

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

П. О. Галфаян

Изгиб прямоугольного стержня с тонким усиливающим покрытием

Задача об изгибе упругого составного стержня была исследована в работах [1, 2, 3, 4]. В работе [2] получено также контурное условие задачи об изгибе стержня с тонким усиливающим покрытием в ее приближенной постановке.

В настоящей статье рассмотрен изгиб поперечной силой прямоугольного стержня с тонким усиливающим покрытием. Для определения функции напряжений использована ортонормированная система функций, исследованная в работе [6]. Рассмотрены частные случаи, когда тонкие усиливающие покрытия имеются только на гранях, параллельных или перпендикулярных изгибающей силе. Определены касательные напряжения в характерных точках сечения.

1. Координатная система и размеры поперечного сечения прямоугольного стержня с тонким усиливающим покрытием показаны на (фиг. 1).

Предположим, что коэффициенты Пуассона для основного материала и усиливающего покрытия одинаковы. Тогда при изгибе стержня, боковая поверхность которого свободна от внешних воздействий, можно положить

$$\tau_{xy} = \sigma_x = \sigma_y = 0. \quad (1.1)$$

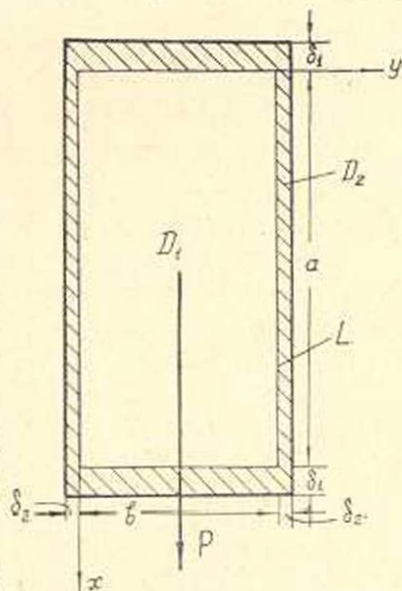
Для осевой деформации ε_z принимаем следующее выражение

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_2} (A_0 x + B_0)(l - z). \quad (1.2)$$

Для нормального напряжения будем иметь

$$\sigma_z^{(i)} = (A_i x + B_i)(l - z) \quad (i=1, 2), \quad (1.3)$$

где l — длина стержня, E_2 — модуль упругости материала покрытия, а A_i и B_i ($i=0, 1, 2$) — постоянные коэффициенты, подлежащие определению.



Фиг. 1.

Рассматривая условия равновесия части стержня, заключенной между свободным концом $z=l$ и произвольным сечением $z=const$, будем иметь

$$\iint_{D_0} \sigma_z dx dy = 0, \quad \iint_{D_0} x \sigma_z dx dy = -M, \quad (1.4)$$

где $D_0 = D_1 + D_2$ — область поперечного сечения изгибаемого стержня, M — изгибающий момент в данном сечении $z=const$ стержня, равный

$$M = P \cdot (l - z). \quad (1.5)$$

Из закона Гука и условий (1.2), (1.3) получим:

$$A_1 = \frac{E_1}{E_2} A_0, \quad B_1 = \frac{E_1}{E_2} B_0 \quad \text{и} \quad A_2 = A_0, \quad B_2 = B_0. \quad (1.6)$$

Используя (1.3), (1.5) и (1.6), из (1.4) для постоянных A_0 и B_0 получаем систему линейных уравнений, решение которой будет

$$A_0 = -\frac{P}{ba^3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{12} \cdot \frac{E_1}{E_2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\delta_2}{b} + \frac{\delta_1}{a} \left(1 + 2 \frac{\delta_2}{b}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\delta_1}{a} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\delta_1^2}{a^2}\right)}, \quad (1.7)$$

$$B_0 = -\frac{a}{2} A_0.$$

При помощи (1.2), (1.3) и (1.7) определяются деформация ε_z и напряжение σ_z .

Перейдем теперь к определению касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} в соответствующих областях D_1 и D_2 .

Как известно [1, 2], при решении задач об изгибе стержня с тонким усиливающим покрытием, функция напряжений $F(x, y)$ в области поперечного сечения, соответствующей основному материалу, удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{\nu}{1+\nu} A_1 \cdot \left(y - \frac{b}{2}\right) \quad (1.8)$$

и контурному условию

$$F + \mu_i \frac{\partial F}{\partial n} = - \int \left(A_1 \frac{x^2}{2} + B_1 x \right) dy \quad \text{на } L. \quad (1.9)$$

Здесь $\mu_i = \frac{G_2}{G_1} \delta_i$ ($i=1, 2$), где δ_i — толщины соответствующих покрытий,

G_1 и G_2 — модули сдвига основного материала и материала покрытия, A_1 и B_1 — известные постоянные (1.6), (1.7).

