

А. А. Талалян

О сходимости и суммируемости почти всюду общих ортогональных рядов

В в е д е н и е

Настоящая работа содержит некоторые результаты, примыкающие к следующей задаче.

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ полная $O. H$ система на $[a, b]^*$ и $f(x)$ произвольная измеримая функция, определенная на $[a, b]$, которая может также обращаться в $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры.

Существует ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \quad (1)$$

сходящийся почти всюду на $[a, b]$ к $f(x)$?

В такой общей постановке, когда представимая функция $f(x)$ может обращаться в ∞ на множестве положительной меры, этот вопрос не решен даже в том частном случае, когда система $\{\varphi_n(x)\}$ совпадает с тригонометрической системой.

Однако, если потребовать, чтобы представимая функция $f(x)$ была почти везде конечной, то вышеставленный вопрос для тригонометрической системы имеет положительный ответ. А именно справедлива следующая теорема Д. Е. Меньшова.

Для любой почти везде конечной измеримой функции $f(x)$, определенной на $[0, 2\pi]$, существует ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

который сходится к $f(x)$ почти всюду на $[0, 2\pi]$ (см. [1]).

Неизвестно также, справедлива ли теорема Меньшова для произвольных полных $O. H$ систем?

Большой интерес сформулированной теоремы Меньшова отчасти заключается в том, что до сих пор неизвестно, обязан ли ряд Фурье

В дальнейшем будем говорить, что $\{\varphi_n(x)\}$ есть $O. H$ система на $[a, b]$, если

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{при } i=j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

произвольной непрерывной функции сходиться хотя бы в одной точке, в то время, как любая функция представляется тригонометрическим рядом (не рядом Фурье), сходящимся к этой функции почти всюду?

В связи с этим нам представляется интересным выяснить следующий вопрос.

Существует ли полная $O.H$ система расходимости*, для которой верна теорема Меньшова?

Оказывается, что справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а I. Существует полная $O.H$ система $\{\varphi_n(x)\}$ функций, определенных на $[a, b]$, такая, что разложение некоторой функции $f(x) \in L_2[a, b]$ по этой системе расходится почти всюду, но тем не менее для любой измеримой функции $F(x)$ существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

который сходится к $F(x)$ почти всюду на $[a, b]$. При этом функция $F(x)$ может обращаться в $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры.

Отметим, что существование $O.H$ систем, для которых разложение некоторых функций из L_2 расходятся почти всюду, было доказано Меньшовым в 1923 г. (см. [2]).

Далее, представляет интерес также ослабленная задача представления измеримых функций ортогональными рядами, когда вместо сходимости почти всюду этих рядов требуется суммируемость почти всюду некоторым регулярным линейным методом T .

Точная формулировка этой задачи может быть дана следующим образом.

Существует ли линейный регулярный метод T такой, чтобы для любой полной $O.H$ системы $\{\varphi_n(x)\}$ и для любой измеримой функции $f(x)$ существовал ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

который суммировался бы методом T к $f(x)$ почти всюду?

По поводу этой задачи отметим следующий результат (доказательство этого результата несложно, оно будет проведено в дальнейшем).

* $O.H$ система $\{\varphi_n(x)\}$ называется системой расходимости, если ряд Фурье некоторой функции $\psi(x) \in L_2$ по этой системе расходится на множестве положительной меры.

Т е о р е м а II. Пусть дано счетное множество полных *О.Н.* систем $\{\varphi_k^{(n)}(x)\}$, $n=1, 2, \dots$ функций, определенных на $[a, b]$.

Тогда существует линейный регулярный метод *T*, матрица $\|a_{nk}\|$ которого состоит из нулей и единиц, такой, что для любой измеримой функции $f(x)$, определенной на $[a, b]$, и для любой системы $\{\varphi_k^{(n)}(x)\}$, $n=1, 2, \dots$ существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(n)} \varphi_k^{(n)}(x),$$

который суммируется почти всюду на $[a, b]$ к $f(x)$ методом *T*.

Если же при представлении измеримой функции рядом по системе $\{\varphi_n(x)\}$ допускать перемену порядка функций этой системы, то любую измеримую функцию можно представить рядом по переставленной системе, который суммируется почти всюду методами Чезаро.

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а III. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — нормированный базис пространства $L_p[a, b]$, $p > 1$ и $f(x)$ произвольная измеримая функция, определенная на $[a, b]$.

Тогда в системе $\{\varphi_n(x)\}$ можно изменить порядок функций таким образом, чтобы для полученной новой системы $\{\varphi_{n_n}(x)\}$ существовал ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_{n_n}(x),$$

который суммируется почти всюду к $f(x)$ одновременно всеми методами Чезаро положительного порядка.

Отметим при этом, что в этой теореме представимая функция $f(x)$ может обращаться в $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры.

При том предположении, когда представимая функция $f(x)$ почти везде конечна, аналогичная теорема без доказательства была сформулирована в работе [3].

Приведенное утверждение, а также указанное более слабое утверждение работы [3], доказываются методом Д. Е. Меньшова, примененным им в работе [4], где доказана следующая теорема.

В любой *О.Н.* системе $\{\varphi_n(x)\}$ можно изменить порядок функций так, чтобы для полученной новой системы $\{\varphi_{n_n}(x)\}$, какова бы ни была последовательность $\{c_n\}$, где

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < +\infty,$$

ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

суммировался почти всюду любым методом Чезаро положительного порядка.

Отметим, что в этой теореме перестановка функций зависит только от системы, в то время как в теореме III перестановка зависит и от базиса $\{\varphi_n(x)\}$ и от представимой функции $f(x)$.

Теорема III будет доказана в § 3 как следствие более общих теорем.

§ 1.

Сформулированная во введении теорема I является следствием следующей теоремы.

Т е о р е м а 1. Пусть полная *О.Н.* система $\{\varphi_n(x)\}$ функций, определенных на $[a, b]$, есть система расходимости, т. е. для некоторой последовательности $\{a_k\}$, где

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < +\infty, \quad (1.1)$$

ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \quad (1.2)$$

расходится на некотором множестве $E \subset [a, b]$, где $\text{mes} E > 0$.

Тогда существует *О.Н.* система $\{\omega_n(x)\}$ функций, являющихся линейными комбинациями функций $\{\varphi_n(x)\}$, которая является системой расходимости и одновременно обладает следующим свойством.

Для любой измеримой $f(x)$ существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \omega_k(x), \quad (1.3)$$

который сходится к $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

При доказательстве этой теоремы нам будет нужна следующая лемма.

Л е м м а 1. Пусть ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} u_l(x) \quad (1.4)$$

почти везде конечных измеримых функций, определенных на $[a, b]$, расходится на некотором множестве E положительной меры.

Тогда существует возрастающая последовательность натуральных чисел

$$0 = N_0 < N_1 < N_2 < \dots < N_k < \dots, \quad (1.5)$$

такая, что для любой последовательности $k_1 < k_2 < \dots < k_j < \dots$ ряд

$$\sum_{i=N_{k_1-1}+1}^{N_{k_1}} u_i(x) + \sum_{i=N_{k_2-1}+1}^{N_{k_2}} u_i(x) + \dots + \sum_{i=N_{k_j-1}+1}^{N_{k_j}} u_i(x) + \dots, \quad (1.6)$$

рассматриваемый как ряд по функциям $u_i(x)$ с индексами i удовлетворяющими неравенствам $N_{k_{j-1}} < i \leq N_{k_j}$; $j=1, 2, \dots$, расходится почти всюду на множестве E .

Доказательство. Так как ряд (1.4) расходится на множестве E , то для любой точки $x \in E$ существует положительное число ε (ε зависит от x) такое, что выполняется условие:

Каково бы ни было натуральное число N , существуют и $p > 0$ такие, что

$$\left| \sum_{i=n}^{n+p} u_i(x) \right| > \varepsilon. \quad (1.7)$$

Возьмем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}$

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n > \varepsilon_{n+1} > \dots; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0. \quad (1.8)$$

Обозначим через E_n множество тех точек x из E , для которых выполняется условие (1.7) при $\varepsilon = \varepsilon_n$.

