ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 2, 1960 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

С. Е. Карапетян

Конфигурация L

Введение

В [3] было получено уравнение квадрики Ли для всех линейчатых поверхностей ($\omega_2^4=\lambda\omega_1^3$) конгруэнции. В [4], [10], [11] были рассмотрены **гармонические линейчатые поверхности фокальных поверхностей конгруэнции.** Как известно, на первой фокальной поверхности ее **гармоническим линейчатым поверхностям** соответствует сопряженная сеть ($\alpha(\omega_1^3)^2-\gamma(\omega_2^4)^2=0$), обе касательные которой составляют гармоническую четверку с двумя касательными первой фокальной сети. В соответствии с этим вышеупомянутая сопряженная сеть называется **гармонической сетью** первой фокальной поверхности (A_1).

Гармоническую сеть поверхности (A_1) обозначим через Γ_1. Гармонические линейчатые поверхности конгруэнции $(A_1 A_2)$, соответствующие сети Γ_1, обозначаются той же буквой Γ_1. Через Γ_2 обозначим гармоническую сеть фокальной поверхности (A_2) и гармонические линейчатые поверхности конгруэнции $(A_2 A_1)$, соответствующие этой сети.

В настоящей работе применяется метод внешних форм Картана [1]. В § 1 излагается аналитический аппарат (см. [2] стр. 344—356).

В § 2 доказывается, что четыре плоскости одного пучка, а именно: две фокальные плоскости конгруэнции и две касательные плоскости произвольных двух линейчатых поверхностей конгруэнции (с общей точкой касания), составляют гармоническую четверку тогда и только тогда, когда эти линейчатые поверхности сопряжены в смысле Саниа. Как следствие, получается, что как поверхности Γ_1, так и поверхности Γ_2, сопряжены в этом смысле.

Сложное отношение касательных плоскостей четырех поверхностей Γ_1 и Γ_2 не меняется, когда общая точка касания двигается на луче конгруэнции. Это отношение равняется -1 тогда и только тогда, когда конгруэнция есть V. Поверхности Γ_1 и Γ_2 совпадают только при W конгруэнции, и наоборот.

Как известно, (A_1) является общей фокальной поверхностью двух конгруэнций последовательности Лапласа. Линейчатые поверхности, принадлежащие другой конгруэнции последовательности и соответствующие линиям Γ_1, обозначаются через Γ_1'. Аналогичные линейчатые поверхности, полученные на стороне фокальной поверхности (A_2), обозначим через Γ_2'.

В § 3 получены квадрики Ли для поверхностей Γ_1, Γ_2, Γ_1' и Γ_2'; мы их обозначим соответственно теми же буквами.

В §§ 3 и 4 даются геометрические характеристики двух сопряженных (в смысле Саниа) линейчатых поверхностей конгруэнции. Первая публикация одной из этих характеристик принадлежит Р. Н. Щербакову [9].

В работе [3] доказывается, что обе касательные прямые к фокальной сети поверхности (A_1) являются одновременно образующими для всех четырех квадрик Γ_1 и Γ_1'.

Если одна пара соответствующих квадрик Γ_1 и Γ_1' имеет общую касательную плоскость вдоль луча данной конгруэнции, то она имеет общую касательную плоскость вдоль луча последующей конгруэнции последовательности Лапласа (это условие характеризуется инвариантным уравнением (25)). Если каждая пара соответствующих квадрик из Γ_1 и Γ_1' удовлетворяет этому условию, то (A_1) есть поверхность второго порядка и наоборот.

В § 5 рассматривается случай, когда в каждой паре соответствующие квадрики из Γ_1 и Γ_1' совпадают (инвариантные уравнения (33)). В этом случае получаем: 1) последовательность, порождаемая конгруэнцией $(A_1\ A_2)$, есть R последовательность; 2) каждая пара соответствующих квардик из Γ_2 и Γ_2' (и следовательно для каждой фокальной поверхности последовательности Лапласа) совпадает; 3) все фокальные поверхности последовательности являются поверхностями второго порядка; 4) такая конфигурация (для краткости обозначим ее через L) зависит только от десяти произвольных постоянных.