Касательные напряжения в области D_1 определяются формулами

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} + A_1 \frac{x^2}{2} + B_1 x - A_2 \frac{\delta_1^2}{2} + B_2 \delta_1, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x}. \quad (1.10)$$

В области D_2 , соответствующей тонкому покрытию, касательное напряжение постоянно по направлению нормали n , направлено параллельно касательной L и определяется формулой

$$\tau_{xz} = -\frac{F}{\delta} + A_2 \frac{x^2 - \delta^2}{2} + B_2(x + \delta_1). \quad (1.11)$$

Для рассматриваемой здесь прямоугольной области определим функцию F , удовлетворяющую уравнению Пуассона (1.8) и контурным условиям

$$F(x, 0) - \mu_2 \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad F(x, b) + \mu_2 \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0, \quad (1.12)$$

$$F(0, y) - \mu_1 \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad F(a, y) + \mu_1 \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0. \quad (1.13)$$

Функцию $F(x, y)$ ищем в виде

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \frac{\sin \alpha_k y + \mu_2 \alpha_k \cos \alpha_k y}{N_k}, \quad (1.14)$$

где $N_k = \sqrt{\mu_2 + \frac{b}{2} (1 + \mu_2^2 \alpha_k^2)}$, α_k ($k=1, 2, \dots$) являются корнями трансцендентного уравнения.

Используя контурные условия (1.12), получим уравнение относительно α_k

$$1 - \mu_2^2 \alpha_k^2 + 2 \mu_2 \alpha_k \operatorname{ctg} b \alpha_k = 0. \quad (1.15)$$

Используя уравнения (1.8), (1.14) и (1.15), а также численные значения корней трансцендентного уравнения (1.15), получим:

$$f_k'' - \alpha_k^2 f_k = -r_k \quad (k=2, 4, 6, \dots), \quad (1.16)$$

где

$$r_k = -\frac{2\nu}{1+\nu} \cdot \frac{A_1}{\alpha_k N_k} \left(\mu_2 + \frac{b}{2} \right).$$

Интегрируя (1.16) и подставляя f_k в (1.14), находим

$$F(x, y) = \sum_{k=2, 4}^{\infty} \left[A_k \operatorname{sh} \alpha_k x + B_k \operatorname{ch} \alpha_k x + \frac{r_k}{\alpha_k^2} \right] \cdot \frac{\sin \alpha_k y + \mu_2 \alpha_k \cos \alpha_k y}{N_k}. \quad (1.17)$$

Внося (1.17) в (1.13) и приравнявая нулю коэффициенты при тригонометрических функциях, получаем систему линейных уравне-

ний относительно постоянных интегрирования A_k, B_k ($k=2, 4, 6, \dots$).
Решение этой системы будет

$$A_k = \frac{r_k}{\alpha_k^2} \cdot \frac{\mu_1 \alpha_k + \operatorname{ctha} \alpha_k - \operatorname{cscha} \alpha_k}{1 + 2\mu_1 \alpha_k \operatorname{ctha} \alpha_k + \mu_1^2 \alpha_k^2},$$

$$B_k = -\frac{r_k}{\alpha_k^2} \cdot \frac{1 + \mu_1 \alpha_k (\operatorname{ctha} \alpha_k + \operatorname{cscha} \alpha_k)}{1 + 2\mu_1 \alpha_k \operatorname{ctha} \alpha_k + \mu_1^2 \alpha_k^2}. \quad (1.18)$$

Подставляя выражения A_k и B_k согласно (1.18) в (1.17), после необходимых преобразований получим

$$F(x, y) = \sum_{k=2, 4}^{\infty} \frac{r_k}{\alpha_k^2 N_k} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \left(x - \frac{a}{2} \right) \alpha_k}{\operatorname{ch} \frac{a \alpha_k}{2}} \times \right. \\ \left. \times \frac{1 + \mu_1 \alpha_k \operatorname{cth} \frac{a \alpha_k}{2}}{1 + 2\mu_1 \alpha_k \operatorname{ctha} \alpha_k + \mu_1^2 \alpha_k^2} \right] (\sin \alpha_k y + \mu_2 \alpha_k \cos \alpha_k y), \quad (1.19)$$