Очевидно, будем иметь

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E. \quad (1.9)$$

Обозначим через $E_{N,p}^{(n)}$ множество тех точек $x \in E_n$, для которых выполняется неравенство

$$\left| \sum_{i=m}^l u_i(x) \right| > \varepsilon_n, \quad (1.10)$$

где m, l зависят от x и $N < m \leq l < N+p$.

В силу свойства (1.7), где $\varepsilon = \varepsilon_n$, имеем для любого натурального N

$$\bigcup_{p=1}^{\infty} E_{N,p}^{(n)} = E_n. \quad (1.11)$$

Отсюда, в силу того, что $E_{N,p}^{(n)} \supset E_{N,p}^{(n)}$, при $p' > p$, имеем

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \text{mes } E_{N,p}^{(n)} = \text{mes } E_n \quad (1.12)$$

для любых фиксированных N и n .

Возьмем последовательность положительных чисел $\{\gamma_n\}$ такую, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty. \quad (1.13)$$

Полагая $N=0$ и $n=1$, в силу (1.12) мы можем определить $p=N_1$ настолько большое, что

$$\text{mes } E_{0,N_1}^{(1)} > \text{mes } E_1 - \gamma_1. \quad (1.14)$$

Пусть натуральные числа $N_1 < N_2 < \dots < N_{i-1}$ уже определены. Полагая $N=N_i$ и применяя (1.12), определим $p=N_i$ настолько большое, чтобы выполнялись неравенства

$$\text{mes } E_{N_{i-1},N_i}^{(n)} > \text{mes } E_n - \gamma_i, \quad 1 \leq n \leq i. \quad (1.15)$$

Таким образом, мы можем определить последовательность

$$0 = N_0 < N_1 < \dots < N_{i-1} < N_i < \dots, \quad (1.16)$$

для которой выполняются неравенства (1.15) для всех $i=1, 2, \dots$.

Легко видеть, что последовательность (1.16) будет удовлетворять условиям леммы 1.

В самом деле, пусть $k_1 < k_2 < \dots < k_i < \dots$ возрастающая последовательность натуральных чисел.

Для фиксированного n рассмотрим последовательность множеств

$$E_{N_{k_j-1}, N_{k_j}}^{(n)}; \quad j=1, 2, \dots$$

В силу (1.15), начиная с некоторого номера j_0 , будем иметь

$$\text{mes } E_{N_{k_j-1}, N_{k_j}}^{(n)} > \text{mes } E_n - \gamma_{k_j}; \quad j > j_0. \quad (1.17)$$

Обозначим через

$$E^{(n)} = \liminf_{j \rightarrow \infty} E_{N_{k_j-1}, N_{k_j}}^{(n)} \quad (1.18)$$

Из определения множеств $E_{N,p}^{(n)}$ (см. 1.10) видно, что ряд (1.16) расходится всюду на множестве $E^{(n)}$ для всех $n=1, 2, \dots$.

Но в силу (1.13) и (1.18)

$$\text{mes } E^{(n)} = \text{mes } E_n \quad (1.19)$$

и тогда из равенства (1.9) следует, что ряд (1.6) расходится почти всюду на множестве E . Лемма 1 доказана.

При доказательстве теоремы 1 мы будем пользоваться следующей теоремой, доказанной в работе [5] (см. § 2, теорема 3).

Т е о р е м а А. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций, определенных на $[a, b]$, полная в смысле сходимости почти всюду, т. е. для любой измеримой функции $f(x)$ существует последовательность $\{\Phi_k(x)\}$, где

$$\Phi_k(x) = \sum_{i=1}^{n_k} c_{ik} f_i(x)$$

(c_{ik} постоянные) такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(x) = f(x)$$

почти всюду на $[a, b]$.

Тогда любая последовательность $f_{n+1}(x), f_{n+2}(x), \dots, f_{n+k}(x), \dots$ полученная из $\{f_k(x)\}$ после исключения из нее первых n функций, снова будет полной в смысле сходимости почти всюду.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ есть полная О.Н. система на $[a, b]$ и ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x) \quad (1.20)$$

расходится на множестве E положительной меры и кроме того

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < +\infty. \quad (1.21)$$

Применяя лемму 1, мы можем определить возрастающую последовательность натуральных чисел

$$0 = N_0 < N_1 < \dots < N_k < \dots, \quad (1.22)$$

такую, что для любой последовательности $k_1 < k_2 < \dots < k_j, \dots$, ряд

$$\sum_{i=N_{k_1}-1+1}^{N_{k_1}} a_i \varphi_i(x) + \sum_{i=N_{k_2}-1+1}^{N_{k_2}} a_i \varphi_i(x) + \dots + \sum_{i=N_{k_j}-1+1}^{N_{k_j}} a_i \varphi_i(x) + \dots \quad (1.23)$$

расходится почти всюду на множестве E .

Перенумеруем все полиномы с рациональными коэффициентами

$$P_1(x), P_2(x), \dots, P_k(x), \dots \quad (1.24)$$

и возьмем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$, где

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty. \quad (1.25)$$

Так как система $\{\varphi_n(x)\}$ полна в $L_2[a, b]$, то легко видеть, что она будет полной также в смысле сходимости почти всюду.

Возьмем линейную комбинацию из функций системы $\{\varphi_n(x)\}$

$$\Phi_1(x) = \sum_{i=1}^{n_1} c_{1i} \varphi_i(x) \quad (1.26)$$

такую, чтобы на некотором множестве $E_1 \subset [a, b]$, где

$$\text{mes } E_1 > b - a - \varepsilon_1, \quad (1.27)$$

имело место неравенство

$$|\Phi_1(x) - P_1(x)| < \varepsilon_1, \quad x \in E_1. \quad (1.28)$$

Далее предположим, что $m_2 > n_1$ выбрано настолько большим, что для некоторого натурального k_1 имеет место неравенство

$$n_1 < N_{k_1-1} < N_{k_1} < m_2. \quad (1.29)$$

При этом N_{k_1} некоторое число из последовательности (1.22).

Рассматривая последовательность $\varphi_{m_1}(x), \varphi_{m_1+1}(x), \dots$, в силу теоремы А), мы можем определить функцию $\Phi_2(x)$ вида

$$\Phi_2(x) = \sum_{i=m_1}^{n_2} c_{2i} \varphi_i(x)$$

и множество E_2 такие, что

$$\text{mes } E_2 > b - a - \varepsilon_2 \quad (1.30)$$

и

$$|\Phi_2(x) - P_2(x)| < \varepsilon_2, \quad x \in E_2. \quad (1.31)$$

Ясно, что если мы неограниченно продолжим этот процесс с последовательным применением теоремы А), то можно определить последовательность натуральных чисел

$$1 = m_1 < n_1 < m_2 < n_2 < \dots < m_j < n_j < \dots, \quad (1.32)$$

последовательность множеств $\{E_j\}$, а также последовательность функций $\{\Phi_j(x)\}$ вида

$$\Phi_j(x) = \sum_{i=m_j}^{n_j} c_{ji} \varphi_i(x) \quad (1.33)$$

такие, что

$$\text{mes } E_j > b - a - \varepsilon_j, \quad (1.34)$$

$$|\Phi_j(x) - P_j(x)| < \varepsilon_j \quad \text{при } x \in E_j. \quad (1.35)$$

При этом мы предполагаем, что последовательность (1.32) такова, что

для любого $j=1, 2, \dots$ существует натуральное число k_j , удовлетворяющее неравенству

$$n_j < N_{k_j-1} < N_{k_j} < m_{j-1}; \quad j=1, 2, \dots, \quad (1.36)$$

где N_{k_j} — некоторое число из последовательности (1.22).

В силу (1.32) очевидно будем иметь

$$N_{k_1-1} < N_{k_1} < N_{k_2-1} < N_{k_2} < \dots < N_{k_j-1} < N_{k_j} < \dots \quad (1.37)$$

Обозначим через $\omega_n(x)$ систему, которая образована из функций

$$\frac{\Phi_j(x)}{\|\Phi_j(x)\|} \quad j=1, 2, \dots,$$

и из функций $\varphi_n(x)$ с индексами n , удовлетворяющими неравенствам

$$N_{k_j-1} + 1 \leq n \leq N_{k_j}, \quad j=1, 2, \dots \quad (1.38)$$

Так как система $\{\varphi_n(x)\}$ есть $O.H$ система, то из (1.32), (1.33) и (1.36) видно, что система $\{\omega_n(x)\}$ также есть $O.H$ система на $[a, b]$.