В § 6 рассматриваются новые свойства конфигурации L. Доказывается, что последовательность Лапласа замкнута и образует T конфигурацию. Доказывается, что (при совмещении A_3 и A_4 с третьей и четвертой вершинами конфигурации T) поверхность второго порядка (A_1) совпадает с поверхностью (A_4), а поверхность (A_2) — с поверхностью (A_3). Следовательно, конфигурация L образована из двух поверхностей второго порядка. Диагонали $A_1\ A_4$ и $A_2\ A_3$ сопряжены относительно этих двух поверхностей одновременно и описывают одну линейную конгруэнцию. Каждая директриса этой линейной конгруэнции пересекается со всеми касательными одной серии сетей Γ_1 и Γ_2.

§ 1. Тетраэдр 1-го порядка конгруэнции

В этом параграфе дается основной аналитический аппарат, т. е. строится тетраэдр 1-го порядка конгруэнции и рассматриваются дифференциальные окрестности до 5-го порядка.

Инфинитезимальное перемещение тетраэдра $\{A_i\}$ в проективном пространстве определяется следующей системой дифференциальных уравнений

$$dA_i = \omega_i^k A_k \quad i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{1}$$

где ω_i^k — линейные дифференциальные формы, связанные структурными уравнениями проективного пространства

$$D\omega_i^k = [\omega_i^j\ \omega_j^k]. \tag{2}$$

Семейство тетраэдров первого порядка $\{A_i\}$ выделяется дифференциальными уравнениями

$$\omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0. \tag{3}$$

Дифференцируя эти уравнения внешним образом, получим с помощью уравнений структуры (2) два квадратичных уравнения

$$[\omega_1^2\ \omega_2^4] + [\omega_1^3\ \omega_3^4] = 0, \quad [\omega_2^1\ \omega_1^3] + [\omega_2^4\ \omega_4^3] = 0. \tag{4}$$

Развертывая их в линейные уравнения с помощью леммы Картана, получим

$$\begin{aligned} \omega_3^4 &= \alpha\omega_1^3 - \beta\omega_2^4, & \omega_2^1 &= \gamma'\omega_1^3 + \beta'\omega_2^4, \\ \omega_1^2 &= \beta\omega_1^3 + \gamma\omega_2^4, & \omega_4^3 &= -\beta'\omega_1^3 + \alpha'\omega_2^4. \end{aligned} \tag{5}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (5), получим

$$\begin{aligned} \alpha[\Delta\alpha\omega_1^3] - [\Delta\beta\omega_2^4] &= 0, & \gamma'[\Delta\gamma'\omega_1^3] + [\Delta\beta'\omega_2^4] &= 0. \\ [\Delta\beta\omega_1^3] + \gamma[\Delta\gamma\omega_2^4] &= 0, & -[\Delta\beta'\omega_1^3] + \alpha'[\Delta\alpha'\omega_2^4] &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Развертывая квадратичные уравнения (6) по лемме Картана, будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \alpha_1\omega_1^3 - \beta_1\omega_2^4, & \Delta\gamma' &= \gamma_1'\omega_1^3 + \beta_1'\omega_2^4, \\ \Delta\beta &= \alpha\beta_1\omega_1^3 + \gamma\beta_2\omega_2^4, & \Delta\beta' &= \gamma'\beta_1'\omega_1^3 + \alpha'\beta_2'\omega_2^4. \\ \Delta\gamma &= \beta_2\omega_1^3 + \gamma_2\omega_2^4, & \Delta\alpha' &= -\beta_2'\omega_1^3 + \alpha_2'\omega_2^4. \end{aligned} \tag{7}$$

Внешний дифференциал системы (7) приводит к квадратичным уравнениям

$$\begin{aligned} [\Delta\alpha_1\omega_1^3] - [\Delta\beta_1\omega_2^4] &= 0, & [\Delta\gamma_1'\omega_1^3] + [\Delta\beta_1'\omega_2^4] &= 0, \\ \alpha[\Delta\beta_1\omega_1^3] + \gamma[\Delta\beta_2\omega_2^4] &= 0, & \gamma'[\Delta\beta_1'\omega_1^3] + \alpha'[\Delta\beta_2'\omega_2^4] &= 0, \\ [\Delta\beta_2\omega_1^3] + [\Delta\gamma\omega_2^4] &= 0, & -[\Delta\beta_2'\omega_1^3] + [\Delta\alpha_2'\omega_2^4] &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Применение леммы Картана к квадратичным уравнениям второй строки системы (8) дает

$$\begin{aligned} \Delta\beta_1 &= \beta_{11}\omega_1^3 + \gamma\beta_{12}\omega_2^4, & \Delta\beta_2' &= \gamma'\beta_{12}'\omega_1^3 + \beta_{22}'\omega_2^4 \\ \Delta\beta_2 &= \alpha\beta_{12}\omega_1^3 + \beta_{22}\omega_2^4, & \Delta\beta_1' &= \beta_{11}'\omega_1^3 + \alpha'\beta_{12}'\omega_2^4. \end{aligned} \tag{9}$$

