

С. М. Дургарьян

Температурный расчет ортотропной слоистой пластинки при упругих постоянных* и коэффициенте температурного расширения, зависящих от температуры

В многочисленных работах, посвященных решению температурных задач пластинок, в основном рассмотрены пластинки, изготовленные из изотропных материалов, без учета изменений упругих постоянных материала пластинки в зависимости от температуры.

В последние годы появились работы, в которых учитываются изменения упругих постоянных материала неоднородных пластинок и оболочек, а также посвященные решению температурной задачи слоистых (в частности биметаллических) пластин и оболочек [2], [4], [5], [6], [7], [8].

Температурная задача слоистых анизотропных оболочек, без учета изменения упругих свойств материала оболочки от температуры, впервые решена С. А. Амбарцумяном [2].

Однако, нам неизвестны работы, посвященные решению температурной задачи анизотропной (ортотропной) слоистой пластинки при упругих постоянных и коэффициенте температурного расширения, зависящих от температуры нагрева.

Этому вопросу и посвящена настоящая работа.

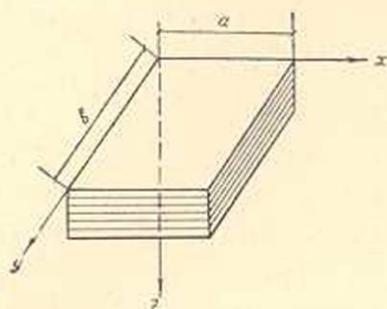
§ 1. Вывод основных уравнений

Рассмотрим температурную задачу многослойной пластинки, собранной из произвольного числа однородных ортотропных слоев.

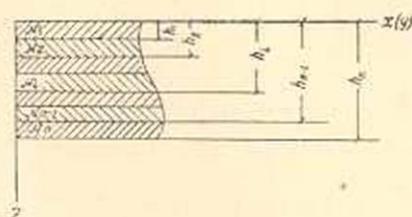
Пластинка отнесена к триортогональной системе прямолинейных координат так, чтобы срединные плоскости слоев, являющиеся одной из плоскостей упругой симметрии материала пластинки, были параллельны координатной плоскости xoy .

* В настоящей работе упругие характеристики материала пластинки считаются постоянными (зависящими от температуры). Однако, придерживаясь общепринятой терминологии, они названы упругими постоянными.

Принимая гипотезу Франца Неймана, а также считая, что коэффициенты деформаций и температурного расширения зависят от температуры, запишем обобщенный закон Гука для i -ого слоя [2]:



Фиг. 1.



Фиг. 2.

$$\left. \begin{aligned} e_x^i &= a_{11}^i \sigma_x^i + a_{12}^i \sigma_y^i + a_{13}^i \sigma_z^i + \beta_x^i T, \\ e_y^i &= a_{21}^i \sigma_x^i + a_{22}^i \sigma_y^i + a_{23}^i \sigma_z^i + \beta_y^i T, \\ e_z^i &= a_{31}^i \sigma_x^i + a_{32}^i \sigma_y^i + a_{33}^i \sigma_z^i + \beta_z^i T, \end{aligned} \right\} (1.1)$$

$$e_{xy}^i = a_{66}^i \tau_{xy}^i, \quad e_{yz}^i = a_{44}^i \tau_{yz}^i, \quad e_{xz}^i = a_{55}^i \tau_{xz}^i, \quad (1.2)$$

где $\beta_x^i, \beta_y^i, \beta_z^i$ — коэффициенты температурного расширения соответственно вдоль координатных осей x, y и z ; T — температура в данной точке пластинки.

В основу дальнейших выкладок кладутся следующие предположения [3]:

а) нормальными напряжениями σ_z на площадках, параллельных координатной плоскости xoy , можно пренебречь по сравнению с другими напряжениями ($\sigma_z = 0$);

б) нормальный к срединной плоскости прямолинейный элемент пластинки остается прямолинейным и нормальным к деформированной срединной поверхности ($e_{yz} = e_{xz} = 0$) и сохраняет свою первоначальную длину ($e_z = 0$).

На основании принятых предположений

$$\sigma_z = e_z = e_{xz} = e_{yz} = 0. \quad (1.3)$$

Внеся (1.3) в первые два уравнения (1.1), получим

$$\left. \begin{aligned} e_x^i &= a_{11}^i \sigma_x^i + a_{12}^i \sigma_y^i + \beta_x^i T, \\ e_y^i &= a_{21}^i \sigma_x^i + a_{22}^i \sigma_y^i + \beta_y^i T. \end{aligned} \right\} (1.4)$$

Из известных соотношений

$$\left. \begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & e_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & e_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ e_{xy} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}, & e_{xz} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}, & e_{yz} &= \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}, \end{aligned} \right\} (1.5)$$

с учетом (1.3) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} e_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, & u_z &= u_z(x, y) = w, \\ e_{xz} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0, & u_x &= u - z \frac{\partial w}{\partial x}, \\ e_{yz} &= \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0, & u_y &= v - z \frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

где u , v , w — перемещения точек координатной плоскости $z=0$ вдоль координатных осей x , y , z .

Из (1.4) найдём:

$$\sigma_x^i = \frac{a_{22}^i e_x^i - a_{12}^i e_y^i - T(\beta_x^i a_{22}^i - \beta_y^i a_{12}^i)}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2}, \quad (1.7)$$

$$\sigma_y^i = \frac{a_{11}^i e_y^i - a_{21}^i e_x^i - T(\beta_y^i a_{11}^i - \beta_x^i a_{21}^i)}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2}, \quad (1.8)$$

