ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 2, 1960 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

С. О. Синанян

Восстановление аналитической функции ее асимптотическим рядом в области $Re z^{\frac{1}{\alpha}} > a^{\frac{1}{\alpha}}$

Пусть аналитическая в области $Re z^{\frac{1}{\alpha}} > a^{\frac{1}{\alpha}}$ функция в этой области имеет асимптотический ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{z^k}$ посредством последовательности $\{m_n\}$

$$\left| f(z)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{z^k} \right| \leqslant \frac{m_n}{|z|^n}, \quad Re z^{\frac{1}{\alpha}} > a^{\frac{1}{\alpha}}, \quad n=0,\ 1,\ 2\ldots$$

Дадим следующее определение. Говорят, что последовательность $\{m_n\}$ удовлетворяет условию Карлемана C_α $(\alpha>0)$, если

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\beta_k^{\frac{1}{\alpha}}}=+\infty, \quad \beta_k=\inf_{n>k}\sqrt[n]{m_n}.$$

Известно, что если последовательность $\{m_n\}$ удовлетворяет условию C_α Карлемана, то асимптотический ряд единственным образом определяет функцию $f(z)$ в области $Re z^{\frac{1}{\alpha}}>a^{\frac{1}{\alpha}}$. В связи с этим возникает вопрос о представлении функции $f(z)$ посредством асимптотического ряда. В работе [1] дано интегральное представление для некоторого класса аналитических функций. В настоящей работе расширяется класс таких функций.

Теорема 1. **Если аналитическая в области $Re z^{\frac{1}{\alpha}} > a^{\frac{1}{\alpha}}$ $(a>0)$, $0<\alpha\leqslant 1$ функция $f(z)$:**

а) в этой области имеет асимптотический ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{z^k}$ посредством последовательности $\{m_n\}$,

б) последовательность $\{m_n\}$ удовлетворяет условию C_α Карлемана,

в) **элементом** $\Phi^{(n)}(0)=\frac{a_n\cdot n!}{\Gamma(\alpha n+1)}$, $(n=0, 1, 2,\ldots)$ **определяется квазианалитическая функция** $\Phi(t)$ **на** $[0, \infty)$, **причем**

$$\left|\Phi^{(n)}(t)\right|\leq\mu_n\cdot e^{\sigma t^{\frac{1}{\alpha}}},\quad t\geq 0,\ a^{\frac{1}{\alpha}}>\sigma,$$

г) **числа** $m_n^*=\frac{\mu_n\cdot\Gamma(\alpha n+1)}{n!}$ **также удовлетворяют условию** C_α **Карлемана, тогда**

$$f(z)=z^{\frac{1}{\alpha}}\int_0^\infty e^{-z^{\frac{1}{\alpha}}t}\,\Phi(t^\alpha)dt,\quad Rez^{\frac{1}{\alpha}}>a^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Доказательство. Обозначим

$$f_1(z^{\frac{1}{\alpha}})=z^{\frac{1}{\alpha}}\int_0^\infty e^{-z^{\frac{1}{\alpha}}\tau}\cdot\Phi(\tau^\alpha)\,d\tau \tag{1}$$

и докажем, что $f_1(z^{\frac{1}{\alpha}})\equiv f(z)$, $Rez^{\frac{1}{\alpha}}>a^{\frac{1}{\alpha}}$. Запишем формулу Тейлора для функции $\Phi(t)$ в интегральной форме

$$\Phi(t)=\sum_{k=0}^n\frac{\Phi^{(k)}(0)}{k!}t^k+\frac{1}{n!}\int_0^t\Phi^{(n+1)}(x)(t-x)^n\,dx.$$

Подставив это выражение в формулу (1) и совершив замену переменной, получим

$$f_1(s)=\sum_{k=0}^n\frac{a_k}{s^{\alpha.k}}+\frac{\alpha\cdot s}{n!}\int_0^\infty e^{-s\tau}\,d\tau\int_0^\tau\Phi^{(n+1)}(t^\alpha)(\tau^\alpha-t^\alpha)^n\cdot t^{\alpha-1}\,dt,\quad s=z^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Положим

$$R_n(s)=\frac{\alpha\cdot s}{n!}\int_0^\infty e^{-s\tau}\,d\tau\int_0^\tau\Phi^{(n+1)}(t^\alpha)(\tau^\alpha-t^\alpha)^n\cdot t^{\alpha-1}dt \tag{2}$$

и

$$\omega_n(t,\tau)=\frac{\tau^{\alpha n}}{2\pi i}\int_{l+C_n}\frac{\left(\frac{t}{\tau}\right)^{-\zeta}d\zeta}{\prod_{\nu=0}^n(\zeta+\alpha\cdot\nu)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{l+C_n}\frac{\tau^{\alpha n+\zeta}\cdot t^{-\zeta}\,d\zeta}{\prod_{\nu=0}^n(\zeta+\alpha\cdot\nu)}, \tag{3}$$

где l есть полуокружность $z=\frac{\alpha}{2}e^{i\varphi}$, $|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$, а C_n является частью окружностей $z+\frac{1+\alpha n}{2}=\frac{1+\alpha n}{2}e^{i\vartheta}$ и $z=\frac{\alpha}{2}e^{i\varphi}$, определенной соответственно неравенствами $|\vartheta|\leqslant\vartheta_0$, $\frac{\pi}{2}\leqslant|\varphi|\leqslant\varphi_0$. ϑ_0 и φ_0 суть единственные корни уравнения $-\frac{1+\alpha n}{2}+\frac{1+\alpha n}{2}e^{i\vartheta}=\frac{\alpha}{2}e^{i\varphi}$ при условии $0<\vartheta<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$.