Легко видеть, что $\{\omega_n(x)\}$ есть система расходимости. В самом деле, рассмотрим ряд (1.23), где числа N_{k_j} удовлетворяют неравенствам (1.36). Из определения системы $\{\omega_n(x)\}$ видно, что все функции ряда (1.23) входят в систему $\{\omega_n(x)\}$. Поэтому ряд (1.23) можно писать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n(x), \quad (1.39)$$

где $b_n=0$ для n , не удовлетворяющих неравенствам

$$N_{k_j-1} + 1 \leq n \leq N_{k_j} \quad (j=1, 2, \dots).$$

Ряд (1.39) расходится почти всюду на множестве E , так как этим свойством обладает ряд (1.23).

С другой стороны,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=N_{k_j-1}+1}^{N_{k_j}} a_n^2 < +\infty$$

в силу (1.21).

Докажем теперь, что для любой измеримой функции $f(x)$ существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \omega_n(x), \quad (1.40)$$

который сходится к $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ непрерывных функций такова, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad (1.41)$$

почти всюду на $[a, b]$.

Возьмем последовательность положительных чисел $\{\tau_k\}$, где

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau_k < +\infty. \quad (1.42)$$

Так как последовательность (1.24) полиномов с рациональными коэффициентами такова, что она остается всюду плотной в $L_2[a, b]$ (а также в пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций) после исключения из нее любого конечного числа функций, то ясно, что для любой почти везде конечной измеримой функции $F(x)$ и для любых $\varepsilon > 0$ и натурального N существует полином $P_n(x)$ из последовательности (1.24) такой, что

$$\text{mes } E(|F(x) - P_n(x)| > \varepsilon) < \varepsilon \quad (1.43)$$

и при этом $n > N$.

Так как в силу (1.25) $\varepsilon_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, то из неравенств (1.34) и (1.35) следует, что последовательность $\Phi_j(x)$, $j = 1, 2, \dots$ также будет обладать этим свойством, т. е.

для любой почти везде конечной измеримой функции $F(x)$ и для любых $\varepsilon > 0$ и натурального N существует $\Phi_j(x)$ такая, что

$$\text{mes } E(|\Phi_j(x) - F(x)| > \varepsilon) < \varepsilon \quad (1.44)$$

и при этом $j > N$.

Применяя свойство (1.44) к функции $F(x) = f_1(x)$ при $\varepsilon = \tau_{j_1}$, мы можем определить множество B_1 и число j_1 такие, что

$$\text{mes } B_1 > b - a - \tau_{j_1}, \quad (1.45)$$

$$|\Phi_{j_1}(x) - f_1(x)| < \tau_{j_1} \text{ при } x \in B_1. \quad (1.46)$$

Предположим, что уже определены множества $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ и функции $\Phi_{j_1}(x), \Phi_{j_2}(x), \dots, \Phi_{j_{n-1}}(x)$, где $j_1 < j_2 < \dots < j_{n-1}$.

Положим

$$F(x) = f_n(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \Phi_{j_k}(x) \quad (1.47)$$

и применим к этой функции свойство (1.44), полагая $\varepsilon = \tau_{j_n}$ и $N = j_{n-1}$. Тогда можно определить $j_n > j_{n-1}$ и множество B_n такие, что

$$\text{mes } B_n > b - a - \tau_{j_n}, \quad (1.48)$$

$$\left| \sum_{k=1}^n \Phi_{j_k}(x) - f_n(x) \right| < \tau_{j_n} \text{ при } x \in B_n. \quad (1.49)$$

Легко видеть, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{j_k}(x) \quad (1.50)$$

сходится к $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

В самом деле, положим

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=n}^{\infty} B_k. \quad (1.51)$$

В силу (1.42) и (1.48) имеем

$$\text{mes } B = b - a.$$

Пусть $x \in B$, тогда для некоторого целого n_x будем иметь

$$x \in B_n \quad \text{при} \quad n > n_x. \quad (1.52)$$

Тогда в силу (1.49)

$$\left| \sum_{k=1}^n \Phi_{j_k}(x) - f_n(x) \right| < \eta_n \quad \text{при} \quad n > n_x. \quad (1.53)$$

Из (1.42) и (1.53) вытекает

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n \Phi_{j_k}(x) - f_n(x) \right| = 0, \quad (1.54)$$

а из (1.41) и (1.54) следует что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Phi_{j_k}(x) = f(x) \quad \text{при} \quad x \in B. \quad (1.55)$$

Так как по нашему построению функции $\frac{\Phi_{j_k}(x)}{\|\Phi_{j_k}(x)\|}$ составляют часть системы $\{\omega_n(x)\}$, то ряд (1.50) можно представить в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \omega_n(x), \quad (1.56)$$

где $c_n = 0$, если $\omega_n(x)$ не совпадает ни с одной из функций $\frac{\Phi_{j_k}(x)}{\|\Phi_{j_k}(x)\|}$, а если $\omega_n(x) = \frac{\Phi_{j_k}(x)}{\|\Phi_{j_k}(x)\|}$, то $c_n = \|\Phi_{j_k}(x)\|$.

Так как ряд (1.50) почти всюду сходится к $f(x)$, то ряд (1.56) тоже будет сходиться к $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$. Теорема 1 доказана.

Опираясь на теорему А), можно доказать также следующую теорему.

Т е о р е м а 2. Пусть дано счетное множество полных $O.H$ систем $\{\varphi_k^{(n)}(x)\}$, $n=1, 2, \dots$ функций, определенных на $[a, b]$.

Тогда существует последовательность натуральных чисел $k_1 < k_2 < \dots < k_j < \dots$ такая, что для любой системы $\{\varphi_k^{(n)}(x)\}$ ($n=1, 2, \dots$), какова бы ни была измеримая функция $f(x)$ определенная на $[a, b]$, существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(n)} \varphi_k^{(n)}(x) \quad (1.57)$$

для которого частные суммы с номерами k_j сходятся к $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$, т. е.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_j} c_k^{(n)} \varphi_k^{(n)}(x) = f(x) \quad (1.58)$$

почти всюду на $[a, b]$.

Доказательство. Положим $k_0=0$. Предположим теперь, что число k_{j-1} уже определено. Рассмотрим системы $\{\varphi_k^{(n)}(x)\}$ для $1 \leq n \leq j$. В силу теоремы А), если из каждой из этих систем отбросим первые k_{j-1} функций, то они останутся полными в смысле сходимости почти всюду. Поэтому легко видеть, что существует число $k_j > k_{j-1}$, множество B_j и функции

$$\Phi_j^{(n)}(x) = \sum_{k=k_{j-1}+1}^{k_j} c_k^{(n)} \varphi_k^{(n)}(x) \quad 1 \leq n \leq j, \quad (1.59)$$

для которых выполняются условия

$$\text{mes } B_j > b - a - \varepsilon_j, \quad (1.60)$$

$$|\Phi_j^{(n)}(x) - P_j(x)| < \varepsilon_j, \quad x \in B_j, \quad 1 \leq n \leq j. \quad (1.61)$$

Таким образом мы можем определить возрастающую последовательность натуральных чисел $\{k_j\}$, последовательность множеств $\{B_j\}$ и функции $\Phi_j^{(n)}(x)$, $1 \leq n \leq j$, $j=1, 2, \dots$ вида (1.59), для которых будут выполнены условия (1.60) и (1.61), где $j=1, 2, \dots$, $1 \leq n \leq j$.

Пусть теперь $f(x)$ измеримая функция. Рассмотрим для фиксированного n систему $\{\varphi_k^{(n)}(x)\}$.