где $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

2. Используя найденные значения функции напряжений $F(x, y)$ по формулам (1.10), (1.11) найдем значения напряжений

$$\tau_{xz}(x, y) = \frac{1}{2} [x(x-a) - \mu_1(a+\delta_1)] A_1 + \\ + \sum_{k=2, 4}^{\infty} \frac{r_k}{\alpha_k N_k} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \left(x - \frac{a}{2} \right) \alpha_k}{\operatorname{ch} \frac{a \alpha_k}{2}} \cdot \frac{1 + \mu_1 \alpha_k \operatorname{cth} \frac{a \alpha_k}{2}}{1 + 2\mu_1 \alpha_k \operatorname{ctha} \alpha_k + \mu_1^2 \alpha_k^2} \right] \times \\ \times (\cos \alpha_k y - \mu_2 \alpha_k \sin \alpha_k y), \quad (1.20)$$

$$\tau_{yz}(x, y) = \sum_{k=2, 4}^{\infty} \frac{r_k}{\alpha_k N_k} \cdot \frac{1 + \mu_1 \alpha_k \operatorname{cth} \frac{a \alpha_k}{2}}{1 + 2\mu_1 \alpha_k \operatorname{ctha} \alpha_k + \mu_1^2 \alpha_k^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \left(x - \frac{a}{2} \right) \alpha_k}{\operatorname{ch} \frac{a \alpha_k}{2}} \times \\ \times (\sin \alpha_k y + \mu_2 \alpha_k \cos \alpha_k y), \quad (1.21)$$

$$\tau_{xz}^*(x, y) = \frac{x+\delta_1}{2} [x - (a+\delta_1)] A_0 - \frac{1}{\delta} \sum_{k=2, 4}^{\infty} \frac{r_k}{\alpha_k^2 N_k} \left[1 - \right. \\ \left. - \frac{\operatorname{ch} \left(x - \frac{a}{2} \right) \alpha_k}{\operatorname{ch} \frac{a \alpha_k}{2}} \cdot \frac{1 + \mu_1 \alpha_k \operatorname{cth} \frac{a \alpha_k}{2}}{1 + 2\mu_1 \alpha_k \operatorname{ctha} \alpha_k + \mu_1^2 \alpha_k^2} \right] \times \\ \times (\sin \alpha_k y + \mu_2 \alpha_k \cos \alpha_k y), \quad (1.22)$$

где A_1 и A_0 известные постоянные (1.6) и (1.7), а τ_{xz}^* обозначает напряжение в усиливающем покрытии.

Рассмотрим частные случаи. В случае отсутствия усиливающего покрытия, т. е. $\delta_1 = \delta_2 = 0$, $\alpha_k = \frac{k\pi}{b}$ ($k=2, 4, 6, \dots$), значения касательных напряжений в точках $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ и $\left(\frac{a}{2}, b\right)$, полученные из уравнений (2.1) и (2.2), совпадают с уже известными ([5], стр. 325).

В случае, когда покрытия имеют только две противоположные грани параллельные изгибающей силе (т. е. $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0,1 \cdot b$), α_k ($k=2, 4, 6, \dots$) являются корнями уравнения (1.15).

Решая уравнение (1.15) методом касательных, для корней с точностью до 10^{-3} будем иметь: $b\alpha_1=1,312$; $b\alpha_2=3,670$; $b\alpha_3=6,579$; $b\alpha_4=9,627$; $b\alpha_5=12,72$; $b\alpha_k=(k-1)\pi$ ($k=6, 7, \dots$). Для механических характеристик возьмем $G_1=8 \cdot 10^4$ кг/см², $G_2=8 \cdot 10^5$ кг/см², $\nu=0,25$.

В таблице 1 приведены вычисленные по формулам (2.1)–(2.3) значения напряжения τ_{xz} в двух характерных точках при четырех отношениях размеров поперечного сечения.

Таблица 1

$\frac{a}{b}$	4	2	1	0,5
$\frac{2ab}{3P} \tau_{xz}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$	0,330	0,321	0,298	0,274
$\frac{2ab}{3P} \tau_{xz}\left(\frac{a}{2}, b\right)$	0,334	0,337	0,344	0,353
$\frac{2ab}{3P} \tau_{xz}^*\left(\frac{a}{2}, b\right)$	3,343	3,370	3,440	3,530

Нетрудно заметить, что

$$\tau_{xz}\left(\frac{a}{2}, 0\right) = \tau_{xz}\left(\frac{a}{2}, b\right), \quad (2.4)$$

$$\tau_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0\right) = \tau_{yz}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \tau_{yz}\left(\frac{a}{2}, b\right) = 0.$$

Из таблицы 1 можно заметить, что при больших значениях отношения $\frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b} \geq 4$) напряжения τ_{xz} в точках $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ и $\left(\frac{a}{2}, b\right)$ практически совпадают.