Из общей формулы Г. В. Бадаляна [2] следует, что

$$\omega_n(t,\tau)=\frac{(\tau^\alpha-t^\alpha)^n}{\alpha^n n!} \tag{4}$$

и, следовательно,

$$R_n(s)=\alpha^{n+1}\cdot s\int\limits_0^\infty e^{-s\tau}\,d\tau\int\limits_0^\tau\Phi^{(n+1)}(t^\alpha)\,t^{\alpha-1}\cdot\omega_n(t,\tau)\,dt. \tag{5}$$

Рассмотрим два случая: $\alpha=1$ и $\alpha<1$.

1. Случай $\alpha=1$. Имеем

$$R_n(z)=\frac{z}{n!}\int\limits_0^\infty e^{-z\tau}\,d\tau\int\limits_0^\tau\Phi^{(n+1)}(t)\,(\tau-t)^n\,d\tau.$$

Интегрируя $n+1$ раз по частям, получаем

$$R_n(z)=\frac{1}{z^n}\int\limits_0^\infty e^{-z\tau}\Phi^{(n+1)}(\tau)\,d\tau.$$

В силу условия в) теоремы

$$|R_n(z)|\leqslant\frac{\mu_{n+1}}{|z|^n}\int\limits_0^\infty e^{-(a^{\frac{1}{\alpha}}-\sigma)\tau}\,d\tau=\frac{\mu_{n+1}\,\Gamma\left(a^{\frac{1}{\alpha}}-\sigma\right)}{a^{\frac{1}{\alpha}}-\sigma}.$$

Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{z^k}$ единственным образом определяет именно функцию $f_1(z)$ в области $Rez>a$ и поэтому $f_1(z)\equiv f(z)$ при $Rez>a$.

2. Случай $\alpha<1$. Рассмотрим выражение (5) для тех значений $n\geqslant n_0$, для которых $[\alpha n]<n-1$. Совершив интегрирование по частям $[\alpha n]$ раз, получим

$$R_n(s)=\frac{\alpha^{n+1}\cdot s}{s^{[\alpha n]}}\int_0^\infty e^{-s\tau}\,d\tau\int_0^\tau \Phi^{(n+1)}(t^\alpha)t^{\alpha-1}dt\frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times\int_{l+C_n}\frac{\prod_{\nu=0}^{[\alpha n]-1}(\zeta+\alpha n-[\alpha n]+\nu+1)\,\tau^{\alpha n-[\alpha n]+\zeta}\cdot t^{-\zeta}}{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\alpha\cdot\nu)}d\zeta.$$

Оценим величину $\dfrac{\prod_{\nu=0}^{[\alpha n]-1}(\zeta+\alpha n-[\alpha n]+\nu+1)}{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\alpha\cdot\nu)}$ на контуре $l+C_n$

$$\left|\prod_{\nu=0}^{[\alpha n]-1}(\zeta+\alpha n-[\alpha n]+\nu+1)\right|<(1+\alpha\cdot n)^{[\alpha n]},$$

$$\left|\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\alpha\cdot\nu)\right|=\left|\prod_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(\zeta+\alpha\cdot\nu)\right|\cdot\left|\prod_{\nu=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}(\zeta+\alpha\cdot\nu)\right|>$$

$$>\frac{\alpha}{2}\cdot\alpha^{\left[\frac{n}{2}\right]}\cdot\left[\frac{n}{2}\right]!\,\alpha^{n-\left[\frac{n}{2}\right]}\cdot\left[\frac{n}{2}\right]!=\frac{\alpha^{n+1}}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2$$

и, значит,

$$\left|\frac{\prod_{\nu=0}^{[\alpha n]-1}(\zeta+\alpha n-[\alpha n]+\nu+1)}{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\alpha\cdot\nu)}\right|<\frac{2(1+\alpha n)^{\alpha n}}{\alpha^{n+1}\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2}\text{ при }\zeta\in l+C_n.$$

Представим $R_n(s)$ в виде суммы двух слагаемых

$$R_n(s)=\frac{\alpha^{n+1}\cdot s}{s^{[\alpha n]}}\int_0^\infty e^{-s\tau}d\tau\int_0^\tau\Phi^{(n+1)}(t^\alpha)t^{\alpha-1}\,dt\,\frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times\int_{C_n}\frac{\prod_{\nu=0}^{[\alpha n]-1}(\zeta+\alpha n-[\alpha n]+\nu+1)\,\tau^{\alpha n-[\alpha n]+\zeta}t^{-\zeta}d\zeta}{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\alpha\cdot\nu)}+$$

$$+\frac{\alpha^{n+1}\cdot s}{s^{[\alpha n]}}\int_0^\infty e^{-s\tau}\tau^{\frac{\alpha}{2}}d\tau\int_0^\tau\Phi^{(n+1)}(t^\alpha)\,t^{\frac{\alpha}{2}-1}\,dt\,\frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times\int_l\frac{\prod_{\nu=0}^{[\alpha n]-1}(\zeta+\alpha n-[\alpha n]+\nu+1)\tau^{\alpha n-[\alpha n]+\zeta-\frac{\alpha}{2}}t^{-\zeta+\frac{\alpha}{2}}}{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\alpha\cdot\nu)}d\zeta. \qquad (6)$$