а из (1.2) имеем

$$\tau_{xy}^i = \frac{1}{a_{66}^i} e_{xy}^i.$$

Внося в выражения σ_x^i , σ_y^i и τ_{xy}^i значения e_x^i , e_y^i и e_{xy}^i из (1.5) с учетом (1.6) получим:

$$\sigma_x^i = B_{11}^i \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + B_{12}^i \left(\frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + Q_1^i T, \quad (1.9)$$

$$\sigma_y^i = B_{22}^i \left(\frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + B_{12}^i \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + Q_2^i T, \quad (1.10)$$

$$\tau_{xy}^i = B_{66}^i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \quad (1.11)$$

$$\text{где } B_{11}^i = \frac{a_{22}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} = \frac{E_x^i}{1 - \mu_{xy}^i \mu_{yx}^i}, \quad B_{22}^i = \frac{a_{11}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} = \frac{E_y^i}{1 - \mu_{xy}^i \mu_{yx}^i}$$

$$B_{12}^i = -\frac{a_{12}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} = \frac{E_x^i \mu_{yx}^i}{1 - \mu_{xy}^i \mu_{yx}^i} = \frac{E_y^i \mu_{xy}^i}{1 - \mu_{xy}^i \mu_{yx}^i}, \quad B_{66}^i = \frac{1}{a_{66}^i} = G_{xy}^i,$$

$$Q_1^i = \frac{a_{12}^i \beta_y^i - a_{22}^i \beta_x^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} = -B_{11}^i \beta_y^i - B_{12}^i \beta_x^i = -\frac{E_x^i}{1 - \mu_{xy}^i \mu_{yx}^i} (\beta_x^i + \mu_{yx}^i \beta_y^i),$$

$$Q_2^i = \frac{a_{12}^i \beta_x^i - a_{11}^i \beta_y^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} = -B_{12}^i \beta_x^i - B_{22}^i \beta_y^i = -\frac{E_y^i}{1 - \mu_{xy}^i \mu_{yx}^i} (\mu_{xy}^i \beta_x^i + \beta_y^i).$$

Для определения моментов, тангенциальных и перерезывающих усилий имеем:

$$\begin{aligned}
 M_x &= \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \sigma_x^i z dz, & M_y &= \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \sigma_y^i z dz, & H &= H_{xy} = H_{yx} = \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \tau_{xy}^i z dz, \\
 T_x &= \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \sigma_x^i dz, & T_y &= \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \sigma_y^i dz, & S &= S_{xy} = S_{yx} = \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \tau_{xy}^i dz.
 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Внося в (1.12) значения σ_x^i , σ_y^i и τ_{xy}^i из (1.9) – (1.11), получим:

$$M_x = K_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + K_{12} \frac{\partial v}{\partial y} - D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + K_{1T}, \quad (1.13)$$

$$M_y = K_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + K_{22} \frac{\partial v}{\partial y} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + K_{2T}, \quad (1.14)$$

$$H = K_{66} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (1.15)$$

$$T_x = C_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial v}{\partial y} - K_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - K_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_{1T}, \quad (1.16)$$

$$T_y = C_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{22} \frac{\partial v}{\partial y} - K_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - K_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_{2T}, \quad (1.17)$$

$$S = C_{66} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - 2K_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (1.18)$$

где аналогично с обозначениями, принятыми в [9],

$$C_{ij} = \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} B_{ij}^i dz, \quad K_{ij} = \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} B_{ij}^i z dz, \quad D_{ij} = \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} B_{ij}^i z^2 dz, \quad (1.19)$$

$$\text{а } C_{jT} = \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} Q_j^i T dz, \quad K_{jT} = \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} Q_j^i T z dz. \quad (1.20)$$

При отсутствии внешней нагрузки условия равновесия элемента пластинки, как известно, имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} &= 0, \\
 \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} &= 0, \\
 \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} &= N_x, \\
 \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} &= N_y, \\
 \frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0.
 \end{aligned} \quad (1.21)$$

Из третьего и четвертого уравнений равновесия (1.21), учитывая (1.13)–(1.15), найдем значения N_x и N_y .

Внося полученные значения N_x и N_y в пятое уравнение равновесия (1.21), а значения T_x , T_y и S по (1.16)–(1.18)—в первые два уравнения равновесия (1.21), получим:

$$\left. \begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(K_{11} \frac{\partial}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(K_{66} \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(K_{12} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] u + \\ & + \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(K_{12} \frac{\partial}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(K_{66} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(K_{22} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] v - \\ & - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + 4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(D_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right] \omega = - \frac{\partial^2 K_{1T}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K_{2T}}{\partial y^2}, \end{aligned} \right\} (1.22)$$

$$\left. \begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(C_{11} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{66} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] u + \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(C_{12} \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{66} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] v - \\ & - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{66} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \right] \omega = - \frac{\partial C_{1T}}{\partial x}, \end{aligned} \right\} (1.23)$$

$$\left. \begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(C_{66} \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{12} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] u + \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(C_{66} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{22} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] v - \\ & - \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(K_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + K_{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{66} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \right] \omega = - \frac{\partial C_{2T}}{\partial y}. \end{aligned} \right\} (1.24)$$

§ 2. Некоторые частные случаи

1. Рассмотрим случай, когда коэффициенты температурного расширения и Пуассона не зависят от температуры, модули Юнга и сдвига являются линейными функциями температуры, температура вдоль оси x изменяется по линейному закону, а по толщине пакета— по произвольному закону.

Принимаем:

$$\left. \begin{aligned} & \mu_{xy}^i = \mu_x^i = \text{const}, \quad \mu_{yx}^i = \mu_y^i = \text{const}, \quad \beta_x^i = \beta_y^i = \beta^i = \text{const}, \\ & E_x^i = E_1^i(1 - k_1 T), \quad E_y^i = E_2^i(1 - k_1 T), \quad G_{xy}^i = G^i(1 - k_1 T), \quad T = x\varphi(z) + b. \end{aligned} \right\} (2.1)$$