Так как для всех $j > n$ имеет место неравенство (1.61), где $\{P_j(x)\}$ суть полиномы с рациональными коэффициентами, а $\{\varepsilon_j\}$ удов-

удовлетворяет условию (1.25), то точно так же, как и в предыдущей теореме, существует ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \Phi_{j_l}(x), \quad (1.62)$$

который сходится к $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(n)} \varphi_k^{(n)}(x), \quad (1.63)$$

где коэффициенты $a_k^{(n)}$ определены следующим образом

$$a_k^{(n)} = c_k^{(n)} \quad \text{для} \quad k_{j_{l-1}+1} < k \leq k_{j_l}, \quad l=1, 2, \dots, \quad (1.64)$$

$$a_k^{(n)} = 0 \quad \text{для остальных } k.$$

Из (1.59) и (1.64) видно, что частные суммы $S_{k_j}^{(n)}(x)$ ряда (1.63), где

$$S_{k_j}^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{k_j} a_k^{(n)} \varphi_k^{(n)}(x), \quad (1.65)$$

совпадают с частными суммами ряда (1.62). Следовательно,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} S_{k_j}^{(n)}(x) = f(x) \quad (1.66)$$

почти всюду на $[0, 1]$.

Так как последовательность $\{k_j\}$ не зависит от n и $f(x)$ произвольная измеримая функция, то теорема доказана.

Замечание. Рассмотрим бесконечную матрицу $\|a_{jk}\|$, элементы которой определяются следующим образом

$$a_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq k_j \\ 1 & \text{при } k = k_j \end{cases} \quad (j=1, 2, \dots), \quad (1.67)$$

где $\{k_j\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, фигурирующая в предыдущей теореме.

Таким образом, матрица $\|a_{jk}\|$ определяет некоторый линейный регулярный метод Т. Из (1.65), (1.66) и (1.67) следует, что ряд (1.63) суммируется методом Т почти всюду к $f(x)$.

Таким образом, сформулированная во введении теорема II справедлива.

§ 2.

В настоящем параграфе мы докажем следующую теорему.

Т е о р е м а 3. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (2.1)$$

почти везде конечных измеримых функций, определенных на $[a, b]$, универсален, т. е. для любой измеримой функции $f(x)$ существует подпоследовательность частных сумм

$$S_{n_k}(x) = \sum_{n=1}^{n_k} f_n(x) \quad (2.2)$$

такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k}(x) = f(x) \quad (2.3)$$

почти всюду на $[a, b]$.

Пусть, далее, существует подпоследовательность $\{f_{k_j}(x)\}$ последовательности $\{f_n(x)\}$ такая, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_{k_j}(x) = 0 \quad (2.4)$$

почти всюду на $[a, b]$.

Тогда ряд (2.1) будет универсальным относительно перестановок в классе всех измеримых функций в смысле суммируемости одновременно всеми методами Чезаро положительного порядка, т. е. для любой измеримой функции $f(x)$ члены ряда (2.1) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}_k(x) \quad (2.5)$$

суммировался к $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$ всеми методами Чезаро положительного порядка.

Для доказательства этой теоремы мы будем рассматривать введенные Д. Е. Меньшовым Т' методы суммирования (см. [6]), которые определяются следующим образом.

Линейный метод суммирования, определенный матрицей $\|a_{ik}\|$, называется методом Т', если удовлетворяются следующие условия:

1⁰ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}$ сходится для всех значений i , достаточно больших, и

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} = 1;$$

2°. для всех достаточно больших значений i имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| < M,$$

где M не зависит от i ;

$$3°. \lim_{i \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k < +\infty} |a_{ik}| = 0.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать положительные методы T' , т. е. мы будем предполагать, что, помимо условий 1°, 2°, 3°, имеет место также условие

$$4°. a_{ik} > 0, \quad i = 1, 2, \dots; \quad k = 1, 2, \dots$$

Легко доказать, что все методы Чезаро положительного порядка являются положительными T' методами (см. [6]).

Очевидно, сформулированная выше теорема 3 вытекает из следующей теоремы.

Теорема 4. Пусть ряд (2.1) почти везде конечных измеримых функций, определенных на $[a, b]$, универсален и пусть для некоторой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{k_i\}$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_{k_i}(x) = 0 \quad (2.6)$$

почти всюду на $[a, b]$.

Пусть, далее, задана последовательность положительных T' методов: $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$

Тогда для любой измеримой функции $f(x)^*$ члены ряда (2.1) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{k_i}(x) \quad (2.7)$$

суммировался почти всюду на $[a, b]$ к $f(x)$ всеми методами $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$

Теорема III, сформулированная во введении, будет следовать из теоремы 3 в силу следующей теоремы, сформулированной в [7].

Теорема.** Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ есть нормированный базис пространства $L_p[a, b]$, $p > 1$. Тогда существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (2.8)$$

* $f(x)$ может равняться $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры.

** Доказательство теорем, сформулированных в [7], изложено в статье „О рядах, универсальных относительно перестановок“, которая сдана в печать в Известиях АН СССР.

с коэффициентами a_n , стремящимися к нулю, который универсален относительно перестановок в смысле сходимости по мере.

В [7] была сформулирована также теорема о том, что если функциональный ряд универсален относительно перестановок в смысле сходимости по мере, то после некоторой перестановки его членов он становится универсальным относительно сходимости почти всюду подпоследовательностей частных сумм.

Таким образом получаем, что для любого нормированного базиса $\{\varphi_n(x)\}$ существует универсальный ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \varphi_{n_k}(x) \quad (2.9)$$

и при этом $a_{n_k} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Но так как система $\{\varphi_n(x)\}$ нормирована, т. е.

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^p dx = 1, \quad (2.10)$$

то ясно, что некоторая последовательность $a_{n_{k_l}} \varphi_{n_{k_l}}(x)$ будет сходиться к нулю почти всюду на $[a, b]$.

Следовательно, для ряда (2.9) будут выполнены все предположения, сделанные в теореме 3.

Отсюда ясно, что сформулированная во введении теорема III следует из теоремы 3 и из существования универсального ряда (2.9).

С другой стороны, как уже отмечалось выше, теорема 3 является следствием теоремы 4. Итак, остается доказать теорему 4. Эта теорема доказывается методом Д. Е. Меньшова, примененным им в работе [4].

Доказательство теоремы 4. Прежде всего отметим, что в силу условия (2.6) из последовательности $\{k_l\}$ можно выбрать возрастающую последовательность $m_1 < m_2 < \dots < m_p < \dots$ такую, что ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} f_{m_p}(x) \quad (2.11)$$

почти всюду на $[a, b]$ абсолютно сходится.

В самом деле пусть $\varepsilon_p > 0$, $p = 1, 2, \dots$ и пусть

$$\sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon_p < +\infty. \quad (2.12)$$

В силу условия (2.6) существует возрастающая последовательность $\{m_p\}$, $\{m_p\} \subset \{k_l\}$ и последовательность множеств $\{E_p\}$ такие, что

$$|f_{m_p}(x)| < \varepsilon_p \quad \text{при} \quad x \in E_p, \quad (2.13)$$

$$\text{mes } E_p > b - a - \varepsilon_p. \quad (2.14)$$

Положим

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{p=n}^{\infty} E_p. \quad (2.15)$$

Ясно, что на множестве E ряд (2.11) абсолютно сходится и что

$$\text{mes } E = b - a. \quad (2.16)$$

Обозначим через $p_s, s=1, 2, \dots$ последовательность целых положительных чисел, отличных от чисел $m_p, p=1, 2, \dots$ и перенумерованных в порядке возрастания. Легко видеть, что ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} f_{p_s}(x) \quad (2.17)$$

универсален. В самом деле, пусть $f(x)$ произвольная измеримая функция. Обозначим через $\varphi(x)$ сумму ряда (2.11) и положим

$$F(x) = f(x) + \varphi(x). \quad (2.18)$$

В силу универсальности ряда (2.1) существует возрастающая последовательность натуральных чисел $i_1 < i_2 < \dots < i_r < \dots$ такая, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{i_r} f_k(x) = F(x) \quad (2.19)$$

почти всюду на $[a, b]$.