Новое дифференцирование системы (9) приводит к уравнениям

$$
\begin{aligned}
&[\Delta\beta_{11}\omega_1^3] + \gamma[\Delta\beta_{12}\omega_2^4] = 0, \qquad &\gamma'[\Delta\beta'_{11}\omega_1^3] + [\Delta\beta'_{22}\omega_2^4] = 0,\\
&\alpha[\Delta\beta_{12}\omega_1^3] + [\Delta\beta_{22}\omega_2^4] = 0, \qquad &[\Delta\beta'\omega_1^3] + \alpha'[\Delta\beta'_{12}\omega_2^4] = 0.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Если закрепить луч конгруэнции, то все главные формы $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, ..., $\Delta\beta'_{12}$ обратятся в нули, при этом закон вариации коэффициентов α, β, ..., β'_{12} определяется формулами (см. [2], стр 344—356)

$$
\begin{aligned}
&\delta\ln\alpha = 2\pi_3^3 - \pi_1^1 - \pi_4^4, \qquad &\delta\beta_2 = \beta_2(\pi_3^3 - \pi_1^1) + \pi_3^1,\\
&\delta\ln\gamma = \pi_1^1 + \pi_4^4 - 2\pi_2^2, \qquad &\delta\gamma_2 = \gamma_2(\pi_4^4 - \pi_2^2) - 3\pi_4^2,\\
&\delta\beta = \beta(\pi_3^3 - \pi_2^2) - \pi_3^2, \qquad &\delta\beta_{11} = \beta_{11}(\pi_3^3 + \pi_4^4 - \pi_1^1 - \pi_2^2),\\
&\delta\alpha_1 = \alpha_1(\pi_3^3 - \pi_1^1) - 3\pi_3^1, \qquad &\delta\beta_{22} = \beta_{22}(\pi_3^3 + \pi_4^4 - \pi_1^1 - \pi_2^2),\\
&\delta\beta_1 = \beta_1(\pi_4^4 - \pi_2^2) - \pi_4^2, \qquad &\delta\beta_{12} = \beta_{12}(\pi_4^4 - \pi_1^1) + \pi_4^1
\end{aligned} \tag{10'}
$$

и аналогичными формулами, полученными из (10') заменой указателей 1, 3 соответственно на 2, 4 и добавлением штрихов к коэффициентам α, β, γ с любыми указателями.

§ 2. Гармоническая сеть и гармонические линейчатые поверхности

Инвариантное уравнение квадрики Ли для линейчатой поверхности $\omega_2^4 = \lambda\omega_1^3$, относительно тетраэдра первого порядка конгруэнции имеет вид [3]

$$
\begin{aligned}
&2\lambda(x^1x^4 - \lambda x^2x^3) - \lambda(\lambda_1 + \lambda\lambda_2)x^3x^4 +\\
&+\lambda(\lambda^2\gamma + 2\lambda\beta - \alpha)x^3x^3 + (\lambda^2\alpha' - 2\lambda\beta' - \gamma')x^4x^4 = 0,
\end{aligned} \tag{11}
$$

где

$$
d\ln\lambda + \omega_1^1 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_3^3 = \lambda_1\omega_1^3 + \lambda_2\omega_2^4. \tag{12}
$$

В заметке [3] было доказано, что две образующие поверхности (11) совпадают с двумя касательными фокальной сети (A_1) тогда и только тогда, когда эта поверхность является квадрикой Ли для линейчатых поверхностей $\alpha(\omega_1^3)^2 - \gamma(\omega_2^4)^2 = 0$.