Введем обозначения:

$$\Phi_1^i = \frac{E_1^i}{1 - \mu_1^i \mu_2^i}, \quad \Phi_2^i = \frac{E_2^i \mu_1^i}{1 - \mu_1^i \mu_2^i} = \frac{E_2^i \mu_1^i}{1 - \mu_1^i \mu_2^i}, \quad \Phi_3^i = \frac{E_2^i}{1 - \mu_1^i \mu_2^i}, \quad (2.2)$$

$$A_1^i = (1 - k_i b) \frac{h_i^2 - h_{i-1}^2}{2}, \quad A_2^i = (1 - k_i b) \frac{h_i^3 - h_{i-1}^3}{3},$$

$$A_3^i = (1 - k_i b)(h_i - h_{i-1}), \quad (2.3)$$

$$C_1^i = k_i \int_{h_{i-1}}^{h_i} \varphi(z) z dz, \quad C_2^i = k_i \int_{h_{i-1}}^{h_i} \varphi(z) z^2 dz, \quad C_3^i = k_i \int_{h_{i-1}}^{h_i} [\varphi(z)]^2 z dz,$$

$$C_4^i = k_i \int_{h_{i-1}}^{h_i} \varphi(z) dz, \quad C_5^i = k_i \int_{h_{i-1}}^{h_i} [\varphi(z)]^2 dz, \quad (2.4)$$

$$\Gamma_{j\nu} = \sum_{i=1}^n \Phi_j^i A_\nu^i \quad (j=1,2,3; \nu=1,2,3), \quad \Delta_{j\nu} = \sum_{i=1}^n \Phi_j^i C_\nu^i \quad (j=1,2,3; \nu=1,2,4),$$

$$R_{j\nu} = \sum_{i=1}^n \Phi_j^i C_\nu^i \vartheta^i \quad (j=1,2,3; \nu=3,5), \quad P_{j\nu} = b \sum_{i=1}^n \Phi_j^i A_\nu^i \vartheta^i \quad (j=1,2,3; \nu=1,3),$$

$$\Omega_{j\nu} = \sum_{i=1}^n \Phi_j^i C_\nu^i \vartheta^i \frac{1-2k_i b}{k_i} \quad (j=1,2,3; \nu=1,4),$$

$$L_j = \sum_{i=1}^n G^i A_j^i \quad (j=1,2,3), \quad F_j = \sum_{i=1}^n G^i C_j^i \quad (j=1,2,4). \quad (2.5)$$

Заметим, что коэффициенты Φ_j^i , A_j^i , C_j^i , а следовательно, и $\Gamma_{j\nu}$, $\Delta_{j\nu}$, $R_{j\nu}$, $P_{j\nu}$, $\Omega_{j\nu}$, L_j , F_j не зависят от координат x , y , z .

Внося (2.1) в (1.19), (1.20) и пользуясь обозначениями (2.2)–(2.5), для $C_{j\nu}$, $K_{j\nu}$, $D_{j\nu}$, C_{jT} , K_{jT} получим:

$$C_{11} = \Gamma_{13} - x\Delta_{14}, \quad C_{12} = \Gamma_{23} - x\Delta_{24}, \quad C_{22} = \Gamma_{33} - x\Delta_{34}, \quad C_{66} = L_3 - xF_4,$$

$$K_{11} = \Gamma_{11} - x\Delta_{11}, \quad K_{12} = \Gamma_{21} - x\Delta_{21}, \quad K_{22} = \Gamma_{31} - x\Delta_{31}, \quad K_{66} = L_1 - xF_1,$$

$$D_{11} = \Gamma_{12} - x\Delta_{12}, \quad D_{12} = \Gamma_{22} - x\Delta_{22}, \quad D_{22} = \Gamma_{32} - x\Delta_{32}, \quad D_{66} = L_2 - xF_2,$$

$$C_{1T} = -[P_{13} + P_{23} + x(\Omega_{14} + \Omega_{24}) - x^2(R_{15} + R_{25})],$$

$$C_{2T} = -[P_{23} + P_{33} + x(\Omega_{24} + \Omega_{34}) - x^2(R_{25} + R_{35})],$$

$$K_{1T} = -[P_{11} + P_{21} + x(\Omega_{11} + \Omega_{21}) - x^2(R_{13} + R_{23})],$$

$$K_{2T} = -[P_{21} + P_{31} + x(\Omega_{21} + \Omega_{31}) - x^2(R_{23} + R_{33})]. \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (1.22)–(1.24), получим следующую систему дифференциальных уравнений относительно перемещений u , v и w :

$$\left\{ (\Gamma_{11} - x\Delta_{11}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\Delta_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + [\Gamma_{21} + 2L_1 - x(\Delta_{21} + 2F_1)] \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - \right.$$

$$\left. - 2F_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} u + \left\{ [\Gamma_{21} + 2L_1 - x(\Delta_{21} + 2F_1)] \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - 2(\Delta_{21} + F_1) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \right.$$

$$\left. + (\Gamma_{31} - x\Delta_{31}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} v + \left\{ -(\Gamma_{12} - x\Delta_{12}) \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\Delta_{12} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 2[\Gamma_{22} + 2L_2 - \right.$$

$$\left. - x(\Delta_{22} + 2F_2)] \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(\Delta_{22} + 2F_2) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - (\Gamma_{32} - x\Delta_{32}) \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right\} w = 0, \quad (2.7)$$

$$\left. \begin{aligned} & \left[(\Gamma_{13} - x\Delta_{14}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \Delta_{14} \frac{\partial}{\partial x} + (L_3 - xF_4) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] u + \\ & + \left\{ [\Gamma_{23} + L_3 - x(\Delta_{24} + F_4)] \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \Delta_{24} \frac{\partial}{\partial y} \right\} v + \left\{ -(\Gamma_{11} - x\Delta_{11}) \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \right. \\ & + \Delta_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left[\Gamma_{21} + 2L_1 - x(\Delta_{21} + 2F_1) \right] \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \Delta_{21} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left. \right\} w = \\ & = \Omega_{14} + \Omega_{24} - 2x(R_{15} + R_{25}), \end{aligned} \right\} (2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ [\Gamma_{23} + L_3 - x(\Delta_{24} + F_4)] \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - F_4 \frac{\partial}{\partial y} \right\} u + \\ & + \left[(L_3 - xF_4) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - F_4 \frac{\partial}{\partial x} + (\Gamma_{22} - x\Delta_{22}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] v + \\ & + \left\{ -[\Gamma_{21} + 2L_1 - x(\Delta_{21} + 2F_1)] \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + 2F_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - (\Gamma_{31} - x\Delta_{31}) \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right\} w = 0. \end{aligned} \right\} (2.9)$$

Итак, решение рассматриваемой задачи сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений (2.7)–(2.9).