В силу определения ряда (2.17) мы можем написать

$$\sum_{k=1}^{i_r} f_k(x) = \sum_{s=1}^{i_{q_r}} f_{m_s}(x) + \sum_{s=1}^{i_{l_r}} f_{p_s}(x). \quad (2.20)$$

Так как

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^{i_{q_r}} f_{m_s}(x) = \varphi(x)$$

почти всюду на $[a, b]$, то в силу (2.18), (2.19) и (2.20) будем иметь

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^{i_{l_r}} f_{p_s}(x) = f(x)$$

почти всюду на $[a, b]$. Тем самым универсальность ряда (2.17) доказана.

Пусть $\{T_n\}$ есть последовательность положительных T'' методов,

т. е. каждый метод T_n определяется матрицей $\|a_{ik}^{(n)}\|$, обладающей следующими свойствами:

$$1^{00}. a_{ik}^{(n)} \geq 0, \quad i=1, 2, \dots; \quad k=1, 2, \dots;$$

$$2^{00}. \text{ряд } \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} \text{ сходится для всех значений } i \text{ и}$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} = 1;$$

3⁰⁰. для всех значений i имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} < M_n,$$

где M_n не зависит от i^* ;

$$4^{00}. \lim_{i \rightarrow \infty} a_{ik}^{(n)} = 0 \quad (k=1, 2, \dots);$$

5⁰⁰. если обозначить через $\gamma_i^{(n)} = \max_{1 \leq k < \infty} |a_{ik}^{(n)}|$, то

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i^{(n)} = 0.$$

Пусть $f(x)$ произвольная измеримая функция, определенная на $[a, b]$, и $\varphi(x)$ есть сумма ряда (2.11).

Положим

$$F(x) = f(x) - \varphi(x). \quad (2.21)$$

Так как ряд (2.17) универсален, то некоторая подпоследовательность частных сумм этого ряда будет сходиться почти всюду на $[a, b]$ к $F(x)$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} S_{l_j}(x) = F(x) \quad (2.22)$$

почти всюду на $[a, b]$, где

$$S_{l_j}(x) = \sum_{l=1}^{l_j} f_{p_l}(x). \quad (2.23)$$

Сначала мы докажем, что между членами ряда (2.17) можно вставить нули таким образом, чтобы полученный новый ряд суммировался бы почти всюду на $[a, b]$ к $F(x)$ всеми методами $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$

* Ясно, что условие 3⁰⁰ следует из 1⁰⁰ и 2⁰⁰, но для дальнейшего удобно сформулировать его отдельно.

Пусть A , B и C те множества, лежащие на отрезке $[a, b]$, где $F(x)$ принимает соответственно конечные значения, значение $+\infty$ и значение $-\infty$:

$$A = E(|F(x)| < +\infty), \quad (2.24)$$

$$B = E(F(x) = +\infty), \quad (2.25)$$

$$C = E(F(x) = -\infty). \quad (2.26)$$

Очевидно,

$$A + B + C = [a, b] \quad (2.27)$$

и

$$\text{mes } A + \text{mes } B + \text{mes } C = b - a. \quad (2.28)$$

В наших дальнейших рассуждениях не исключается также случай, когда одно или два из этих множеств пусты или имеют меру нуль.

Через E обозначим множество тех точек, где выполняется равенство (2.22). Так как (2.22) имеет место почти всюду на $[a, b]$, то

$$\text{mes } E = b - a. \quad (2.29)$$

Очевидно, для каждого значения j можно определить положительное число L_j и множество G_j , которые удовлетворяют условиям

$$1 < L_j < L_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (2.30)$$

$$\max_{1 \leq l \leq l_j} |S_l(x)| < L_j \quad \text{при } x \in G_j(B + C), \quad (2.31)$$

$$\max_{1 \leq l \leq l_j} (|S_l(x)| + |F(x)|) < L_j \quad \text{при } x \in G_j A, \quad (2.32)$$

$$G_j \subset (a, b), \quad \text{mes } G_j > b - a - \frac{1}{j^2}. \quad (2.33)$$

В условиях (2.31) и (2.32) $S_l(x)$ есть частная сумма ряда (2.17)

$$S_l(x) = \sum_{s=1}^l f_{\varepsilon_s}(x). \quad (2.34)$$

Пусть

$$G = \liminf G_j. \quad (2.35)$$

Тогда из (2.33) следует, что

$$G \subset (a, b), \quad \text{mes } G = b - a. \quad (2.36)$$

Положим

$$\gamma_l^{(n)} = \max_{1 \leq s \leq n} \gamma_s^{(n)}. \quad (2.37)$$

Из условия 5^{00} следует, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \gamma_l^{(n)} = 0 \quad \text{для всех } n = 1, 2, \dots. \quad (2.38)$$

Определим две последовательности целых чисел λ_j и μ_j следующим образом.

Положим $\lambda_1 = \mu_1 = 0$.

Далее берется λ_j таким образом, что

$$\lambda_{j-1} < \lambda_j, \quad \gamma_{\lambda_j}^{(n)} L_j \mu_{j-1} < \frac{1}{j}; \quad 1 \leq n \leq j. \quad (2.39)$$

В силу 2^{00} ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)}$ сходится для каждого значения i и для каждого $n=1, 2, \dots$, поэтому можно определить целое число μ_j так, чтобы выполнялись также неравенства

$$\mu_{j-1} + l_{j+1} < \mu_j, \quad L_j \delta_j^{(n)} < \frac{1}{2^j}; \quad 1 \leq n \leq j, \quad (2.40)$$

где

$$\delta_j^{(n)} = \max_{1 \leq i < \lambda_j} \sum_{k=\mu_j}^{\infty} a_{ik}^{(n)}. \quad (2.41)$$

Таким образом определены целые числа λ_j и μ_j для всех значений индекса j и неравенства (2.39) и (2.40) имеют место для всех $j > 1$.

Положим

$$l_0 = 0, \quad \mu'_j = \mu_j + l_j - l_{j-1}. \quad (2.42)$$

Из первого неравенства (2.40) имеем

$$\mu_j < \mu'_j < \mu_{j+1} \quad (j=1, 2, \dots). \quad (2.43)$$

Кроме того из $\mu_1 = 0$ вытекает

$$\sum_{r=1}^j (\mu'_r - \mu_r) = l_{j-1} + \mu'_j - \mu_j = l_j. \quad (2.44)$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty} \psi_v(x) \quad (2.45)$$

члены которого определены следующим образом

$$\psi_v(x) = 0 \quad \text{при} \quad \mu'_j < v \leq \mu_{j+1}, \quad (2.46)$$

$$\psi_v(x) = f_{\mu'_j}(x) \quad \text{при} \quad \mu_j < v \leq \mu'_j, \quad (2.47)$$

где

$$l = \sum_{r=1}^{j-1} (\mu'_r - \mu_r) + v - \mu_j = l_{j-1} + v - \mu_j \quad (2.48)$$

Другими словами ряд (2.45) получается из ряда (2.17), если в последнем после члена $f_{ij}(x)$ прибавить $\mu_{j+1} - \mu_j$ нулей для каждого j .

Докажем, что ряд (2.45) суммируется всеми методами $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ к $F(x)$ в каждой точке множества

$$G \cdot E \cdot (A + B + C) = G \cdot E \cdot A + G \cdot E \cdot B + G \cdot E \cdot C. \quad (2.49)$$

Положим

$$S_k^*(x) = \sum_{v=1}^k \psi_v(x) \quad (2.50)$$

и рассмотрим ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} S_k^*(x), \quad (2.51)$$

где $a_{ik}^{(n)}$ являются элементами матрицы, соответствующей методу T_n .

Чтобы доказать, что в любой точке x множества (2.49) ряд (2.45) суммируется к $F(x)$ методом T_n , нужно доказать, что в этой точке ряд (2.51) сходится для всех достаточно больших значений i и обладает суммой, которая стремится к $F(x)$, если $i \rightarrow \infty$.

Сначала предположим, что x принадлежит множеству $G \cdot E \cdot A$ (конечно, мы предполагаем, что это множество не пусто; в том случае, когда это множество пусто, нечего доказывать).

В силу регулярности и положительности метода T_n , в данном случае достаточно доказать, что в рассматриваемой точке x ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} |S_k^*(x) - F(x)| \quad (2.52)$$

сходится для всех достаточно больших значений i и обладает суммой, которая стремится к нулю вместе с $\frac{1}{i}$.