Соответствующие этим линейчатым поверхностям линии на фокальной поверхности (A_1) являются сопряженными линиями. Для доказательства последнего допустим, что ребро A_1A_2 тетраэдра является второй касательной фокальной сети (A_1), т. е. допустим, что $\beta = 0$. Тогда с помощью уравнения $dA_1 = \omega_1^1A_1 + \omega_1^2A_2 + \omega_1^3A_3$ мы покажем, что касательные к линиям $\alpha(\omega_1^3)^2 - \gamma(\omega_2^4)^2 = 0$ и асимптотическим линиям $\alpha(\omega_1^3)^2 + \gamma(\omega_2^4)^2 = 0$ пересекаются с прямой A_2A_3 в четырех точках $A_3 \pm \sqrt{\alpha\gamma}\,A_2$, $A_3 \pm \sqrt{-\alpha\gamma}\,A_2$. Сложное отношение этих четырех точек напишется в виде

$$
\begin{aligned}
&(A_3 + \sqrt{\alpha\gamma}\,A_2,\ A_3 - \sqrt{\alpha\gamma}\,A_2,\ A_3 + \sqrt{-\alpha\gamma}\,A_2,\ A_3 - \sqrt{-\alpha\gamma}\,A_2) =\\
&= (\sqrt{-\alpha\gamma} - \sqrt{\alpha\gamma})^2 : (\sqrt{\alpha\gamma} + \sqrt{-\alpha\gamma})^2 = -1.
\end{aligned}
$$

Следовательно, касательные к асимптотическим линиям гармонически разделяют касательные к линиям $\alpha(\omega_1^3)^2-\gamma(\omega_2^4)^2=0$, т. е. последние линии на поверхности (A_1) образуют сопряженную сеть.

Теперь докажем, что **касательные этой сопряженной сети гармонически разделяют касательные фокальной сети** (A_1). Действительно, для тетраэдра $\beta=0$ прямые A_1A_2 и A_1A_3 совпадают с фокальными касательными и сложное отношение четырех точек $(A_1, A_3, A_3+\sqrt{\alpha\gamma}A_2, A_3-\sqrt{\alpha\gamma}A_2)$ тоже равняется -1. Имея в виду эти два свойства линий $\alpha(\omega_1^3)^2-\gamma(\omega_2^4)^2=0$, мы их в дальнейшем назовем **гармонической сетью фокальной поверхности** (A_1), а соответствующие им линейчатые поверхности — **гармоническими линейчатыми поверхностями.**

Касательная плоскость поверхности (11) вдоль луча A_1A_2 имеет уравнение

$$x^1x_4-\lambda x^2x_3=0, \tag{13}$$

где x_i являются координатами текущей точки плоскости, а x^1, x^2 — координатами точки касания. Если через эту точку касания мы проведем еще одну касательную плоскость к любой другой линейчатой поверхности ($\omega_2^4=\lambda'\omega_1^3$), то мы будем иметь четыре плоскости, принадлежащие одному пучку, а именно: эти две касательные плоскости и две фокальные плоскости конгруэнции. **Сложное отношение этих плоскостей равняется $\lambda:\lambda'$ и, следовательно, не зависит от точки касания.** Рассмотренные плоскости составляют гармоническую четверку, если $\lambda=-\lambda'$, и поверхности $\omega_2^4=\lambda\omega_1^3$ и $\omega_2^4=-\lambda\omega_1^3$ будут сопряжены в смысле Санна ([5], стр. 153). Так как гармонические линейчатые поверхности определяются уравнениями $\alpha(\omega_1^3)^2-\gamma(\omega_2^4)^2=0$ $(\lambda=-\lambda')$, то **касательные плоскости к гармоническим линейчатым поверхностям гармонически разделяют фокальные плоскости конгруэнции** Сложное отношение четырех плоскостей одного пучка, именно двух касательных плоскостей к гармоническим линейчатым поверхностям одной фокальной поверхности, и двух касательных плоскостей к гармоническим линейчатым поверхностям другой фокальной поверхности, равно инвариантному выражению $(\sqrt{\gamma\gamma'}-\sqrt{\alpha\alpha'})^2:(\sqrt{\gamma\gamma'}+\sqrt{\alpha\alpha'})^2$. Последнее сложное отношение равняется -1 тогда и только тогда, когда выполняется условие $\alpha\alpha'+\gamma\gamma'=0$. Итак, **касательные плоскости к четырем гармоническим линейчатым поверхностям конгруэнции составляют гармоническую четверку тогда и только тогда, когда конгруэнция является конгруэнцией** *V*.