Полученные значения u , v и w (содержащие восемь постоянных интегрирования) внесем в (1.9)–(1.11) и (1.13)–(1.18), после чего из условий закрепления пластинки по контуру определяются значения постоянных интегрирования, а следовательно, и окончательные значения перемещений u , v , w , напряжений σ'_x , σ'_y , τ'_{xy} , моментов M_x , M_y , H и усилий T_x , T_y и S .

2. Рассмотрим случай, когда коэффициенты температурного расширения и Пуассона не зависят от температуры, модули Юнга и сдвига являются линейными функциями температуры, а температура изменяется только по толщине пакета по произвольному закону.

Принимаем:

$$\left. \begin{aligned} \mu'_{xy} = \mu'_i = \text{const}, \quad \mu'_{yx} = \mu'_2 = \text{const}, \quad \beta'_x = \beta'_y = \beta'_i = \text{const}, \\ E'_x = E'_1(1 - k_i T), \quad E'_y = E'_2(1 - k_i T), \quad G'_{xy} = G'_i(1 - k_i T), \quad T = T(z). \end{aligned} \right\} (2.10)$$

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \Omega'_0 = \int_{h_{i-1}}^{h_i} (1 - k_i T) z dz, \quad \Omega'_1 = \int_{h_{i-1}}^{h_i} (1 - k_i T) z^2 dz, \quad \Omega'_2 = \int_{h_{i-1}}^{h_i} (1 - k_i T) dz, \\ \Omega'_3 = \int_{h_{i-1}}^{h_i} (1 - k_i T) T z dz, \quad \Omega'_4 = \int_{h_{i-1}}^{h_i} (1 - k_i T) T dz. \end{aligned} \right\} (2.11)$$

Внеся (2.10) в (1.19), (1.20) и пользуясь обозначениями (2.2) и (2.11), для коэффициентов C_{jv} , K_{jv} , D_{jv} , C_{jT} , K_{jT} получим:

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \sum_{i=1}^n \Phi_i^1 \Omega_i^1 = \text{const}, & C_{12} &= \sum_{i=1}^n \Phi_i^1 \Omega_i^2 = \text{const}, & C_{22} &= \sum_{i=1}^n \Phi_i^2 \Omega_i^2 = \text{const}, \\
 K_{11} &= \sum_{i=1}^n \Phi_i^1 \Omega_i^0 = \text{const}, & K_{12} &= \sum_{i=1}^n \Phi_i^1 \Omega_i^0 = \text{const}, & K_{22} &= \sum_{i=1}^n \Phi_i^2 \Omega_i^0 = \text{const}, \\
 D_{11} &= \sum_{i=1}^n \Phi_i^1 \Omega_i^1 = \text{const}, & D_{12} &= \sum_{i=1}^n \Phi_i^1 \Omega_i^1 = \text{const}, & D_{22} &= \sum_{i=1}^n \Phi_i^2 \Omega_i^1 = \text{const}, \\
 C_{66} &= \sum_{i=1}^n G_i^1 \Omega_i^2 = \text{const}, & K_{66} &= \sum_{i=1}^n C_i^1 \Omega_i^0 = \text{const}, & D_{66} &= \sum_{i=1}^n G_i^1 \Omega_i^1 = \text{const}, \\
 C_{17} &= - \sum_{i=1}^n (\Phi_i^1 + \Phi_i^2) \beta_i^1 \Omega_i^1 = \text{const}, & C_{27} &= - \sum_{i=1}^n (\Phi_i^2 + \Phi_i^1) \beta_i^2 \Omega_i^1 = \text{const}, \\
 K_{17} &= - \sum_{i=1}^n (\Phi_i^1 + \Phi_i^2) \beta_i^1 \Omega_i^0 = \text{const}, & K_{27} &= - \sum_{i=1}^n (\Phi_i^2 + \Phi_i^1) \beta_i^2 \Omega_i^0 = \text{const}.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Для рассматриваемого случая основные уравнения (1.22)–(1.24) примет вид:

$$\begin{aligned}
 & \left[K_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (K_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y^2} \right] u + \left[(K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + K_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right] v - \\
 & - \left[D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] w = 0,
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \\
 & - \left[K_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right] w = 0,
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(C_{12} + C_{66} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v - \\
 & - \left[(K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + K_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right] w = 0.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Нетрудно заметить, что уравнения (2.13)–(2.15) совпадают с уравнениями, полученными С. А. Амбарцумяном в работе [9], при $X=Y=Z=0$.

Как обычно, введя потенциальную функцию и приняв

$$\begin{aligned}
 u &= -K_{11} C_{66} \frac{\partial^5 \Psi}{\partial x^5} + [C_{12}(K_{12} + 2K_{66}) - C_{22} K_{11}] \frac{\partial^5 \Psi}{\partial x^3 \partial y^2} + \\
 & + [-C_{22}(K_{12} + 2K_{66}) + K_{22}(C_{12} + C_{66})] \frac{\partial^5 \Psi}{\partial x \partial y^4},
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$v = [-C_{11}(K_{12} + 2K_{66}) + K_{11}(C_{12} + C_{66})] \frac{\partial^5 \Psi}{\partial x^4 \partial y} + \\ + [C_{12}(K_{12} + 2K_{66}) - C_{11}K_{22}] \frac{\partial^5 \Psi}{\partial x^2 \partial y^3} - K_{22} C_{66} \frac{\partial^5 \Psi}{\partial y^5}, \quad (2.17)$$

$$\omega = -C_{11} C_{66} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + (C_{12}^2 + 2C_{12} C_{66} - C_{11} C_{22}) \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial y^2} - C_{22} C_{66} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4}, \quad (2.18)$$

тождественно удовлетворим уравнениям (2.14) и (2.15), а внося значения u , v , ω по (2.16)–(2.18) в (2.13), получим разрешающее уравнение для нахождения функции Ψ [9]

$$B_1 \frac{\partial^8 \Psi}{\partial x^8} + B_2 \frac{\partial^8 \Psi}{\partial x^6 \partial y^2} + B_3 \frac{\partial^8 \Psi}{\partial x^4 \partial y^4} + B_4 \frac{\partial^8 \Psi}{\partial x^2 \partial y^6} + B_5 \frac{\partial^8 \Psi}{\partial y^8} = 0, \quad (2.19)$$