В силу (2.46), (2.47), (2.48) и (2.50) будем иметь

$$S_k^*(x) = S_{l_j}(x) \quad \text{для} \quad \mu_j^* < k \leq \mu_{j+1}^*, \quad (2.53)$$

$$S_k^*(x) = S_l(x) \quad \text{для} \quad \mu_j < k \leq \mu_j^*, \quad (2.54)$$

где

$$l = l_{j-1} + k - \mu_j^* \quad (\text{очевидно } l_{j-1} < l \leq l_j). \quad (2.55)$$

Предположим, что

$$\lambda_j < i \leq \lambda_{j+1} \quad (j = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.56)$$

Рассмотрим суммы вида

$$\sigma_{ir}^{(n)}(x) = \sum_{k=\mu_r+1}^{\mu_{r+1}} a_{ik}^{(n)} |S_k^*(x) - F(x)|. \quad (2.57)$$

В силу (2.53), (2.54) и (2.55) будем иметь

$$\sigma_{lr}^{(n)}(x) = \sum_{k=\mu_r+1}^{\mu_r} a_{lk}^{(n)} |S_l(x) - F(x)| + |S_{l_r}(x) - F(x)| \sum_{k=\mu_r+1}^{\mu_{r+1}} a_{lk}^{(n)}, \quad (2.58)$$

где

$$r=1, 2, \dots, \quad l=l_{r-1}+k-\mu_r \text{ (ясно, что } l_{r-1} < l \leq l_r).$$

Если $x \in G \cdot E \cdot A$, то в силу определения множества G существует индекс j_x такой, что $x \in G_j$ для всех $j > j_x$.

С другой стороны, так как $x \in E \cdot A$, будем иметь

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |S_{l_r}(x) - F(x)| = 0. \quad (2.59)$$

Предположим, что

$$j > n, \quad j-1 > j_x \text{ и } \lambda_j < i \leq \lambda_{j+1}. \quad (2.60)$$

Если теперь $r=j-1$ или $r=j$, то $x \in G_r$ и из (2.58) и (2.32) получаем

$$\sigma_{lr}^{(n)}(x) \leq L_r \cdot \sum_{k=\mu_r+1}^{\mu_r} a_{lk}^{(n)} + |S_{l_r}(x) - F(x)| \sum_{k=\mu_r+1}^{\mu_{r+1}} a_{lk}^{(n)}. \quad (2.61)$$

Отсюда, в силу определения чисел $\gamma_l^{(n)}$ (см. 5⁰⁰) и в силу условия 3⁰⁰, будем иметь

$$\sigma_{lr}^{(n)}(x) \leq L_r \gamma_l^{(n)} (\mu_r - \mu_r) + M_n |S_{l_r}(x) - F(x)|.$$

Следовательно,

$$\sigma_{lr}^{(n)}(x) \leq L_j \gamma_l^{(n)} (\mu_r - \mu_r) + M_n |S_{l_r}(x) - F(x)|. \quad (2.62)$$

Из (2.37), (2.40), (2.42) и (2.56) получаем

$$\gamma_l^{(n)} \leq \gamma_{\lambda_j}^{(n)}; \quad \mu_r - \mu_r < l_r < l_j < \mu_{j-1}. \quad (2.63)$$

В силу (2.63), (2.62) и (2.39), учитывая первое неравенство (2.60), будем иметь

$$\sigma_{lr}^{(n)}(x) \leq \frac{1}{j} + M_n |S_{l_r}(x) - F(x)| \quad (2.64)$$

$$(r=j-1 \text{ или } r=j, \quad j-1 > j_x, \quad j > n, \quad \lambda_j < i \leq \lambda_{j+1}).$$

Когда $r > j > j_x + 1$, $\lambda_j < i \leq \lambda_{j+1}$, имеем $i \leq \lambda_r$.

Кроме того из $x \in G_r$ и из неравенств (2.61), (2.32) получаем

$$\sigma_{lr}^{(n)}(x) \leq L_r \cdot \sum_{k=\mu_r+1}^{\mu_{r+1}} a_{lk}^{(n)}.$$

Отсюда, в силу (2.40), будем иметь

$$\sigma_{ir}^{(n)}(x) < L_r \cdot \delta_r^{(n)} < \frac{1}{2^r}; \quad (j > n, r > j > j_x + 1, \lambda_j < i \leq \lambda_{j+1}). \quad (2.65)$$

Таким образом, так как при $i > \max(n, \lambda_{j_x+2})$ мы можем определить j , удовлетворяющее неравенству (2.60), то из (2.65) ясно, что для указанных i ряды (2.52) сходятся.

Обозначим через $T_j^{(n)}(x)$ сумму ряда (2.52). Тогда будем иметь

$$T_j^{(n)}(x) = \sum_{r=1}^{j-2} \sigma_{ir}(x) + \sigma_{i,j-1}(x) + \sigma_{ij}(x) + \sum_{r=j+1}^{\infty} \sigma_{ir}(x) \quad (2.66)$$

$$(\lambda_j < i \leq \lambda_{j+1}, i \geq \max(n, \lambda_{j_x+2}), j > \max(n, j_x + 1).$$

Можно доказать, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T_j^{(n)}(x) = 0.$$

В самом деле, заметим прежде всего, что $|a_{ik}^{(n)}| \leq \gamma_{\lambda_j}^{(n)}$ при $k = 1, 2, 3, \dots, \lambda_j < i \leq \lambda_{j+1}, j > n$. Поэтому, так как $\mu_1 = 0$, в силу (2.32), (2.55) и (2.57) будем иметь

$$\sum_{r=1}^{j-2} \sigma_{ir}^{(n)}(x) \leq \gamma_{\lambda_j}^{(n)} \cdot L_j \sum_{r=1}^{j-2} (\mu_{r+1} - \mu_r) = \gamma_{\lambda_j}^{(n)} L_j \mu_{j-1} \quad (2.67)$$

для всех достаточно больших значений i , именно для таких i , для которых соответствующее значение j , удовлетворяющее неравенству $\lambda_j < i \leq \lambda_{j+1}$, больше, чем $j_x + 1$.

Так как при $i \rightarrow \infty$ соответствующее число j стремится к бесконечности, а число n фиксировано, то из (2.39) и (2.67) следует, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{j-2} \sigma_{ir}^{(n)}(x) = 0. \quad (2.68)$$

Далее, из (2.64) и (2.59) следует, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_{i,j-1}^{(n)}(x) = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_{ij}^{(n)}(x) = 0. \quad (2.69)$$

С другой стороны, в силу неравенств (2.65) имеем

$$\sum_{r=j+1}^{\infty} \sigma_{ir}^{(n)}(x) < \frac{1}{2^j}$$

при $j > n, j > j_x + 1, \lambda_j < i \leq \lambda_{j+1}$.

Следовательно,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{r=j+1}^{\infty} \sigma_{ir}^{(n)}(x) = 0. \quad (2.70)$$

Из (2.68), (2.69) и (2.70) следует, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T_i^{(n)}(x) = 0.$$

Таким образом мы доказали, что в каждой точке x множества $G \cdot E \cdot A$ ряд (2.45) суммируется к $F(x)$ каждым из методов $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$.

Теперь докажем, что на множестве $G \cdot E \cdot B$ ряд (2.45) также будет суммироваться всеми методами $T_1, T_2, \dots$ к $F(x)$, т. е. к $+\infty$.

Для этого мы должны доказать, что в любой точке $x \in G \cdot E \cdot B$ ряды (2.51) для любого фиксированного n сходятся, начиная с достаточно большого i , и их суммы стремятся к $+\infty$, когда $i \rightarrow \infty$.

Пусть $x \in G \cdot E \cdot B$, тогда найдется j_x настолько большое, что $x \in G_{j_x} \cdot E \cdot B$ для всех $j > j_x$.