Заметив еще, что

$$\left|\left(\frac{t}{\tau}\right)^{-\zeta}\right| \leqslant 1 \text{ при } \zeta \in C_n$$

и

$$\left|\left(\frac{t}{\tau}\right)^{-\zeta+\frac{\alpha}{2}}\right| \leqslant 1 \quad \text{при } \zeta \in l,$$

будем иметь:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l}\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{[\alpha n]-1}(\zeta+\alpha n-[\alpha n]+\nu+1)\tau^{\zeta-\frac{\alpha}{2}}\cdot t^{-\zeta+\frac{\alpha}{2}}}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\alpha\cdot\nu)}d\zeta\right| < \frac{(1+\alpha n)^{\alpha n}}{\alpha^{n}\cdot\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^{2}}$$

и

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{[\alpha n]-1}(\zeta+\alpha n-[\alpha n]+\nu+1)\tau^{\zeta}\cdot t^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\alpha.\nu)}\right| < \frac{(1+\alpha n)^{\alpha n}}{\alpha^{n+1}\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^{2}}$$

при $n \geqslant n_o$.

Из формулы (6) окончательно получим

$$\left|R_n(s)\right| < \frac{\alpha\cdot\mu_{n+1}}{|s|^{[\alpha n]-1}}\cdot\frac{(1+\alpha n)^{\alpha n}}{\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^{2}}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-a^{\frac{1}{\alpha}}\tau}d\tau\int\limits_{0}^{\tau}e^{at}\cdot t^{\alpha-1}dt+$$

$$+\frac{\mu_{n+1}}{|s|^{[\alpha n]-1}}\cdot\frac{(1+\alpha n)^{\alpha n}}{\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^{2}}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-a^{\frac{1}{\alpha}}\tau}\tau^{\frac{\alpha}{2}}d\tau\int\limits_{0}^{\tau}e^{at}\cdot t^{\frac{\alpha}{2}-1}dt<$$

$$< A^{n}\cdot\mu_{n+1}\cdot\frac{\Gamma[\alpha(n+1)+1]}{(n+1)!\,|s|^{[\alpha n]-1}},$$

где A—некоторая достаточно большая константа.

Так как последовательность $\mu_n\frac{\Gamma(\alpha n+1)}{n!}$ удовлетворяет условию C_* Карлемана, то из последнего неравенства следует, что $f_1(z^{\frac{1}{\alpha}})=f(z)$ при $z \in Re z^{\frac{1}{\alpha}} > a^{\frac{1}{\alpha}}$.

Этим доказательство теоремы завершается.

Т е о р е м а 2. **Если выполнены первые два условия теоремы 1 при $\alpha>1$ и, кроме того**

в) **элементом** $\Phi^{(n)}(o)=\frac{a_n\cdot n!}{\Gamma(\alpha n+1)}$, $n=0, 1, 2,\ldots$ **определяется квазианалитическая функция** $\Phi(t)$ **на** $[0, \infty)$, **причем**

$$|\Phi^{(n)}(t)| \leqslant \mu_n e^{\sigma t^{\frac{1}{\alpha}}} \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant 1$$

и $|\Phi^{(n)}(t)| \cdot t^n \leqslant \mu_n e^{\sigma t^{\frac{1}{\alpha}}}$ при $t \geqslant 1$, $a^{\frac{1}{\alpha}} > \sigma$,

г) числа $m_n^* = n^{\alpha n} \sum\limits_{k=n}^{[\alpha(n-1)]} \dfrac{\mu_{k+1}}{n^k}$ **удовлетворяют условию** C_α **Карлемана, то тогда вновь**

$$f(z) = z^{\frac{1}{\alpha}} \int\limits_0^\infty e^{-z^{\frac{1}{\alpha}} t} \cdot \Phi(t^\alpha) dt \text{ при } Re z^{\frac{1}{\alpha}} > a^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Доказательство. Составим опять функцию

$$f_1(z^{\frac{1}{\alpha}}) = z^{\frac{1}{\alpha}} \int\limits_0^\infty e^{-z^{\frac{1}{\alpha}} \tau} \cdot \Phi(\tau^\alpha)\, d\tau$$

и докажем, что $f_1(z^{\frac{1}{\alpha}}) \equiv f(z)$ при $Re z^{\frac{1}{\alpha}} > a^{\frac{1}{\alpha}}$.