Нетрудно заметить, что для **конгруэнций** *V*, **и только для них, асимптотическим линиям одной фокальной поверхности соответствует гармоническая сеть другой фокальной поверхности.** Также можно заметить, что **для конгруэнций** *W*, **и только для них, гармонические сети в обеих фокальных поверхностях соответствуют друг другу.**

§ 3. Квадрики Ли для гармонических линейчатых поверхностей

Найдем уравнение квадрики Ли для гармонических линейчатых поверхностей первой фокальной поверхности. Уравнение этих линейчатых поверхностей, как известно, пишется в виде $\sqrt{\alpha}\,\omega_1^3=\mathscr{E}\sqrt{\gamma}\,\omega_2^4$ ($\mathscr{E}=\pm 1$), следовательно,

$$\lambda=\mathscr{E}\sqrt{\alpha}:\sqrt{\gamma}. \tag{14}$$

Дифференцируя (обычным образом) уравнение (14), получим

$$d\ln\lambda+\omega_1^1+\omega_4^4-\omega_2^2-\omega_3^3=\frac{\Delta\alpha-\Delta\gamma}{2}.$$

Внося в последнее уравнение значения $\Delta\alpha$ и $\Delta\gamma$ из уравнений (7), в силу уравнения (12) получим

$$\lambda_1=\frac{\alpha_1-\beta_2}{2},\quad \lambda_2=-\frac{\beta_1+\gamma_2}{2}. \tag{15}$$

После подстановки значений λ, λ_1 и λ_2 в уравнение (11), мы получим уравнение квадрики Ли для гармонических линейчатых поверхностей первой фокальной поверхности конгруэнции. Оно будет иметь вид

$$\begin{gathered}2\alpha x^2x^3-2\mathscr{E}\sqrt{\alpha\gamma}\,x^1x^4+\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\left[\mathscr{E}\sqrt{\gamma}\,(\alpha_1-\beta_2)-\sqrt{\alpha}\,(\gamma_2+\beta_1)\right]x^3x^4-\\-(\alpha\alpha'-\gamma\gamma'-2\mathscr{E}\beta'\sqrt{\alpha\gamma})\,x^4x^4-2\alpha\beta x^3x^3=0.\end{gathered} \tag{16}$$

Проделав те же выкладки для второй фокальной поверхности, получим уравнение квадрики Ли гармонических линейчатых поверхностей ($\sqrt{\gamma'}\,\omega_1^3=\mathscr{E}\sqrt{\alpha'}\,\omega_2^4$)

$$\begin{gathered}2\alpha'x^1x^4-2\mathscr{E}\sqrt{\alpha'\gamma'}\,x^2x^3+\frac{\sqrt{\alpha'}}{2}\left[\mathscr{E}\sqrt{\gamma'}\,(\alpha'_2-\beta'_1)-\sqrt{\alpha'}\,(\gamma'_1+\beta'_2)\right]x^3x^4-\\-(\alpha\alpha'-\gamma\gamma'-2\mathscr{E}\beta\sqrt{\alpha'\gamma'})\,x^3x^3-2\alpha'\beta'x^4x^4=0,\quad (\mathscr{E}=\pm 1).\end{gathered} \tag{17}$$

Это уравнение можно получить также из уравнения (16) с помощью замены указателей 1 и 3 соответственно на 2 и 4, добавляя штрихи к коэффициентам α, β, γ.

Отнесем конгруэнцию $(A_1\,A_2)$ к осям фокальной сети (A_1) (см. [2], стр. 360—361), т. е. допустим, что имеют место уравнения

$$\beta=0,\quad \beta'=0,\quad \beta_1=0,\quad \beta_2=0 \tag{18}$$

и рассмотрим конгруэнцию $(A_1\,A_3)$, которая в силу (18) теперь будет являться первым преобразованием Лапласа для конгруэнции $(A_1\,A_2)$ в направлении от A_2 к A_1. Выбранный тетраэдр является тетраэдром первого порядка для конгруэнции $(A_3\,A_1)$, ибо вершины A_3 и A_1 — фокусы луча, а грани $A_3\,A_1\,A_4$ и $A_1\,A_3\,A_2$ — фокальные плоскости в силу уравнений (18). Чтобы написать уравнения квадрик Ли гармонических линейчатых поверхностей конгруэнции $(A_3\,A_1)$, мы должны сделать только пересчет. Обозначив новые вершины тетраэдра через B_i, получим компоненты $\overline{\omega}{}_i^k$ для конгруэнции $(A_3\ A_1) = (B_1\ B_2)$ из компонент ω_α^β первоначальной конгруэнции $(A_1\ A_2)$ подстановкой указателей $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (см. [2], стр. 409—411.