С другой стороны, так как $x \in E \cdot B$, то в силу (2.22) и в силу определения множества E как множества тех точек, где выполняется (2.22), будем иметь

$$\lim_{r \rightarrow \infty} S_r(x) = +\infty. \quad (2.71)$$

Рассмотрим ряд (2.51). Теперь мы будем изучать поведение следующих сумм из этого ряда

$$\sigma_{ir}^{*(n)}(x) = \sum_{k=\mu_r+1}^{\mu_{r+1}} a_{ik}^{(n)} S_k^*(x). \quad (2.72)$$

Пусть

$$j > j_x + 1, \quad j > n \quad (2.73)$$

и

$$\lambda_j < i \leq \lambda_{j+1}. \quad (2.74)$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{r=1}^{j-2} \sigma_{ir}^{*(n)}(x) = \sum_{r=1}^{j-2} \sum_{k=\mu_r+1}^{\mu_{r+1}} a_{ik}^{(n)} S_k^*(x). \quad (2.75)$$

Так как в силу (2.73) $x \in G_{j-1}$, то из (2.53), (2.54) и (2.55), учитывая (2.31), будем иметь

$$|S_k^*(x)| < L_j, \quad k \leq \mu_{j-1}. \quad (2.76)$$

Поэтому

$$\left| \sum_{r=1}^{j-2} \sigma_{ir}^{*(n)}(x) \right| < L_j \mu_{j-1} \gamma_l^{(n)} < L_j \mu_{j-1} \gamma_{\lambda_j}^{(n)} \quad (2.77)$$

и тогда в силу (2.39)

$$\left| \sum_{r=1}^{j-2} \sigma_{ir}^{*(n)}(x) \right| < \frac{1}{j}. \quad (2.78)$$

Из (2.74) и (2.78) вытекает

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{j-2} \sigma_{lr}^{*(n)}(x) = 0. \quad (2.79)$$

Далее заметим, что так как $1 < L_j$ (см. (2.30)), то в силу (2.39) имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\mu_{j-1}} a_{ik}^{(n)} < \gamma_{ij}^{(n)} \cdot \mu_{j-1} < \gamma_{ij}^{(n)} \cdot \mu_{j-1} L_j < \frac{1}{j}, \quad (2.80)$$

где $j > n$ и число i удовлетворяет неравенству (2.74).

Рассмотрим теперь суммы $\sigma_{lr}^{*(n)}(x)$ для $r > j$. В силу (2.31), (2.53), (2.54) и (2.55) учитывая, что при $j > j_x$, x принадлежит множеству G_j , будем иметь

$$|\sigma_{lr}^{*(n)}(x)| \leq \sum_{k=\mu_r+1}^{\mu_{r+1}} a_{ik}^{(n)} |S_k^*(x)| \leq L_r \cdot \sum_{k=\mu_r+1}^{\mu_{r+1}} a_{ik}^{(n)},$$

Отсюда, так как $\lambda_r \geq i$, в силу (2.40) имеем

$$|\sigma_{lr}^{*(n)}(x)| \leq L_r \sum_{k=\mu_r+1}^{\mu_{r+1}} a_{ik}^{(n)} < L_r \cdot \delta_r^{(n)} < \frac{1}{2^r}, \quad (2.81)$$

где $r > j > j_x$, $j > n$, $\lambda_j < i \leq \lambda_{j+1}$.

Из (2.81) получаем

$$\left| \sum_{k=\mu_{j+1}+1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} S_k^*(x) \right| = \left| \sum_{l=j+1}^{\infty} \sigma_{lr}^{*(n)}(x) \right| < \frac{1}{2^j}. \quad (2.82)$$

Следовательно,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=\mu_{j+1}+1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} S_k^*(x) = 0. \quad (2.83)$$

Таким образом, ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} S_k^*(x)$$

сходятся для $i > \lambda_j$, где j удовлетворяет неравенствам (2.73).

Обозначим сумму этого ряда через $T_i^{*(n)}(x)$.

Мы должны доказать, что

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} T_i^{*(n)}(x) = +\infty, \quad (2.84)$$

для чего в силу (2.79) и (2.83) достаточно доказать, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} [\sigma_{l, j-1}^{(n)}(x) + \sigma_{i, j}^{(n)}(x)] = +\infty. \quad (2.85)$$

Для этого заметим, что в силу (2.81) и в силу того, что $L_r \geq 1$, будем иметь

$$\sum_{k=\mu_{j+1}+1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} < \frac{1}{2^j}; \quad (j > j_1, j > n, \lambda_j < i \leq \lambda_{j+1}). \quad (2.86)$$

Из условия 2⁰⁰ метода суммирования T_n и из (2.80) и (2.86) вытекает

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=\mu_{j-1}+1}^{\mu_{j+1}} a_{ik}^{(n)} = 1. \quad (2.87)$$

В силу (2.72) можно написать

$$\sigma_{l, j-1}^{(n)}(x) = \sum_{k=\mu_{j-1}+1}^{\mu_{j-1}} a_{ik}^{(n)} S_l(x) + S_{l_{j-1}}(x) \sum_{k=\mu_{j-1}+1}^{\mu_j} a_{ik}^{(n)}, \quad (2.88)$$

$$\sigma_{i, j}^{(n)}(x) = \sum_{k=\mu_j+1}^{\mu_j} a_{ik}^{(n)} S_l(x) + S_{l_j}(x) \sum_{k=\mu_j+1}^{\mu_{j+1}} a_{ik}^{(n)}, \quad (2.89)$$

где в (2.88) имеем $l = l_{j-2} + k - \mu_{j-1}$; ($l_{j-2} < l \leq l_{j-1}$) и в (2.89) имеем $l = l_{j-1} + k - \mu_j$; ($l_{j-1} < l \leq l_j$) (см. (2.53), (2.54) и (2.55)).

Так как $\mu_{j-1} - \mu_{j-1} \leq l_{j-1} < l_j < \mu_{j-1}$ и $\mu_j - \mu_j \leq l_j < \mu_{j-1}$ (см. первое неравенство (2.40) и (2.42)), то в силу неравенства (2.39) можно писать:

$$\left| \sum_{k=\mu_{j-1}+1}^{\mu_{j-1}} a_{ik}^{(n)} S_l(x) \right| \leq L_{j-1} \sum_{k=\mu_{j-1}+1}^{\mu_{j-1}} a_{ik}^{(n)} \leq L_{j-1} \gamma_{\lambda_j}^{(n)} \mu_{j-1} < \frac{1}{j}, \quad (2.90)$$

$$\left| \sum_{k=\mu_j+1}^{\mu_j} a_{ik}^{(n)} S_l(x) \right| < L_j \sum_{k=\mu_j+1}^{\mu_j} a_{ik}^{(n)} \leq L_j \gamma_{\lambda_j}^{(n)} \mu_{j-1} < \frac{1}{j}. \quad (2.91)$$

Из неравенств (2.90) и (2.91) видно, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=\mu_{j-1}+1}^{\mu_{j-1}} a_{ik}^{(n)} S_l(x) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=\mu_j+1}^{\mu_j} a_{ik}^{(n)} S_l(x) = 0 \quad (2.92)$$

и, с другой стороны, так как $L_j > 1$, из этих же неравенств вытекает

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=\mu_{j-1}+1}^{\mu_j-1} a_{ik}^{(n)} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=\mu_j+1}^{\mu_{j+1}} a_{ik}^{(n)} = 0. \quad (2.93)$$

Сравнивая (2.87) и (2.93), получаем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=\mu_{j-1}+1}^{\mu_j} a_{ik}^{(n)} + \sum_{k=\mu_j+1}^{\mu_{j+1}} a_{ik}^{(n)} \right) = 1. \quad (2.94)$$

В силу положительности чисел $a_{ik}^{(n)}$ (см. 1⁰⁰) и в силу (2.71) из (2.94) вытекает

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left[S_{i_{j-1}}(x) \cdot \sum_{k=\mu_{j-1}+1}^{\mu_j} a_{ik}^{(n)} + S_{i_j}(x) \cdot \sum_{k=\mu_j+1}^{\mu_{j+1}} a_{ik}^{(n)} \right] = +\infty. \quad (2.95)$$

Сравнивая (2.88), (2.89) с (2.92) и (2.95), мы видим, что имеет место равенство (2.85).

Как мы уже заметили из (2.85), в силу (2.79) и (2.83) следует, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T_i^{(n)}(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} S_k^*(x) = +\infty$$

и это имеет место для любого $x \in G \cdot B \cdot E$.