После замены переменной, формула (2) примет вид

$$R_n(s) = \frac{s}{\alpha \cdot n!} \int\limits_0^\infty e^{-su^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot u^{\frac{1}{\alpha}-1} du \int\limits_0^u \Phi^{(n+1)}(u)(u-x)^n dx, \quad s = z^{\frac{1}{\alpha}}$$

мы будем иметь

$$f_1(s) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{s^{\alpha \cdot k}} + R_n(s). \tag{7}$$

Из формулы (4) следует

$$R_n(s) = \frac{s}{\alpha} \int\limits_0^\infty e^{-su^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot u^{\frac{1}{\alpha}-1} du \int\limits_0^u \Phi^{(n+1)}(x) dx \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l+C_n} \frac{u^{n+\zeta} \cdot x^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^n (\zeta+\nu)}, \tag{8}$$

где контур интегрирования $l + C_n$ состоит из полуокружности $l: z = \varepsilon e^{i\varphi}$, $|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{\alpha} + \varepsilon < 1$, а C_n является частью окружностей $z + \frac{1+n}{2} = \frac{1+n}{2} e^{i\vartheta}$ и $z = \varepsilon e^{i\varphi}$, определенной соответственно неравенствами $|\vartheta| \leqslant \vartheta_0$, $\frac{\pi}{2} \leqslant |\varphi| \leqslant \varphi_0$. ϑ_0 и φ_0 суть единственные корни уравнения $-\frac{1+n}{2} + \frac{1+n}{2} e^{i\vartheta} = \varepsilon e^{i\varphi}$ при условии $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$.

Докажем теперь справедливость формулы

$$R_n(s)=\frac{\alpha^{[\alpha(n-1)]}}{s^{[\alpha(n-1)]}}\int_0^\infty e^{-su^{\frac{1}{\alpha}}}\left\{\sum_{r=0}^{[\alpha(n-1)]-n-1} J_r\,\frac{d_\alpha^{[\alpha(n-1)]-n-r}}{du^{[\alpha(n-1)]-n-r}}\left[\Phi^{(n+1)}(u)\,u^{n-\frac{n+r}{\alpha}}\right]\right\}du+$$

$$+\frac{\alpha^{[\alpha(n-1)]}}{s^{[\alpha(n-1)]}}\int_0^\infty e^{-su^{\frac{1}{\alpha}}}du\int_0^u \Phi^{(n+1)}(x)dx\frac{1}{2\pi i}\int_{l+C_n}\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{[\alpha(n-1)]}\left(n-\frac{\nu}{\alpha}+\zeta\right)u^{n-\frac{[\alpha(n-1)]}{\alpha}+\zeta-1}}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\nu)}\times$$

$$\times\, x^{-\zeta}d\zeta, \tag{9}$$

где

$$J_r=\frac{1}{2\pi i}\int_{l+C_n}\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n+r-1}\left(n-\frac{\nu}{\alpha}+\zeta\right)d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\nu)},\quad r=0,\ 1,\ldots,\ [\alpha(n-1)]-n-1,$$

а функции $\dfrac{d_\alpha^k(fu)}{du^k}$ определяются рекуррентными соотношениями

$$\frac{d_\alpha^0 f(u)}{du^0}=f(u),\quad \frac{d_\alpha^{k+1}f(u)}{du^{k+1}}=\frac{d}{du}\left\{u^{1-\frac{1}{\alpha}}\frac{d_\alpha^k f(u)}{du^k}\right\}.$$

Формула (9) получается последовательным интегрированием по частям

$$R_n(s)=-\int_0^\infty\left\{\int_0^u \Phi^{(n+1)}(x)dx\frac{1}{2\pi i}\int_{l+C_n}\frac{u^{n+\zeta}\cdot x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\nu)}\right\}de^{-su^{\frac{1}{\alpha}}}=$$

$$=\alpha\int_0^\infty e^{-su^{\frac{1}{\alpha}}}\cdot\frac{1}{\alpha}u^{\frac{1}{\alpha}-1}du\int_0^u\Phi^{(n+1)}(x)dx\frac{1}{2\pi i}\int_{l+C_n}\frac{(n+\zeta)\,u^{n-\frac{1}{\alpha}+\zeta}\cdot x^{-\zeta}}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\nu)}d\zeta=$$

$$=-\frac{\alpha}{s}\int_0^\infty\left\{\int_0^u\Phi^{(n+1)}(x)dx\frac{1}{2\pi i}\int_{l+C_n}\frac{(n+\zeta)u^{n-\frac{1}{\alpha}+\zeta}\cdot x^{-\zeta}}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\nu)}d\zeta\right\}de^{-su^{\frac{1}{\alpha}}}=$$

$$=\frac{\alpha}{s}\int_0^\infty e^{-su^{\frac{1}{\alpha}}}\cdot u^{\frac{1}{\alpha}-1}du\int_0^u\Phi^{(n+1)}(x)dx\frac{1}{2\pi i}\int_{l+C_n}\frac{(n+\zeta)\left(n-\frac{1}{\alpha}+\zeta\right)u^{n-\frac{2}{\alpha}+\zeta}\cdot x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\nu)}=$$

$$=\cdots=\frac{\alpha^{n-1}}{s^{n-1}}\int_0^\infty e^{-su^{\frac{1}{\alpha}}}du\int_0^u\Phi^{(n+1)}(x)dx\frac{1}{2\pi i}\int_{l+C_n}\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n-1}\left(n-\frac{\nu}{\alpha}+\zeta\right)u^{n-\frac{n-1}{\alpha}+\zeta-1}\cdot x^{-\zeta}}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\nu)}d\zeta.$$

При дальнейшем интегрировании по частям этим способом уже получатся новые слагаемые. Легко усмотреть, что на $[\alpha(n-1)]-n$ шаге получится формула (9).