где

$$B_1 = (C_{11} D_{11} - K_{11}^2) C_{66}, \quad (2.20)$$

$$B_2 = 2C_{12} K_{11} (K_{12} + 2K_{66}) - C_{11} (K_{12} + 2K_{66})^2 - D_{11} (C_{12}^2 + 2C_{12} C_{66} - \\ - C_{11} C_{22}) - C_{22} K_{11}^2 + 2C_{11} C_{66} (D_{12} + 2D_{66}), \quad (2.21)$$

$$B_3 = -2(K_{12} + 2K_{66})(C_{22} K_{11} + C_{11} K_{22}) + 2C_{12} (K_{12} + 2K_{66})^2 - 2(D_{12} + \\ + 2D_{66})(C_{12}^2 + 2C_{12} C_{66} - C_{11} C_{22}) + 2K_{11} K_{22} (C_{12} + C_{66}) + C_{66} (C_{11} D_{22} + C_{22} D_{11}), \quad (2.22)$$

$$B_4 = 2C_{12} K_{22} (K_{12} + 2K_{66}) - C_{22} (K_{12} + 2K_{66})^2 - D_{22} (C_{12}^2 + 2C_{12} C_{66} - C_{11} C_{22}) - \\ - C_{11} K_{22}^2 + 2C_{22} C_{66} (D_{12} + 2D_{66}), \quad (2.23)$$

$$B_5 = (C_{22} D_{22} - K_{22}^2) C_{66}. \quad (2.24)$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи сводится к интегрированию разрешающего уравнения (2.19).

Внося общее решение однородного дифференциального уравнения (2.19) в (2.16)–(2.18), а полученные значения u , v и ω в (1.9)–(1.11) и (1.13)–(1.18), выразим перемещения, напряжения, моменты и усилия через найденную потенциальную функцию Ψ , содержащую восемь постоянных интегрирования.

Далее, из условий закрепления пластинки по контуру, можно определить значения постоянных интегрирования, а следовательно и окончательные значения перемещений u , v , ω , напряжений σ_x^i , σ_y^i , τ_{xy}^i , моментов M_x , M_y , H и усилий T_x , T_y , S .

3. Рассмотрим случай, когда коэффициенты температурного расширения и Пуассона не зависят от температуры, модули Юнга и сдвига являются показательными функциями температуры, а температура по толщине пакета изменяется по произвольному знаку.

Принимаем:

$$\left. \begin{aligned} \mu_{xy}^i = \mu_1^i = \text{const}, \quad \mu_{yx}^i = \mu_2^i = \text{const}, \quad \beta_x^i = \beta_y^i = \beta^i = \text{const}, \\ E_x^i = E_1^i (1 + \alpha_i - \alpha_i e^{k_i T}), \quad E_y^i = E_2^i (1 + \alpha_i - \alpha_i e^{k_i T}), \quad G_{xy}^i = G^i (1 + \alpha_i - \alpha_i e^{k_i T}), \\ T = T(z). \end{aligned} \right\} (2.25)$$

Пользуясь обозначениями (2.2), а также введя

$$\begin{aligned}
 A_1^i &= (1+\alpha_j)(h_i - h_{i-1}), & A_2^i &= (1+\alpha_j) \frac{h_i^2 - h_{i-1}^2}{2}, & A_3^i &= (1+\alpha_j) \frac{h_i^3 - h_{i-1}^3}{3}, \\
 A_4^i &= (1+\alpha) \int_{h_{i-1}}^{h_i} T dz, & A_5^i &= (1+\alpha) \int_{h_{i-1}}^{h_i} T z dz, \\
 \Omega_1^i &= \alpha_j \int_{h_{i-1}}^{h_i} e^{k_i T} dz, & \Omega_2^i &= \alpha_j \int_{h_{i-1}}^{h_i} e^{k_i T} z dz, & \Omega_3^i &= \alpha_j \int_{h_{i-1}}^{h_i} e^{k_i T} z^2 dz, \\
 \Omega_4^i &= \alpha_j \int_{h_{i-1}}^{h_i} e^{k_i T} T dz, & \Omega_5^i &= \alpha_j \int_{h_{i-1}}^{h_i} e^{k_i T} T z dz,
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

заметим, что коэффициенты A_j и Ω_j ($j=1, 2, \dots, 5$) не зависят от координат x, y, z .

Внося (2.25) в (1.19), (1.20) и пользуясь обозначениями (2.2) и (2.25), получим:

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \sum_{i=1}^n \Phi_1^i (A_1^i - \Omega_1^i), & C_{12} &= \sum_{i=1}^n \Phi_2^i (A_1^i - \Omega_1^i), \\
 C_{22} &= \sum_{i=1}^n \Phi_1^i (A_1^i - \Omega_1^i), & C_{66} &= \sum_{i=1}^n G^i (A_1^i - \Omega_1^i), \\
 K_{11} &= \sum_{i=1}^n \Phi_1^i (A_2^i - \Omega_2^i), & K_{12} &= \sum_{i=1}^n \Phi_2^i (A_2^i - \Omega_2^i), \\
 K_{22} &= \sum_{i=1}^n \Phi_3^i (A_2^i - \Omega_2^i), & K_{66} &= \sum_{i=1}^n G^i (A_2^i - \Omega_2^i), \\
 D_{11} &= \sum_{i=1}^n \Phi_1^i (A_3^i - \Omega_3^i), & D_{12} &= \sum_{i=1}^n \Phi_2^i (A_3^i - \Omega_3^i), \\
 D_{22} &= \sum_{i=1}^n \Phi_3^i (A_3^i - \Omega_3^i), & D_{66} &= \sum_{i=1}^n G^i (A_3^i - \Omega_3^i), \\
 C_{17} &= - \sum_{i=1}^n (\Phi_1^i + \Phi_2^i) (A_4^i - \Omega_4^i) \beta^i, & C_{27} &= - \sum_{i=1}^n (\Phi_2^i + \Phi_3^i) (A_4^i - \Omega_4^i) \beta^i, \\
 K_{17} &= - \sum_{i=1}^n (\Phi_1^i + \Phi_2^i) (A_5^i - \Omega_5^i) \beta^i, & K_{27} &= - \sum_{i=1}^n (\Phi_2^i + \Phi_3^i) (A_5^i - \Omega_5^i) \beta^i.
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