Аналогично можно доказать, что в любой точке множества $G \cdot E \cdot C$ сходятся все ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} S_k^*(x)$$

начиная с достаточно большого значения i , и их сумма стремится к $-\infty$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} S_k^*(x) = -\infty.$$

Таким образом, мы доказали, что в каждой точке x множества (2.49) имеет место соотношение

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} S_k^*(x) = F(x) \quad (2.96)$$

для всех $n=1, 2, \dots$

Но из (2.28), (2.29) и (2.36) следует, что мера множества (2.49) равна $b-a$.

Итак доказано, что ряд (2.45), который получен из ряда (2.17) добавлением нулей, почти всюду на $[a, b]$ суммируется к $F(x)$ всеми методами $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$.

Рассмотрим теперь перестановку ряда (2.1)

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_{q_i}(x), \quad (2.97)$$

полученную следующим образом.

В ряде (2.45) вместо добавленных нулей, т. е. вместо нулей лежащих в промежутках $\mu_j' < \nu \leq \mu_{j+1}'$, $j=1, 2, \dots$, вставим функции $\{f_{m_p}(x)\}$ ряда (2.11) в возрастающем порядке индекса p .

Очевидно, полученный таким образом ряд (2.97) является суммой ряда (2.45) и ряда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_{\nu}(x), \quad (2.98)$$

где

$$\psi_{\nu}(x) = 0 \quad \text{при} \quad \mu_j' < \nu \leq \mu_{j+1}', \quad j=1, 2, \dots,$$

а для ν , удовлетворяющих неравенствам $\mu_j' < \nu \leq \mu_{j+1}'$, $j=1, 2, \dots$, функции $\psi_{\nu}(x)$ меняются, совпадая с возрастанием индекса ν со всеми функциями $f_{m_p}(x)$.

Так как ряд (2.11) сходится к почти везде конечной функции $\varphi(x)$, то ряд (2.98) также будет сходиться к той же сумме.

Обозначим через

$$S_k(x) = \sum_{i=1}^k f_{q_i}(x). \quad (2.99)$$

Будем иметь

$$S_k(x) = S_k^*(x) + S_k^{\sigma}(x), \quad (2.100)$$

где

$$S_k^*(x) = \sum_{\nu=1}^k \psi_{\nu}(x); \quad S_k^{\sigma}(x) = \sum_{\nu=1}^k \psi_{\nu}'(x). \quad (2.101)$$

В силу регулярности метода T_n ($n=1, 2, \dots$) и в силу того, что ряд (2.98) почти всюду на $[a, b]$ сходится к $\varphi(x)$, будем иметь

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^{\infty} a_{hk}^{(n)} S_k^{\sigma}(x) = \varphi(x) \quad (2.102)$$

почти всюду на $[a, b]$.

Из соотношений (2.96) и (2.102) в силу (2.100) вытекает

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} S_k(x) = F(x) + \varphi(x) \quad (2.103)$$

почти всюду на $[a, b]$, $n = 1, 2, \dots$.

Отсюда, в силу (2.21) будем иметь

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} S_k(x) = f(x)$$

почти всюду на $[a, b]$ для всех $n = 1, 2, \dots$.

Таким образом, для заранее заданной измеримой функции $f(x)$ существует ряд (2.97), полученный из ряда (2.1) перестановкой членов, который суммируется к $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$ всеми методами $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$.

Теорема 4 доказана. Тем самым доказаны также теорема 3 и теорема III, сформулированная во введении.

Замечание. В теореме 3 дается достаточное условие, при котором ряд (2.1), который универсален в обычном смысле, будет универсальным в классе всех измеримых функций в смысле суммируемости одновременно всеми методами Чезаро положительного порядка.

Это достаточное условие (см. (2.4)) заключается в том, что некоторая подпоследовательность последовательности $\{f_n(x)\}$ почти всюду сходится к нулю.

Легко видеть, что существуют универсальные ряды вида (2.1), для которых никакая подпоследовательность последовательности $\{f_n(x)\}$ не сходится к нулю почти всюду.

Более того, в универсальном ряде (2.1) последовательность $\{f_n(x)\}$ может возрастать сколь угодно быстро на всем отрезке $[a, b]$.

В самом далее, перенумеруем полиномы с рациональными коэффициентами

$$P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), \dots$$

и возьмем произвольную последовательность $\{\Phi_n(x)\}$ функций, определенных на $[a, b]$.

Положим $f_1(x) = \Phi_1(x)$, $f_2(x) = -\Phi_1(x) + P_1(x)$ далее, $f_3(x) = \Phi_2(x)$, $f_4(x) = -\Phi_2(x) + (P_2(x) - P_1(x))$, ..., $f_{2n-1}(x) = \Phi_n(x)$, $f_{2n}(x) = -\Phi_n(x) + (P_n - P_{n-1})$... и т. д.

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad (*)$$

будет универсальным, так как

$$\sum_{k=1}^{2n} f_k(x) = P_n(x), \quad n=1, 2, \dots$$

Так как функции $\Phi_n(x)$ могут возрастать сколь угодно быстро на отрезке $[a, b]$, то $|f_n(x)|$ тоже могут сколь угодно быстро возрастать на $[a, b]$.

Ясно, что при достаточно быстром возрастании $|f_n(x)|$ никакая перестановка ряда (*) не будет суммироваться методами Чезаро к конечной сумме, для любого $x \in [a, b]$.

Таким образом теорема 3 для произвольных универсальных рядов не верна.

Институт Математики и механики
АН Армянской ССР,

Поступила 12 I 1960

Ереванский Госуниверситет.

Ա. Ա. Թալալյան

ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՇԱՐՔԵՐԻ ՀԱՍԱՐՅԱ ԱՍԵՆՈՒՐԵՔ ԶՈՒԳԱՍԻՏՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳՈՒՄԱՐԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա աշխատության մեջ ապացուցված են հետևյալ թեորեմները՝

Թեորեմ 1. Գոյություն ունի $[a, b]$ հատվածի վրա որոշված ֆունկցիաների $\{\varphi_n(x)\}$ լրիվ օրթոգոնալ սխեմ՝ այնպիսին, որ մի որևէ $f(x) \in L_2[a, b]$ ֆունկցիայի վերլուծությունը ըստ այդ սխեմի տարամիտում է համարյա ամենուրեք, բայց ցանկացած $F(x)$ չափելի ֆունկցիայի համար գոյություն ունի

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (1)$$

շարք, որը զուգամիտում է $F(x)$ -ին համարյա ամենուրեք:

Թեորեմ 2. Դիցուք $\{\varphi_n(x)\}$ -ը նորմավորված բազիս է $L_p[a, b]$ տարածության մեջ:

Գոյություն ունի այնպիսի

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (2)$$

շարք, որտեղ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, որ ցանկացած $f(x)$ չափելի ֆունկցիայի համար (2)

շարքի անդամների տեղափոխությունից ստացված մի ինչ-որ

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \quad (3)$$

շարք համարյա ամենուրեք դուրսգալիս է դեպի $f(x)$ ֆունկցիան Չեզարոյի բոլոր դրական կարգի մեթոդներով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Меньшов Д. Е. Sur la representation des fonctions mesurables Par des series trigonometriques. Matem. сб. 9 (51), 1941, 667—692.
2. Меньшов Д. Е. Sur les series de fonctions orthogonales Fund. Math. 4, 1923, 82—105.
3. Талалян А. А. Суммирование рядов по базисам пространства L_p методами Чезаро. ДАН СССР, том 124, № 5, 1959.
4. Меньшов Д. Е. Sur la sommation des series de fonctions orthogonales par des methodes de Cesaro. Matem. сб., 8 (50), 1940, 121—136.
5. Талалян А. А. О сходимости почти всюду подпоследовательностей частных сумм общих ортогональных рядов. Известия АН Армянской ССР (серия физ. мат. наук), том X, № 3, 1957.
6. Меньшов Д. Е. Sur la convergence et la sommation des series de fonctions orthogonales. Bull. Soc. Math. France, 64, 1936, 147—170.
7. Талалян А. А. О рядах по базисам пространства L_p , универсальных относительно перестановок. ДАН Арм. ССР, том XXVIII, № 4, 1959.