\zeta(\tau_1)} \left\{ \zeta_0(t_k) + \beta \frac{B_3[\zeta_0(t_k)] J(t_k, \tau_1) - B_1[\zeta_0(t_k)] H_0^{(1)}(t_k, \tau_1)}{B_2[\zeta_0(t_k)]} \right\}, \quad (2.59)$$

где индексу k нужно давать значения $0, 1, 2, \dots, n$ и еще принять $t_0 = \tau_1$. Здесь $\zeta(\tau_1) = \zeta_0(\tau_1)$.

С целью иллюстрации некоторых количественных результатов, рассмотрим численный пример.

Примем

$$C(t, \tau) = \left(\frac{4,82}{\tau} + 0,9 \right) \left| 1 - e^{-0,026(t-\tau)} \right| 10^{-5},$$

$\nu = 0,0165$; $E_b = 1,4 \cdot 10^5$ кг/см; $\tau_1 = 7$ дней; $m = 2$; $M_2 = 1,300000$ кг.см; $b = 25$ см; $h_1 = 50$ см.

При этих данных рассмотрим четыре случая, соответствующих значениям параметра нелинейности; $\beta = 0$, $\beta = 0,001$, $\beta = 0,01$, $\beta = 0,02$.

Очевидно, что значению $\beta = 0$ соответствует линейная ползучесть, рассмотренная в работе [1], а остальным значениям β соответствует нелинейная ползучесть с квадратичным законом нелинейности.

Для нахождения искомых функций разобьем промежуток времени в 360 дней на пять последовательно возрастающих интервалов $\tau_1 = 7$, $t_1 = 14$, $t_2 = 28$, $t_3 = 90$, $t_4 = 360$ дням.

Ниже приводятся 4 таблицы. В этих таблицах даются численные значения отношений

$$\frac{\zeta(t)}{\zeta(\tau_1)}, \quad \frac{\sigma_b(t)}{\sigma_b(\tau_1)}, \quad \frac{\sigma_a(t)}{\sigma_a(\tau_1)}, \quad \frac{\varepsilon_b(t)}{\varepsilon_b(\tau_1)}, \quad \frac{\varepsilon_a(t)}{\varepsilon_a(\tau_1)}, \quad \frac{W(t)}{W(\tau_1)}, \quad (5.60)$$

в зависимости от различных значений времени t и параметра нелинейности β при первом и втором приближениях.

Численные значения отношений (5.60) при линейной ползучести взяты из нашей работы [1].

Численные значения $\zeta(t)/\zeta(\tau_1)$ в зависимости от времени t и коэффициента нелинейности β при первом и втором приближениях

Таблица 1

t	П р и б л и ж е н и я			
	первое	второе		
		параметр нелинейности β		
		0	0,001	0,01
7	1	1	1	1
14	1,11947	1,12729	1,19779	1,27717
28	1,26739	1,28147	1,41448	1,55847
90	1,43638	1,44927	1,60330	1,78112
360	1,45400	1,47009	1,62641	1,80655

Численные значения $\frac{\varepsilon_b(t)}{\varepsilon_b(\tau_1)} = \frac{W(t)}{W(\tau_1)}$ в зависимости от времени t и коэффициента нелинейности β при первом и втором приближениях

Таблица 2

t	П р и б л и ж е н и я			
	первое	второе		
		параметр нелинейности β		
		0	0,001	0,01
7	1	1	1	1
14	1,156500	1,169691	1,286255	1,415515
28	1,420321	1,460172	1,779114	2,133820
90	1,883662	1,941421	2,554497	3,257700
360	1,947630	2,021786	2,779640	3,547501

Численные значения $\frac{\varepsilon_a(t)}{\varepsilon_a(\tau_1)} = \frac{z_a(t)}{z_a(\tau_1)}$ в зависимости от времени t и коэффициента нелинейности β при первом и втором приближениях

Таблица 3

t	П р и б л и ж е н и я	
	первое	второе
	параметр нелинейности β	
	0	0,001
7	1	1
14	1,023885	1,026497
28	1,055120	1,064939
90	1,093223	1,102649
360	1,097427	1,10797

Численные значения $\frac{\varepsilon_0(t)}{\varepsilon_0(\tau_1)}$ в зависимости от времени t и коэф-
фициента нелинейности β при первом и втором приближениях в точках
 $y = h_1 \zeta(t)$, $y = \frac{1}{2} h_1 \zeta(t)$ и $y=0$.