Из таблицы 1 видно также, что напряжения в характерных точках в вертикальном усиливающем покрытии в 10 раз больше, чем напряжения в соответствующих точках контакта основного материала.

Сопоставляя полученные результаты с известными ([5], стр. 325), замечаем, что благодаря вертикальному усиливающему покрытию напряжение в приведенных характерных точках уменьшается более чем в три раза, при одной и той же изгибающей силе P .

В случае, когда покрытие имеется на гранях, перпендикулярных к изгибающей силе (т. е. $\mu_1=b$, $\mu_2=0$ или $\delta_1=0,1 \cdot b$, $\delta_2=0$),

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{b} \quad (k=2, 4, \dots).$$

В таблице 2 приведены значения напряжения τ_{xz} , вычисленные по формулам (2.1)–(2.3) в некоторых характерных точках поперечного сечения.

Таблица 2

$\frac{a}{b}$	4	2	1	0,5
$\frac{2ab}{3P} \tau_{xz} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$	0,7844	0,7154	0,6442	0,5614
$\frac{2ab}{3P} \tau_{xz} \left(\frac{a}{2}, b \right)$	0,7893	0,7270	0,6682	0,6027
$\frac{2ab}{3P} \tau_{xz} (a, b)$	0,4008	0,4942	0,5459	0,5464
$\frac{2ab}{3P} \tau_{xz} \left(a, \frac{b}{2} \right)$	0,3965	0,4839	0,5246	0,5085
$\frac{2ab}{3P} \tau_{xz}^* \left(a, \frac{b}{2} \right)$	0,3979	0,4872	0,5314	0,5206

Из этих же формул (2.1)–(2.3) следует, что

$$\begin{aligned}
 \tau_{xz} \left(\frac{a}{2}, 0 \right) &= \tau_{xz} \left(\frac{a}{2}, b \right), \\
 \tau_{xz} (0, b) &= \tau_{xz} (a, b), \\
 \tau_{xz} \left(0, \frac{b}{2} \right) &= \tau_{xz} \left(a, \frac{b}{2} \right), \\
 \tau_{xz}^* \left(0, \frac{b}{2} \right) &= \tau_{xz}^* \left(a, \frac{b}{2} \right), \\
 \tau_{yz} \left(0, \frac{b}{2} \right) &= \tau_{yz} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) = \tau_{yz} \left(a, \frac{b}{2} \right) = 0, \\
 \tau_{yz} (0, b) &= \tau_{yz} \left(\frac{a}{2}, b \right) = \tau_{yz} (a, b) = 0.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Из таблицы 2 следует, что напряжение τ_{xz}^* в горизонтальном усиливающем покрытии, как и следовало ожидать, совпадает с напря-

жением τ_{xz} в соответствующих точках контакта основного материала.

Сопоставляя первые две строчки таблицы 2 с таблицей 10 ([5], стр. 325), замечаем, что, благодаря горизонтальному усиливающему покрытию, напряжение в приведенных характерных точках уменьшается примерно в 1,5 раза.

Когда вся боковая поверхность изгибаемого стержня имеет усиливающее покрытие (т. е. $\mu_1 = \mu_2 = b$ или $\delta_1 = \delta_2 = 0,1 \cdot b$), $\alpha_k (k=2, 4, 6, \dots)$ являются корнями уравнения (1.15).

В таблице 3 приведены значения напряжения τ_{xz} , вычисленные по приведенным общим формулам (2.1)–(2.3) в точках $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2}, b\right)$ и $\left(a, \frac{b}{2}\right)$.

Таблица 3

$\frac{a}{b}$	4	2	1	0,5
$\frac{2ab}{3P} \tau_{xz} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$	0,4120	0,4391	0,4478	0,4221
$\frac{2ab}{3P} \tau_{xz} \left(\frac{a}{2}, b \right)$	0,4146	0,4462	0,4637	0,4491
$\frac{2ab}{3P} \tau_{xz}^* \left(\frac{a}{2}, b \right)$	2,259	1,751	1,262	0,8800
$\frac{2ab}{3P} \tau_{xz} \left(a, \frac{b}{2} \right)$	0,2080	0,2968	0,3647	0,3825
$\frac{2ab}{3P} \tau_{xz}^* \left(a, \frac{b}{2} \right)$	0,2095	0,3012	0,3748	0,4011

$$\tau_{xz} \left(\frac{a}{2}, 0 \right) = \tau_{xz} \left(\frac{a}{2}, b \right),$$

$$\tau_{xz} \left(0, \frac{b}{2} \right) = \tau_{xz} \left(a, \frac{b}{2} \right),$$

$$\tau_{xz}^* \left(\frac{a}{2}, 0 \right) = \tau_{xz}^* \left(\frac{a}{2}, b \right),$$

$$\tau_{xz}^* \left(0, \frac{b}{2} \right) = \tau_{xz}^* \left(a, \frac{b}{2} \right),$$