$$\begin{array}{llll}
\overline{\omega}{}_1^1 = \omega_3^3, & \overline{\omega}{}_1^2 = \omega_3^1, & \overline{\omega}{}_1^3 = \omega_3^4, & \overline{\omega}{}_1^4 = 0, \\
\overline{\omega}{}_2^1 = \omega_1^3, & \overline{\omega}{}_2^2 = \omega_1^1, & \overline{\omega}{}_2^3 = 0, & \overline{\omega}{}_2^4 = \omega_1^2, \\
\overline{\omega}{}_3^1 = \omega_4^3, & \overline{\omega}{}_3^2 = 0, & \overline{\omega}{}_3^3 = \omega_4^4, & \overline{\omega}{}_3^4 = \omega_4^2, \\
\overline{\omega}{}_4^1 = 0, & \overline{\omega}{}_4^2 = \omega_2^1, & \overline{\omega}{}_4^3 = \omega_2^4, & \overline{\omega}{}_4^4 = \omega_2^2,
\end{array}$$

откуда в силу (18) и (7) следует

$$\begin{gathered}
\overline{\omega}{}_1^3 = \alpha\omega_1^3, \quad \overline{\omega}{}_2^4 = \gamma\omega_2^4, \quad \overline{\omega}{}_2^1 = \frac{1}{\alpha}\,\omega_1^3, \quad \omega_4^3 = \frac{1}{\gamma}\,\omega_2^4, \\
\overline{\omega}{}_1^2 = -\beta_{12}\overline{\omega}{}_1^3 - \frac{\beta_{22}}{\gamma}\overline{\omega}{}_2^4, \quad \overline{\omega}{}_3^4 = \frac{\beta_{11}}{\alpha}\overline{\omega}{}_1^3 + \beta_{12}\overline{\omega}{}_2^4.
\end{gathered} \tag{19}$$

Если обозначим коэффициенты для конгруэнции $(A_3\ A_1)$ с чертой, то из (19) получим

$$\begin{gathered}
\overline{\alpha} = \frac{\beta_{11}}{\alpha}, \quad \overline{\beta} = -\beta_{12}, \quad \overline{\gamma} = -\frac{\beta_{22}}{\gamma}, \quad \overline{\alpha}' = \frac{1}{\gamma}, \quad \overline{\beta}' = 0, \quad \overline{\gamma}' = \frac{1}{\alpha}, \\
\overline{\beta}{}_1' = 0, \quad \overline{\beta}{}_2' = 0.
\end{gathered} \tag{20}$$

Гармоническая сеть фокальной поверхности (A_1) конгруэнции $(A_3\ A_1)$ будет иметь уравнение $\overline{\alpha}'(\overline{\omega}{}_2^1)^2 - \overline{\gamma}'(\overline{\omega}{}_1^3)^2 = 0$. Подставляя в последнее уравнение значения (19) и (20), получим $\gamma(\omega_2^4)^2 - \alpha(\omega_1^3)^2 = 0$, которое показывает, что **две конгруэнции $(A_2\ A_1)$ и $(A_1\ A_3)$ последовательности Лапласа на их общей фокальной поверхности (A_1) имеют общую гармоническую сеть.** Эта теорема справедлива для любой фокальной поверхности последовательности Лапласа.

Уравнение квадрики Ли для гармонических линейчатых поверхностей фокальной поверхности (A_1) конгруэнции $(A_3\ A_1)$ получится из уравнения (17), если в нем указатели преобразовать по закону $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, все коэффициенты написать с чертой и после этого в него внести значения (18) и (20). Окончательно будем иметь

$$\begin{gathered}
2\alpha x^2x^3 - 2\mathscr{E}\sqrt{\alpha\gamma}\,x^1x^4 + \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\left(\alpha_1\sqrt{\gamma} - \mathscr{E}\gamma_2\sqrt{\alpha}\right)x^2x^4 - (\beta_{11} + \beta_{22} + \\
+ 2\mathscr{E}\beta_{12}\sqrt{\alpha\gamma}\,)\,x^4x^4 = 0, \quad (\mathscr{E} = \pm 1).
\end{gathered} \tag{21}$$

§ 4. Квадрики Ли с общими касательными плоскостями

1. Касательная плоскость линейчатой поверхности $\omega_2^4 = \lambda\omega_1^3$ в произвольной точке $F = x^1A_1 + x^2A_2$, как известно, определяется уравнением (13). Рассмотрим другую линейчатую поверхность $\omega_2^4 = \lambda'\omega_1^3$. Ее