Оценим теперь $R_n(s)$, пользуясь ее представлением формулой (9). Для этого сначала оценим $\frac{d_\alpha^m \varphi(u)}{du^m}$, где $\varphi(u)$ дифференцируемая, любое число раз, функция на полуоси $[0, \infty)$.

Докажем, что

$$\left|\frac{d_\alpha^m \varphi(u)}{du^m}\right| \leqslant \sum_{i=0}^{m} C_m^i \cdot m^i \left|\varphi^{(m-i)}(u)\right| \cdot u^{m-i-\frac{m}{\alpha}}. \tag{10}$$

Действительно,

$$\frac{d_\alpha \varphi(u)}{du} = \varphi'(u)\, u^{1-\frac{1}{\alpha}} + \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\varphi(u) u^{-\frac{1}{\alpha}},$$

$$\frac{d_\alpha^2 \varphi(u)}{du^2} = \varphi''(u) u^{2\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)} + \left[2\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)+\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right]\varphi'(u)\, u^{1-\frac{2}{\alpha}} +$$

$$+\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)\varphi(u)\, u^{-\frac{2}{\alpha}},$$

так что

$$\left|\frac{d_\alpha \varphi(u)}{du}\right| < |\varphi'(u)|\, u^{1-\frac{1}{\alpha}} + |\varphi(u)|\, u^{-\frac{1}{\alpha}},$$

$$\left|\frac{d_\alpha^2 \varphi(u)}{du^2}\right| < \sum_{i=0}^{2} C_2^i \cdot 2^i \left|\varphi^{(2-i)}(u)\right| u^{2-i-\frac{2}{\alpha}}.$$

Предположим, что верна формула (10) и докажем ее справедливость при $m+1$.

Действительно,

$$\frac{d_\alpha^m \varphi(u)}{du^m} = \sum_{i=0}^{m} A_m^i \cdot \varphi^{(m-i)}(u) \cdot u^{m-i-\frac{m}{\alpha}}, \quad \text{где} \quad A_m^i \text{ — некоторые}$$

постоянные, и по определению

$$\frac{d_\alpha^{m+1} \varphi(u)}{du^{m+1}} = \frac{d}{du}\left\{u^{1-\frac{1}{\alpha}} \frac{d_\alpha^m \varphi(u)}{du^m}\right\} = \varphi^{(m+1)}(u) \cdot u^{(m+1)\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)} +$$

$$+(m+1)\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\varphi^{(m)}(u)\, u^{m-\frac{m+1}{\alpha}} + \sum_{i=1}^{m} A_m^i \cdot \varphi^{(m+1-i)}(u) \cdot u^{m+1-i-\frac{m+1}{\alpha}} +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left(m+1-i-\frac{m+1}{\alpha}\right)A_m^i\,\varphi^{(m-i)}(u)\,u^{m-i-\frac{m+1}{\alpha}}=$$

$$=\sum_{i=0}^{m+1}A_{m+1}^i\cdot\varphi^{m+1-i}(u)\cdot u^{m+1-i-\frac{m+1}{\alpha}},$$

где

$$A_k^0=1,\ k=0,\ 1,\ 2,\dots,$$

$$A_{m+1}^1=(m+1)\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)+A_m^1,$$

$$A_{m+1}^2=A_m^2+A_m^1\cdot\left(m-\frac{m+1}{\alpha}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A_{m+1}^i=A_m^i+A_m^{i-1}\cdot\left(m+2-i-\frac{m+1}{\alpha}\right), \tag{11}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A_{m+1}^{m+1}=\left(1-\frac{m+1}{\alpha}\right)A_m^m.$$

Из формул (11) получим

$$\left|A_{m+1}^i\right|<m^i\cdot C_m^i+m^{i-1}+(m+1)C_m^{i-1}<$$

$$<\left(C_m^i+C_m^{i-1}\right)(m+1)^i=C_{m+1}^i\cdot(m+1)^i,\quad \left|A_{m+1}^{m+1}\right|<(m+1)^{m+1}.$$

Тем самым формула (10) доказана.

Наконец, для оценки остатка $R_n(s)$ представим его в виде суммы двух слагаемых

$$R_n(s)=\overset{*}{R}_n(s)+\overset{**}{R}_n(s),$$

где

$$\overset{*}{R}_n(s)=\frac{\alpha^{[\alpha(n-1)]}}{s^{[\alpha(n-1)]}}\int_0^\infty e^{-su^{\frac{1}{\alpha}}}\cdot\left\{\sum_{r=0}^{[\alpha(n-1)]-n-1}J_r\cdot\frac{d_\alpha^{[\alpha(n-1)]-n-r}}{du^{[\alpha(n-1)]-n-r}}\left[\Phi^{(n+1)}(u)\cdot u^{n-\frac{n+r}{\alpha}}\right]\right\}du$$