Таблица 4

t	Значения y	Приближения	
		первое	второе
		параметр нелинейности β	
		0	0,001
7	—	1	1
14	$y = h_1 \zeta(t_1)$	0,817014	0,797518
	$y = \frac{1}{2} h_1 \zeta(t_1)$	0,817014	0,812942
	$y=0$	0,817014	0,828365
28	$y = h_1 \zeta(t_2)$	0,656870	0,624827
	$y = \frac{1}{2} h_1 \zeta(t_2)$	0,656870	0,655838
	$y=0$	0,656870	0,682850
90	$y = h_1 \zeta(t_3)$	0,539848	0,508080
	$y = \frac{1}{2} h_1 \zeta(t_3)$	0,539848	0,535850
	$y=0$	0,539848	0,563620
360	$y = h_1 \zeta(t_4)$	0,529042	0,49404
	$y = \frac{1}{2} h_1 \zeta(t_4)$	0,529042	0,51975
	$y=0$	0,529042	0,54546

Из этих таблиц следует, что 1) увеличение отношения высоты сжатой зоны сечения балки к полезной высоте сечения в условиях неустановившейся ползучести сильно активизируется, 2) особенно сильно активизируется увеличение деформации и прогиба в бетоне (например, при $\beta=0,02$ $\varepsilon_0(t)$ и $W(t)$ в два раза больше, чем в случае линейной ползучести), 3) увеличение напряжения и деформации в арматуре в условиях нелинейной ползучести при $\beta=0,001$ незначительно и 4) при нелинейной ползучести напряжение в бетоне в точках $0 < y \leq h_1 \zeta(t)$ затухает, а в точках $y \leq 0$ — увеличивается.

Մ. Մ. Մանուկյան

ԵՐԿԱԹՔԵՏՈՆԵ ՀԵԾԱՆԻ ԾՌՈՒՄԸ ԲԵՏՈՆԻ ՄԻԱՅՆ ՍԵՂՄՎԱԾ ԳՈՏՈՆԻ
ՈՉ ՀԱՍՏԱՏՎԱԾ ՍՈՂՔԻ ՀԱՇՎԱԴՐՈՒՄՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա աշխատության մեջ ուսումնասիրվում են ծովող երկաթբետոն հեծանի լարումները և ղեֆորմացիան, երբ բետոնի սեղմված գոտին աշխատում է լրիվ, իսկ ձգված գոտին չի աշխատում՝ նրանում առաջացած ճաքերի պատճառով:

Առաջադրված խնդրի ընդհանուր լուծումը բետոնի զծային սողքի դեպքում տրված է [1] աշխատությունում: Բայց էքսպերիմենտալ հետազոտությունները ցույց են տալիս, որ մեծ լարումների դեպքում ($0 \leq \sigma \leq R$, որտեղ R -ը նյութի կալունության սահմանն է) սողքի ղեֆորմացիայի և համապատասխան լարումների միջև զծային կապը խախտվում է: Այդ պատճառով առաջադրված խնդիրը լուծելու համար օգտագործվում է Ն. Ս. Հարությունյանի առաջադրած սողքի ոչ-զծային տեսությունը: Խնդրի լուծումը բերվում է Վոլտերրի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարմանը, որի լուծման համար օգտագործվում է [3] աշխատության մեջ շարադրված մեթոդը:

Այս մեթոդի առանձնահատկությունն այն է, որ որպես առաջին մոտավորություն վերցվում է ոչ թե խնդրի առաձգական լուծումը, ինչպես առաջադրված է կատարել սողքի ոչ-զծային տեսության խնդիրը Պիկարի հաջորդական մոտավորությունների մեթոդով լուծելիս, այլ զծային սողքի համապատասխան խնդրի լուծումը: Այս առանձնահատկության շնորհիվ զգալիորեն բարձրանում է հաջորդական մոտավորությունների դոգամիտության արագությունը:

$F(\sigma)$ ֆունկցիան, որը բնորոշում է սողքի դեպքում տվյալ նյութի լարվածության և ղեֆորմացիայի միջև եղած ոչ-զծային առնչությունը, վերցված

$$F(\sigma) = \alpha\sigma + \beta\sigma^m$$

տեսքով, որտեղ α , β , m -հաստատուն պարամետրերն են, որոնք որոշվում են փորձից և բավարարում են $\alpha + \beta = 1$ պայմանին:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Манукян М. М. Деформации и напряжения в изгибаемой железобетонной балке с учетом ползучести сжатой и частично растянутой зон бетона. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, том IX, № 9, 1956.
2. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М., 1952.
3. Александрян Р. А., Арутюнян Н. Х., Манукян М. М. Кручение тонкостенной стержней замкнутого профиля в условиях неустановившейся ползучести. ПММ, том XXII, вып. 6, 1958.
4. Манукян М. М. Изгиб железобетонной балки с учетом установившейся ползучести только сжатой зоны бетона. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, том X, № 4, 1957.

5. Карапетян К. С. Влияние старения бетона на зависимость между напряжениями и деформациями ползучести. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, № 4, 1959.
6. У Жуй-фын. Неустановившаяся ползучесть составных цилиндрических труб в упругой среде. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, № 3, 1959.
7. Манукян М. М. Определение напряжений в некоторых железобетонных элементах с учетом ползучести и изменений модуля мгновенной деформации бетона. Известия АН Арм. ССР, серия ФМЕТ наук, т. VII, № 6, 1954.