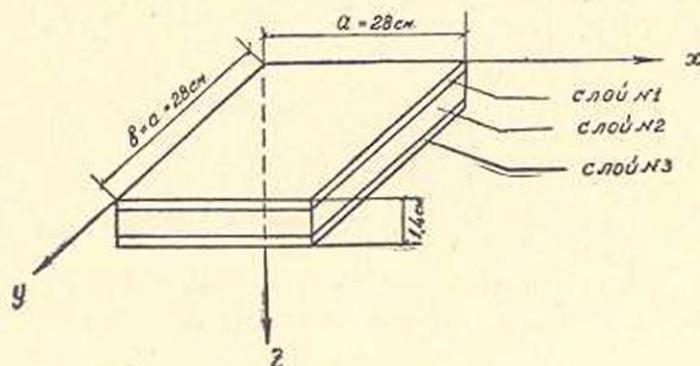
Дальнейший ход расчета полностью совпадает со случаем, изложенным в п. 2 настоящего параграфа с той лишь разницей, что в (2.13)–(2.24) значения C_{jv} , K_{jv} , D_{jv} , C_{j7} и K_{j7} определяются по (2.27).

Как и следовало ожидать, основные результаты п. 2 (а следовательно и п. 3) совпадают с результатами, полученными С. А Амбарцумяном в работе [9], при $X=Y=Z=0$.

§ 3. Числовой пример

Для иллюстрации хода расчета рассмотрим температурную задачу квадратной ($a=b$), трехслойной ($n=3$), свободно опертой пластинки (фиг. 3) с условиями на контуре

$$\begin{aligned} v=w=T_x=M_x=0 & \quad \text{при} \quad x=0, \quad x=a, \\ u=v=w=M_y=0 & \quad \text{при} \quad y=0, \quad y=a. \end{aligned}$$



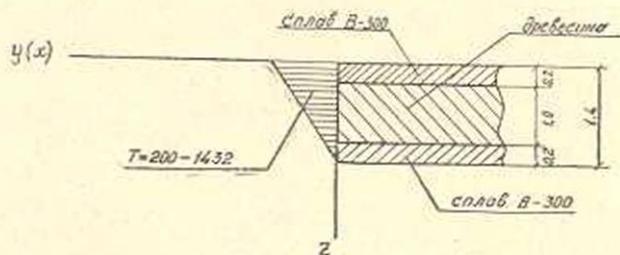
Фиг. 3.

Не уточняя истинного закона распределения температуры, условно принимаем линейный закон распределения температуры по толщине пакета с перепадом от 200° до 0° , а также считаем:

а) материал слоев №№ 1 и 3 (сплав В-300) изотропным, но с упругими постоянными, зависящими от температуры;

б) материал слоя № 2 ортотропным, с упругими постоянными, не зависящими от температуры.

Материалы и толщины слоев, а также эпюра распределения температуры по толщине показаны на фиг. 4.



Фиг. 4.

На основании опытных данных, приведенных в [10], для сплава В-300 подбираем аналитическое выражение зависимости модуля Юнга от температуры в виде $E=6,5(1-0,0005T)10^5 \text{ кг/см}^2$.

Таким образом имеем:

для слоев №№ 1 и 3 [10], [11], [12]:

$$\left. \begin{aligned} E_x^1 &= E_y^1 = E_x^3 = E_y^3 = 6,5(1 - 0,0005T)10^5 \text{ кг/см}^2, \\ G_{xy}^1 &= G_{xy}^3 = 2,4(1 - 0,0005T)10^5 \text{ кг/см}^2, \\ \mu_1^1 &= \mu_2^1 = \mu_1^3 = \mu_2^3 = 0,35, \\ \beta_x^1 &= \beta_y^1 = \beta_x^3 = \beta_y^3 = 2,55 \times 10^{-5}, \\ k_1 &= k_3 = 0,0005; \end{aligned} \right\} (3.1)$$

для слоя № 2 [11], [12]:

$$\left. \begin{aligned} E_x^2 &= 1,2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, & \mu_1^2 &= 0,072, \\ E_y^2 &= 0,6 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, & \mu_2^2 &= 0,036, \\ G_{xy}^2 &= 7 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2, \\ \beta_x^2 &= \beta_y^2 = 0,4 \cdot 10^{-5}, \\ k_2 &= 0. \end{aligned} \right\} (3.2)$$

Из (2.2) и (2.11), принимая во внимание закон изменения температуры по толщине пакета $T = 200 - 143z$, получим:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1^1 &= \Phi_2^1 = \Phi_1^3 = \Phi_2^3 = 7,407 \cdot 10^5, \\ \Phi_1^2 &= 1,203 \cdot 10^5, \\ \Phi_2^1 &= \Phi_2^2 = 2,593 \cdot 10^5, \\ \Phi_1^2 &= 0,04331 \cdot 10^5, \\ \Phi_2^3 &= 0,6016 \cdot 10^5; \end{aligned} \right\} (3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \Omega_0^1 &= 0,01819; & \Omega_1^1 &= 0,002429; & \Omega_2^1 &= 0,1814; & \Omega_3^1 &= 3,291; \\ \Omega_0^2 &= 0,7000; & \Omega_1^2 &= 0,5733; & \Omega_2^2 &= 1,000; & \Omega_3^2 &= 58,10; \\ \Omega_0^3 &= 0,2582; & \Omega_1^3 &= 0,3364; & \Omega_2^3 &= 0,1986; & \Omega_3^3 &= 3,585. \end{aligned} \right\} (3.4)$$

Внеся (3.3) и (3.4), а также значения β^i и G_{xy}^i в (2.12), получим:

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= 4,018 \times 10^5; & C_{12} &= 1,028 \times 10^5; & C_{22} &= 3,416 \times 10^5; \\ & & & & C_{60} &= 0,9820 \times 10^5; \\ K_{11} &= 2,889 \times 10^5; & K_{12} &= 0,7469 \times 10^5; & K_{22} &= 2,468 \times 10^5; \\ & & & & K_{60} &= 0,7123 \times 10^5; \\ D_{11} &= 3,199 \times 10^5; & D_{12} &= 0,9032 \times 10^5; & D_{22} &= 2,855 \times 10^5; \\ & & & & D_{60} &= 0,8533 \times 10^5; \end{aligned} \right\} (3.5)$$

$$K_{27} = -190,4. \quad (3.6)$$

Подставив (3.5) в (2.19)–(2.24), будем иметь разрешающее уравнение для нахождения функции Ψ

$$\begin{aligned} 4,425 \frac{\partial^8 \Psi}{\partial x^8} + 20,10 \frac{\partial^8 \Psi}{\partial x^6 \partial y^2} + 30,01 \frac{\partial^8 \Psi}{\partial x^4 \partial y^4} + 18,34 \frac{\partial^8 \Psi}{\partial x^2 \partial y^6} + \\ + 3,593 \frac{\partial^8 \Psi}{\partial y^8} = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Контурным условиям при $x=0$ и $x=a$ удовлетворим, приняв

$$\Psi = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{\pi m x}{a}.$$

В первом приближении, ограничиваясь первым членом разложения, будем иметь:

$$\Psi = Y \sin \frac{\pi x}{a}. \quad (3.8)$$

Внеся (3.8) в (3.7), получим дифференциальное уравнение

$$3,593 Y^{VIII} - 23,09 \times 10^{-2} Y^{VI} + 47,56 \times 10^{-4} Y^{IV} - 40,10 \times 10^{-6} Y^{II} + 11,11 \times 10^{-8} Y = 0, \quad (3.9)$$

решив которое, найдем значение Y , а следовательно и значение потенциальной функции

$$\begin{aligned} \Gamma = & \left(C_1 \operatorname{sh} 0,112y \sin 0,0186y + C_2 \operatorname{sh} 0,112y \cos 0,0186y + \right. \\ & + C_3 \operatorname{ch} 0,112y \sin 0,0186y + C_4 \operatorname{ch} 0,112y \cos 0,0186y + C_5 \operatorname{sh} 0,186y + \\ & \left. + C_6 \operatorname{ch} 0,186y + C_7 \operatorname{sh} 0,0735y + C_8 \operatorname{ch} 0,0735y \right) \sin \frac{\pi x}{a}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Для определения значений постоянных интегрирования C_1, C_2, \dots, C_8 , внесем (3.10) в (2.16)–(2.18), а полученные результаты и (3.6)–в (1.14).

Для u, v, w и M_y получим

$$\begin{aligned} u = & \left[(4,47C_1 - 1,69C_3) \operatorname{sh} 0,112y \sin 0,0186y + (4,47C_2 + \right. \\ & + 1,69C_3) \operatorname{sh} 0,112y \cos 0,0186y + (4,47C_3 - \\ & - 1,69C_2) \operatorname{ch} 0,112y \sin 0,0186y + (4,47C_4 + \\ & + 1,69C_1) \operatorname{ch} 0,112y \cos 0,0186y - 0,684C_5 \operatorname{sh} 0,186y - \\ & - 0,684C_6 \operatorname{ch} 0,186y - 0,0239C_7 \operatorname{sh} 0,0735y - \\ & \left. - 0,0239C_8 \operatorname{ch} 0,0735y \right] \cos \frac{\pi x}{a} \times 10^5, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} v = & \left[(4,15C_3 - 2,49C_5) \operatorname{sh} 0,112y \sin 0,0186y + (4,15C_4 + \right. \\ & + 2,49C_1) \operatorname{sh} 0,112y \cos 0,0186y + (4,15C_1 - \\ & - 2,49C_4) \operatorname{ch} 0,112y \sin 0,0186y + (4,15C_2 + \\ & + 2,49C_3) \operatorname{ch} 0,112y \cos 0,0186y - 0,250C_6 \operatorname{sh} 0,186y - \\ & - 0,250C_7 \operatorname{ch} 0,186y - 0,0768C_8 \operatorname{sh} 0,0735y - \\ & \left. - 0,0768C_8 \operatorname{ch} 0,0735y \right] \sin \frac{\pi x}{a} \times 10^5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w = & \left[(5,68C_1 - 2,18C_4) \operatorname{sh} 0,112y \sin 0,0186y + \right. \\
 & + (5,68C_2 + 2,18C_3) \operatorname{sh} 0,112y \cos 0,0186y + \\
 & + (5,68C_3 - 2,18C_2) \operatorname{ch} 0,112y \sin 0,0186y + \\
 & + (5,68C_4 + 2,18C_1) \operatorname{ch} 0,112y \cos 0,0186y + 0,0215C_5 \operatorname{sh} 0,186y + \\
 & + 0,0215C_6 \operatorname{ch} 0,186y + 0,00806C_7 \operatorname{sh} 0,0735y + \\
 & \left. + 0,00806C_8 \operatorname{ch} 0,0735y \right] \sin \frac{\pi x}{a} \times 10^9, \\
 M_y = & \left[(-4,07C_1 + 4,46C_4) \operatorname{sh} 0,112y \sin 0,0186y + \right. \\
 & + (-4,07C_2 - 4,46C_3) \operatorname{sh} 0,112y \cos 0,0186y + \\
 & + (-4,07C_3 + 4,46C_2) \operatorname{ch} 0,112y \sin 0,0186y + \\
 & + (-4,07C_4 - 4,46C_1) \operatorname{ch} 0,112y \cos 0,0186y - 0,707C_5 \operatorname{sh} 0,186y - \\
 & - 0,707C_6 \operatorname{ch} 0,186y - 0,124C_7 \operatorname{sh} 0,0735y - 0,124C_8 \operatorname{ch} 0,0735y - \\
 & \left. - 242 \times 10^{-9} \right] \sin \frac{\pi x}{a} \times 10^9.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Удовлетворяя условиям

$$u = v = w = M_y = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \text{ и } y = a,$$