и

$$\overset{**}{R}_n(s)=\frac{\alpha^{[\alpha(n-1)]}}{s^{[\alpha(n-1)]}}\int_0^\infty e^{-su^{\frac{1}{\alpha}}}du\int_0^u\Phi^{(n+1)}(x)\,dx\,\frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times\int_{l+C_n}\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{[\alpha(n-1)]}\left(n-\frac{\nu}{\alpha}+\zeta\right)u^{n-\frac{[\alpha(n-1)]}{\alpha}+\zeta-1}\cdot x^{-\zeta}}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\nu)}\,d\zeta.$$

Согласно формуле (10)

$$\left| \frac{d_\alpha^{[\alpha(n-1)]-n-r}}{du^{[\alpha(n-1)]-n-r}} \left[\Phi^{(n+1)}(u)\, u^{n-\frac{n+r}{\alpha}} \right] \right| <$$

$$< \sum_{i=0}^{[\alpha(n-1)]-n-r} C^i_{[\alpha(n-1)]-n-} \times$$

$$\times([\alpha(n-1)]-n-r)^i \left| \frac{d^{[\alpha(n-1)]-n-r-i}}{du^{[\alpha(n-1)]-n-r-i}} \left\{ \Phi^{(n+1)}(u)\, u^{n-\frac{n+r}{\alpha}} \right\} \right| \times$$

$$\times u^{[\alpha(n-1)]-n-r-i-\frac{[\alpha(n-1)]-n-r}{\alpha}}.$$

Так как

$$\frac{d^{[\alpha(n-1)]-n-r-i}}{du^{[\alpha(n-1)]-n-r-i}} \left[\Phi^{(n+1)}(u)\, u^{n-\frac{n+r}{\alpha}} \right] =$$

$$= \sum_{p=0}^{[\alpha(n-1)]-n-r-i} C^i_{[\alpha(n-1)]-n-r-i} \cdot \Phi^{([\alpha(n-1)]+1-r-i-p)}(u) \cdot \frac{d^p}{du^p} \left(u^{n-\frac{n+r}{\alpha}} \right)$$

$$\frac{d^p}{du^p} \left(u^{n-\frac{n+r}{\alpha}} \right) = \left(n - \frac{n+r}{\alpha} \right) \left(n - 1 - \right.$$

$$\left. - \frac{n+r}{\alpha} \right) \cdots \left(n - p + 1 - \frac{n+r}{\alpha} \right) u^{n-p-\frac{n+r}{\alpha}}$$

и

$$\left| \frac{d^p}{du^p} \left(u^{n-\frac{n+r}{\alpha}} \right) \right| < n^p \cdot u^{n-p-\frac{n+r}{\alpha}},$$

то будем иметь

$$\left| \frac{d^{[\alpha(n-1)]-n-r-i}}{du^{[\alpha(n-1)]-n-r-i}} \left[\Phi^{(n+1)}(u)\, u^{n-\frac{n+r}{\alpha}} \right] \right| <$$

$$< \sum_{p=0}^{[\alpha(n-1)]-n-r-i} C^p_{[\alpha(n-1)]-n-r-i} \cdot n^p \left| \Phi^{([\alpha(n-1)]+1-r-i-p)}(u) \right| \cdot u^{n-p-\frac{n+r}{\alpha}}$$

и, следовательно,

$$\left| \frac{d_\alpha^{[\alpha(n-1)]-n-r}}{du^{[\alpha(n-1)]-n-r}} \left[\Phi^{(n+1)}(u) \cdot u^{n-\frac{n+r}{\alpha}} \right] \right| <$$

$$< \sum_{i=0}^{[\alpha(n-1)]-n-r} C^i_{[\alpha(n-1)]-n-r} \cdot ([\alpha(n-1)]-n-r)^i \sum_{p=0}^{[\alpha(n-1)]-n-r-i} C^p_{[\alpha(n-1)]-n-r-i} \cdot n^p \times$$

$$\times \left| \Phi^{([\alpha(n-1)]+1-r-i-p)}(u) \right| \cdot u^{[\alpha(n-1)]-r-i-p-\frac{[\alpha(n-1)]}{\alpha}}.$$

Далее,

$$\left|\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n+r-1}\left(n-\frac{\nu}{\alpha}+\zeta\right)}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\nu)}\right|<A_1^n\frac{n^{n+r}}{\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2}\quad \text{при } \zeta\in l+C_n,$$

где A_1—некоторая постоянная, не зависящая от n и r, так что

$$|J_r|<A_2^n\cdot n^r.$$

Здесь также A_2—есть некоторая достаточно большая постоянная, не зависящая от n и r.