касательная плоскость в каждой другой точке $F = y^1 A_1 + y^2 A_2$ будет иметь вид $y^1 x_4 - \lambda' y^2 x^3 = 0$. Эти две касательные плоскости совпадают тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{x^2}{x^1} = \frac{\lambda\ y^2}{\lambda'\ y^1}. \tag{22}$$

Это соотношение устанавливает проективное соответствие между двумя рядами точек (F) и (F') с общим носителем $A_1 A_2$. Такое соответствие будет инволюцией только при условии $\lambda = -\lambda'$, которое показывает, что линейчатые поверхности $\omega^4_2 = \lambda \omega^3_1$ и $\omega^4_2 = \lambda' \omega^3_1$ сопряжены. Таким образом, **две сопряженные линейчатые поверхности имеют ∞^1 общих касательных плоскостей и точки касания каждой такой плоскости гармонически разделяются фокусами луча конгруэнции.** И наоборот, **если две линейчатые поверхности обладают общей касательной плоскостью и если точки касания гармонически разделяются фокусами луча конгруэнции, то эти линейчатые поверхности сопряжены.**

2. В силу уравнений (18), ребро $A_1 A_3$ описывает первую конгруэнцию последовательности Лапласа. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что луч $A_1 A_3$ находится на поверхностях (6), и нетрудно заметить, что поверхности (11), удовлетворяющие этому требованию, определяются уравнениями (16).

Напишем уравнения касательных плоскостей для поверхностей (16) и (21) вдоль луча $A_1 A_3$

$$\begin{aligned} &2\sqrt{\alpha}\, x^3 x_2 - \left[2\mathscr{E}\sqrt{\gamma}\, x^1 - \frac{1}{2}(\mathscr{E}\sqrt{\gamma}\,\alpha_1 - \sqrt{\alpha}\,\gamma_2)\, x^3\right] x_4 = 0, \\ &2\sqrt{\alpha}\, x^3 x_2 - 2\mathscr{E}\sqrt{\gamma}\, x^1 x_4 = 0, \quad (\mathscr{E} = \pm 1). \end{aligned} \tag{23}$$

Эти две плоскости совпадают тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\mathscr{E}\sqrt{\gamma}\,\alpha_1 - \sqrt{\alpha}\,\gamma_2 = 0. \tag{24}$$

Уравнение (24) не инвариантно относительно преобразований тетраэдра первого порядка. Выражение $\mathscr{E}\sqrt{\gamma}\,(\alpha_1 + 3\beta_2) - \sqrt{\alpha}\,(\gamma_2 - 3\beta_1)$ в силу условий (18) совпадает с левой частью равенства (24) и является относительным инвариантом преобразований тетраэдра первого порядка*).

Следовательно, равенство

$$\mathscr{E}\sqrt{\gamma}\,(\alpha_1 + 3\beta_2) - \sqrt{\alpha}\,(\gamma_2 - 3\beta_1) = 0, \quad (\mathscr{E} = \pm 1) \tag{25}$$

есть инвариантное условие, в силу которого две плоскости (23) совпадают.

Аналогичное уравнение мы получим, если потребуем совпадения двух касательных плоскостей к гармоническим линейчатым поверхно-

---

*) Так как в силу (10') $\delta\{\mathscr{E}\sqrt{\gamma}\,(\alpha_1 + 3\beta_2) - \sqrt{\alpha}\,(\gamma_2 - 3\beta_1)\} = \{\mathscr{E}\sqrt{\gamma}\,(\alpha_1 + 3\beta_2) - \sqrt{\alpha}\,(\gamma_2 - 3\beta_1)\}\,\theta$, где θ зависит только от π_i^i.

стям $\sqrt{\alpha'}\,\omega_1^3 = \mathscr{E}'\sqrt{\gamma'}\,\omega_2^4$, принадлежащим конгруэнциям $(A_1 A_2)$ и $(A_2 A_4)$. Это уравнение получится из (25) уже известной заменой указателей. Оно имеет вид

$$\mathscr{E}'\sqrt{\gamma'}(\alpha'_2 + 3\beta'_1) - \sqrt{\alpha'}(\gamma'_1 - 3\beta'_2) = 0, \quad (\mathscr{E}' = \pm 1). \tag{26}$$