(2.6)

$$\tau_{yz} \left(\frac{a}{2}, 0 \right) = \tau_{yz} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) = \tau_{yz} \left(\frac{a}{2}, b \right) = 0,$$

$$\tau_{yz} \left(0, \frac{b}{2} \right) = -\tau_{yz} \left(a, \frac{b}{2} \right) \neq 0.$$

Сопоставляя первые две строчки таблицы 3 с вышеупомянутой таблицей 10 работы [5], замечаем, что благодаря усиливающему по-

крытию напряжение в приведенных характеристических точках уменьшается более чем в два раза, при одной и той же изгибающей силе P .

Сравнивая в таблице 3 четвертую строку с пятой, замечаем, что напряжение τ_{xz} в горизонтальном усиливающем слое почти совпадает с напряжением в соответствующих точках контакта основного материала. Сравнивая вторую строку с третьей, замечаем, что с увеличением отношения $\frac{a}{b}$ напряжение τ_{xz} в вертикальном усиливающем слое возрастает по сравнению с напряжением в соответствующих точках контакта основного материала. Однако, сравнивая формулы (2.1) и (2.3), замечаем, что при увеличении отношения $\frac{a}{b}$ величина $\frac{\tau_{xz}^*}{\tau_{xz}}$ не может превзойти отношения модулей сдвига $\frac{G_2}{G_1}$.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 24 IX 1959

Պ. Ն. Գալֆայան

ՈՒԺԵՂԱՑՆՈՂ ԲԱՐԱԿ ԾԱԾԿՈՒՅԹՈՎ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՁՈՂԻ ԾՈՄԱՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա հոդվածում դիտարկվում է ուժեղացնող ծածկույթ տեղյոց ուղղանկյուն հատվածքով ձողի ծոման խնդիրը, երբ ձողի մի ծայրը ամրակցված է, իսկ մյուս՝ ազատ ծայրում ազդում է P լայնական ուժը, որը կիրառված է կտրվածքի ծանրության կենտրոնում և ուղղված է X առանցքին զուգահեռ ուղղությամբ:

Այս խնդրի լուծման մոտավոր եղանակը առաջարկված է [1—3] աշխատություններում:

Օգտագործելով ձողի հատվածքի լայնական չափերի նկատմամբ ուժեղացնող ծածկույթի հաստության փոքրության պայմանը, դիտարկվող խնդրում ծածկույթի առկայությունը որոշակի մոտավորությամբ արտահայտվում է լարումների ֆունկցիայի (1.9) եզրային պայմանով: Այսպիսով, ուժեղացնող բարակ ծածկույթով ձողի ծոման խնդիրը մոտավոր դրվածքով բերվում է լարումների ֆունկցիայի որոնմանը, որը հիմնական նյութի տիրույթում պետք է բավարարի համապատասխան առաջին (1.8) Պուասոնի հավասարմանը և եզրում՝ (1.9) խորը եզրային պայմանին:

Լարումների ֆունկցիան ներկայացված է [6] աշխատությունում ուսումնասիրված օրթոնորմալ ֆունկցիաների սխեմով: Դիտարկված են մասնավոր դեպքեր, երբ եզրերում ուժեղացնող բարակ ծածկույթները միայն զուգահեռ են կամ միայն ուղղահայաց են ձողի ուժին:

Առաջված են բանաձևեր հատվածքի կետերում շոշափող լարումների հաշվման համար: Մասնավոր դեպքում, երբ բացակայում է ծածկույթը, ստա-

նում ենք [5] աշխատությունում բերված Սեն-Վենանի լուծումները: Բնարկված մասնավոր դեպքերում ստացված են թվային արդյունքներ, որոնք բերված են աղյուսակներում և համեմատվում են [5] աշխատությունում ստացված արդյունքների հետ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Чобанян К. С. Общая задача изгиба стержня, составленного из различных материалов. Известия АН Арм. ССР, т. XI, № 5, 1958.
2. Арутюнян Н. Х., Чобанян К. С. Изгиб призматических стержней, составленных из различных материалов, с учетом ползучести. Известия АН Арм. ССР, т. X, № 5, 1957.
3. Чобанян К. С. Об изгибе составного стержня. Доклады АН Арм. ССР, т. XXIII, № 3, 1956.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М.—Л., 1954.
5. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, М.—Л., 1937.
6. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. Гостехиздат, 1950.