Используя полученные неравенства для оценки $R_n^*(s)$, можем написать

$$|R_n^*(s)|<\frac{\alpha^{[\alpha(n-1)]}\cdot A_2^n}{|s|^{[\alpha(n-1)]}}\int\limits_0^\infty e^{-a^{\frac{1}{\alpha}}u^{\frac{1}{\alpha}}}\cdot\left\{\sum_{r=0}^{[\alpha(n-1)]-n-1}n^r\sum_{i=0}^{[\alpha(n-1)]-n-r}C^i_{[\alpha(n-1)]-n-r}\times\right.$$

$$\times([\alpha(n-1)]-n-r)^i\sum_{p=0}^{[\alpha(n-1)]-n-r-i}C^p_{[\alpha(n-1)]-n-r-i}n^p|\Phi^{[\alpha(n-1)]+1-r-i-p)}(u)|\times$$

$$\left.\times u^{[\alpha(n-1)]-r-i-p-\frac{[\alpha(n-1)]}{\alpha}}\right\}du.$$

Дважды использовав формулу

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{i=0}^{p}a_{i,p}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{p=0}^{n-i}a_{i,p+i}\ ,$$

получим

$$|R_n^*(s)|<\frac{\alpha^{[\alpha(n-1)]}A_2^n}{|s|^{[\alpha(n-1)]}}\int\limits_0^\infty e^{-a^{\frac{1}{\alpha}}u^{\frac{1}{\alpha}}}\cdot\left\{\sum_{p=0}^{[\alpha(n-1)]-n-1}\left(\sum_{r=0}^{p}\sum_{i=0}^{p-r}C^i_{[\alpha(n-1)]-n-r}\times\right.\right.$$

$$\times C^{p-r-i}_{[\alpha(n-1)]-n-r-i}\cdot([\alpha(n-1)]-n-r)^i\cdot n^{p-i}\cdot|\Phi^{([\alpha(n-1)]+1-p)}(u)|\times$$

$$\left.\times u^{[\alpha(n-1)]-p-\frac{[\alpha(n-1)]}{\alpha}}\right\}du.$$

Оценим сумму

$$b_{n,p}=\sum_{r=0}^{p}\sum_{i=0}^{p-r}C^i_{[\alpha(n-1)]-n-r}\cdot C^{p-r-i}_{[\alpha(n-1)]-n-r-i}\cdot([\alpha(n-1)]-n-r)^i\cdot n^{p-i},$$

$$b_{n,p}=n^p\sum_{r=0}^{p}C^{p-r}_{[\alpha(n-1)]-n-r}\sum_{i=0}^{p-r}C^i_{p-r}\left(\frac{[\alpha(n-1)]-n-r}{n}\right)^i=$$

$$=n^p \sum_{r=0}^{p} C^{p-r}_{[\alpha(n-1)]-n-r}\left(1+\frac{[\alpha(n-1)]-n-r}{n}\right)^{p-r} < B^n \cdot n^p,$$

где B—постоянная, не зависящая от n и p.

Таким образом, имеем

$$|R_n^*(s)| < \frac{A_3^n}{|s|^{[\alpha(n-1)]}} \int_0^\infty e^{-a^{\frac{1}{\alpha}} u^{\frac{1}{\alpha}}} \left\{ \sum_{p=0}^{[\alpha(n-1)]-n-1} n^p \times \right.$$

$$\left. \times \; \Phi^{([\alpha(n-1)]+1-p)}(u) \, | \, u^{[\alpha(n-1)]-p-\frac{[\alpha(n-1)]}{\alpha}} \right\} du.$$

Окончательно получим

$$|R_n^*(s)| < \frac{A_3^n}{|s|^{[\alpha(n-1)]}} \left(\sum_{p=0}^{[\alpha(n-1)]-n-1} n^p \mu_{[\alpha(n-1)]+1-p} \right) \int_0^\infty e^{-(a^{\frac{1}{\alpha}}-\varepsilon) u^{\frac{1}{\alpha}}} du =$$

$$= \frac{A_3^n \cdot n^{[\alpha(n-1)]}}{|s|^{[\alpha(n-1)]}} \sum_{k=n+1}^{[\alpha(n-1)]} \frac{\mu_{k+1}}{n^k} \int_0^\infty e^{-(a^{\frac{1}{\alpha}}-\varepsilon) u^{\frac{1}{\alpha}}} du < \frac{C^n \cdot m_n^*}{|s|^{[\alpha(n-1)]}},$$

где C—некоторая достаточно большая постоянная.

Чтобы оценить $R_n^{**}(s)$, получим оценки для интегралов

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\prod_{\nu=0}^{[\alpha(n-1)]} \left(n - \frac{\nu}{\alpha} + \zeta\right) u^{n-\frac{[\alpha(n-1)]}{\alpha}+\zeta-1} \cdot x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^{n} (\zeta+\nu)},$$

$$J_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\prod_{\nu=0}^{[\alpha(n-1)]} \left(n - \frac{\nu}{\alpha} + \zeta\right) u^{n-\frac{[\alpha(n-1)]}{\alpha}+\zeta-1} \cdot x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^{n} (\zeta+\nu)}.$$

Заметив, что

$$\left| \left(\frac{x}{u}\right)^{-\zeta} \right| \leqslant 1 \qquad \text{при } \zeta \in C_n$$

и

$$\left| \left(\frac{x}{u}\right)^{-\zeta} \right| \leqslant \left(\frac{x}{u}\right)^{-\varepsilon} \qquad \text{при } \zeta \in l,$$

будем иметь

$$|J_1| < B_1^n \cdot n^{\alpha n - n} \cdot u^{n-\frac{[\alpha(n-1)]}{\alpha}-1+\varepsilon} \cdot x^{-\varepsilon},$$

$$|J_2| < B_2^n \cdot n^{\alpha n - n} \cdot u^{n-\frac{[\alpha(n-1)]}{\alpha}-1}.$$