(из 3.11) получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 4,47C_4 + 1,69C_1 - 0,684C_5 - 0,0239C_8 &= 0, \\
 4,15C_2 + 2,49C_3 - 0,250C_5 - 0,0768C_7 &= 0, \\
 5,68C_4 + 2,18C_1 + 0,0215C_6 + 0,00806C_8 &= 0, \\
 -4,07C_4 - 4,46C_1 - 0,707C_6 - 0,124C_8 &= 242 \times 10^{-9}, \\
 42,4C_1 + 34,8C_2 + 42,5C_3 + 35,0C_4 - 62,5C_5 - 62,5C_6 - 0,0920C_7 - \\
 & - 0,0951C_8 = 0, \\
 48,6C_1 + 27,3C_2 + 48,6C_3 + 27,1C_4 - 22,8C_5 - 22,8C_6 - 0,306C_7 - \\
 & - 0,296C_8 = 0, \\
 54,3C_1 + 44,1C_2 + 54,3C_3 + 44,3C_4 + 1,96C_5 + 1,96C_6 + 0,0310C_7 + \\
 & + 0,0321C_8 = 0, \\
 -67,9C_1 - 15,0C_2 - 67,8C_3 - 15,2C_4 - 64,6C_5 - 64,6C_6 - 0,478C_7 - \\
 & - 0,493C_8 = 242 \times 10^{-9}.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Решив (3.12), будем иметь:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -51,79 \times 10^{-9}; & C_2 &= -17,31 \times 10^{-9}; & C_3 &= 48,70 \times 10^{-9}; \\
 C_4 &= 21,20 \times 10^{-9}; & C_5 &= -46,74 \times 10^{-9}; & C_6 &= 47,39 \times 10^{-9}; \\
 C_7 &= 795,5 \times 10^{-9}; & C_8 &= -1055 \times 10^{-9}.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Из (3.11), учитывая (3.13), получим:

$$\begin{aligned}
 u = & (-267 \operatorname{sh} 0,112y \sin 0,0186y + 5,42 \operatorname{sh} 0,112y \cos 0,0186y + \\
 & + 247 \operatorname{ch} 0,112y \sin 0,0186y + 7,22 \operatorname{ch} 0,112y \cos 0,0186y + \\
 & + 31,9 \operatorname{sh} 0,186y - 32,4 \operatorname{ch} 0,186y - 19,0 \operatorname{sh} 0,0735y + \\
 & + 25,1 \operatorname{ch} 0,0735y) \cos 0,112x \times 10^{-4},
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$v = (245 \operatorname{sh} 0,112y \sin 0,0186y - 41,0 \operatorname{sh} 0,112y \cos 0,0186y - \\ - 268 \operatorname{ch} 0,112y \sin 0,0186y + 49,5 \operatorname{ch} 0,112y \cos 0,0186y - \\ - 11,9 \operatorname{sh} 0,186y + 11,7 \operatorname{ch} 0,186y + 80,6 \operatorname{sh} 0,0735y - \\ - 61,1 \operatorname{ch} 0,0735y) \sin 0,112x \times 10^{-4}, \quad (3.14)$$

$$w = (-340 \operatorname{sh} 0,112y \sin 0,0186y + 7,90 \operatorname{sh} 0,112y \cos 0,0186y + \\ + 314 \operatorname{ch} 0,112y \sin 0,0186y + 7,49 \operatorname{ch} 0,112y \cos 0,0186y - \operatorname{sh} 0,186y + \\ + 1,02 \operatorname{ch} 0,186y + 6,42 \operatorname{sh} 0,0735y - 8,46 \operatorname{ch} 0,0735y) \sin 0,112x \times 10^{-3}.$$

Имея окончательные значения u , v и w , нетрудно по (1.6) найти перемещения и деформации, а по (1.13)—(1.18) и по третьему и четвертому уравнениям (1.21)—усилия и моменты в любой точке пластинки.

В частности, подставив в последнее выражение (3.14) $x=y=14$ см, найдем прогиб центра верхней плоскости пластинки $w_0=0,326$ мм.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 23 XI 1959

Ս. Մ. Գուրգուրյան

ՋԵՐՄԱՍՏԻՃԱՆԻՑ ԿԱԽՎԱԾ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՀԱՍՏԱՏՈՒՆՆԵՐԻ ԵՎ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԸՆԴԱՐՁԱԿՄԱՆ ԳՈՐԾԱԿՑԻ ԴԵՊՔՈՒՄ ՇԵՐՏԱՎՈՐ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՍԱԼԻ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ՀԱՇՎՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Չդերժամացվող նորմալի հիպոթեզի հիման վրա բերվում է շերտավոր օրթոտրոպ սալի շերմալին խնդրի լուծումը, երբ ինչպես առաձգականության գործակիցները, այնպես էլ շերմալին ընդարձակման գործակիցը կախված են շերմաստիճանից:

Ամենաընդհանուր դեպքի համար ստացված է փոփոխական գործակիցներիով մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների (1.22)—(1.24) սխեմները:

Դիտարկված են առաձգականության գործակիցների և շերմաստիճանի փոփոխման երեք դեպքեր:

Հաշվման ընթացքը ցուցադրելու նպատակով լուծված է մեկ իջվալին օրինակ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. Гостехиздат, 1947.
2. Амбарцумян С. А. Температурные напряжения в слоистых анизотропных оболочках. Известия АН Арм. ССР, том V, № 6, 1952.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1957.

4. Григолюк Э. И. Тонкие биметаллические оболочки и пластины. Инженерный сборник, т. XVII, 1953.
5. Королев В. И. Тонкие двухслойные пластинки и оболочки. Инженерный сборник, т. XXII, 1955.
6. Аксельрад Э. Л. О температурных деформациях неоднородных оболочек. Известия АН СССР, ОТН, № 8, 1958.
7. Аксельрад Э. Л. Некоторые задачи теории неоднородных по термоупругим свойствам оболочек. Автореферат кандидатской диссертации, 1959.
8. Шестериков С. А. Температурные напряжения в упругом диске постоянной толщины. Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 5, 1959.
9. Амбарцумян С. А. К вопросу расчета слоистых анизотропных оболочек. Известия АН Арм. ССР, ФМЕТ науки, том VI, № 3, 1953.
10. Булыгин И. П., Власова П. Т., Горбодей А. Т., Селиверстова П. М., Чупахин С. Е. Атлас диаграмм растяжения при высоких температурах, кривых ползучести и длительной прочности сталей и сплавов для двигателей. Оборонгиз, 1957.
11. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1953.
12. Справочник авиаконструктора, том III, 1939.