Значит,

$$|R_n^{**}(s)| < \frac{\alpha^{\varkappa n}\cdot B_1^n\cdot B^{\varkappa n-n}}{|s|^{[\varkappa(n-1)]}}\int\limits_0^\infty e^{-a^{\frac{1}{\varkappa}}u^{\frac{1}{\varkappa}}}\cdot u^{n-\frac{[\varkappa(n-1)]}{\varkappa}+\varkappa-1}du\int\limits_0^u\Phi^{(n+1)}(x)\,x^{-\varkappa}dx+$$

$$+\frac{\alpha^{\varkappa n}\,B_2^n\cdot n^{\varkappa n-n}}{|s|^{[\varkappa(n-1)]}}\int\limits_0^\infty e^{-a^{\frac{1}{\varkappa}}u^{\frac{1}{\varkappa}}}\cdot u^{n-\frac{[\varkappa(n-1)]}{\varkappa}-1}du\int\limits_0^u\Phi^{(n+1)}(x)\,dx <$$

$$<\frac{B_3^n\cdot n^{\varkappa n-n}}{|s|^{[\varkappa(n-1)]}}\cdot\mu_{n+1}\left\{\int\limits_0^\infty e^{-a^{\frac{1}{\varkappa}}u^{\frac{1}{\varkappa}}}\cdot u^{n-\frac{[\varkappa(n-1)]}{\varkappa}+\varkappa-1}du\int\limits_0^u e^{\varkappa x^{\frac{1}{\varkappa}}}\cdot x^{-\varkappa}dx+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^\infty e^{-a^{\frac{1}{\varkappa}}u^{\frac{1}{\varkappa}}}\cdot u^{n-\frac{[\varkappa(n-1)]}{\varkappa}-1}du\int\limits_0^u e^{\varkappa x^{\frac{1}{\varkappa}}}dx\right\},\quad B_3=\alpha^{\varkappa n}max(B_1,\ B_2).$$

Легко доказать, что

$$|R_n^{**}(s)| < \frac{B_4^n\cdot n^{\varkappa n-n}\cdot\mu_{n+1}}{|s|^{[\varkappa(n-1)]}},$$

где B_4—некоторое достаточно большое число.

Сопоставляя эту последнюю оценку с оценкой $R_n^{*}(s)$, наконец, будем иметь

$$|R_n(s)| < |R_n^{*}(s)| + |R_n^{**}(s)| < \frac{A^n\cdot m_n^{*}}{|s|^{[\varkappa(n-1)]}},$$

где $A=C+B_4$.

Полученная оценка и завершает доказательство теоремы.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 29 VIII 1959

Ս. Հ. Մինասյան

ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՎԵՐԱԿԱՆԳՆՈՒՄԸ ՆՐԱ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ՇԱՐՔՈՎ $Re z^{\frac{1}{\varkappa}} > a^{\frac{1}{\varkappa}}$ ՏԻՐՈՒՅԹՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիցուք $f(z)$ անալիտիկ ֆունկցիան $Re z^{\frac{1}{\varkappa}} > a^{\frac{1}{\varkappa}}$ տիրույթում ունի $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{z^k}$ ասիմպտոտիկ շարքը $\{m_n\}$ հաջորդականության միջոցով, և այդ շարքը միակ ձևով է որոշում այդ ֆունկցիան նշված տիրույթում։

Ապացուցված է, որ եթե $\Phi(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{\Gamma(\alpha k+1)}t^k$ *ֆունկցիան ա*

նալիտիկ է $[0, \infty)$ *կիսառանցքի վրա, ապա*

$$f(z)=z^{\frac{1}{\alpha}}\int\limits_0^{\infty}e^{-z^{\frac{1}{\alpha}}t}\cdot\Phi(t^{\alpha})dt, \quad Re z^{\frac{1}{\alpha}}>a^{\frac{1}{\alpha}}. \qquad (Ա$$

Այս աշխատության նպատակն է (Ա) ներկայացումն ունեցող անալիտի
ֆունկցիաների դասն ընդլայնել։

Դիտարկվում է երկու դեպք՝ $\alpha\leq 1$, $\alpha>1$։

Աշխատությունում $\Phi(t)$ *ֆունկցիան ենթադրվում է քվազիանալիտիկ*
$\Phi(t)$ *ֆունկցիայի և նրա ածանցյալների վրա աճի որոշ պայմաններ դնելո*
դեպքում ապացուցվում է (Ա) բանաձևի իրավացիությունը։

ЛИТЕРАТУРА

1. Salinas Baltasar R. Los problemas de unicidad en la teoria de series asintoticas
Expresion de funciones semi-analiticas mediante los algoritmos de Borel y Stieltjes
Rev. Real acad. cienc. exact., fis. y natur., Madrid, 1956, 50, № 2, 191—227.

2. Бадалян Г. В. Обобщение ряда Тейлора и некоторые вопросы теории аналити-
ческих и квази-аналитических функций. Известия АН Арм. ССР, том
VI, 5—6, 1953.