Уравнения (25) и (26) равносильны (согласно (7)) двум квадратичным уравнениям

$$\begin{aligned} &\mathscr{E}\sqrt{\gamma}\,[\Delta\alpha + 3\Delta\gamma,\ \omega_2^4] - \sqrt{\alpha}\,[\Delta\gamma + 3\Delta\alpha,\ \omega_1^3] = 0, \\ &\mathscr{E}'\sqrt{\gamma'}\,[\Delta\alpha' + 3\Delta\gamma',\ \omega_1^3] - \sqrt{\alpha'}\,[\Delta\gamma' + 3\Delta\alpha',\ \omega_2^4] = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Система дифференциальных уравнений, определяющих нашу конгруэнцию, содержит уравнения Пфаффа (3) и (5) и квадратичные уравнения (6) и (27). Эта система замкнута относительно операции внешнего дифференцирования. Кроме форм (3) и (5), свободно определяемых на первом и втором интегральных элементах, и форм ω_1^3, ω_2^4, линейно независимых на интегральном многообразии, характеристическая система содержит только шесть форм

$$\Delta\alpha,\ \Delta\beta,\ \Delta\gamma,\ \Delta\alpha',\ \Delta\beta',\ \Delta\gamma'. \tag{28}$$

На первом интегральном элементе они произвольны, на втором интегральном элементе формы (28) определяются из шести билинейных уравнений, присоединенных к квадратичным (6) и (27) (система квадратичных уравнений (6) и (27) правильная). Ранг полярной матрицы равен шести и не может быть меньше. Следовательно, цепь интегральных элементов регулярна и система находится в инволюции. Значит такая конгруэнция существует с произволом $S_1 = 6$ шести функций одного аргумента.

3. Как уже известно (§ 2), каждая фокальная поверхность имеет четыре гармонические линейчатые поверхности, две из которых принадлежат одной конгруэнции, две другие — соседней когруэнции последовательности. Последние пары линейчатых поверхностей соответствуют друг другу, ибо определяются одним и тем же уравнением. Касательные плоскости этих двух пар поверхностей вдоль луча $A_1 A_2$ будут определяться уравнениями

$$\begin{aligned} &2\alpha x^2 x_3 - 2\mathscr{E}\sqrt{\alpha\gamma}\,x^1 x_4 = 0, \\ &2\alpha x^2 x_3 - \Big[2\mathscr{E}\sqrt{\alpha\gamma}\,x^1 - \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}(\alpha_1\sqrt{\gamma} - \mathscr{E}\gamma_2\sqrt{\alpha})\,x^2\Big]\,x_4 = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Условие совпадения этих двух плоскостей совпадает с уравнением (24) или инвариантным уравнением (25). Таким образом будем иметь теорему: **Если в последовательности Лапласа две соответствующие гармонические линейчатые поверхности общей фокальной поверхности имеют общую касательную плоскость вдоль луча одной конгруэнции, то они имеют общую касательную плоскость и вдоль соответствующего луча соседней конгруэнции последовательности.**

4. Допустим, что уравнение (25) не зависит от $\mathscr{E}$, тогда получим

$$\alpha_1 + 3\beta_2 = 0, \quad \gamma_2 - 3\beta_1 = 0. \tag{30}$$

Уравнения (30) суть необходимые и достаточные условия того, чтобы поверхность (A_1) была поверхностью второго порядка [2]. Таким образом получаем теорему: **Квадрики Ли каждой гармонической линейчатой поверхности конгруэнции $(A_1 A_2)$ и ее соответствующей гармонической линейчатой поверхности конгруэнции $(A_1 A_3)$ касаются друг друга вдоль луча $A_1 A_2$ (следовательно, согласно предыдущей теореме, и луча $A_1 A_3$) тогда и только тогда, когда поверхность (A_1) есть поверхность второго порядка.**

§ 5. Совпадение квадрик Ли соответствующих гармонических линейчатых поверхностей конгруэнций последовательности Лапласа

Как известно, квадрики Ли гармонических линейчатых поверхностей $(\sqrt{\gamma}\,\omega_2^4 = \mathscr{E}\sqrt{\alpha}\,\omega_1^3)$ конгруэнций $(A_1 A_2)$ и $(A_1 A_3)$ пишутся соответственно уравнениями (16) (где нужно внести значения (18) и (21)). В этом параграфе мы будем искать конгруэнции, для которых эти две квадрики Ли совпадают.

Условия совпадения квадрик (16) и (21) пишутся в виде

$$\sqrt{\alpha}\,\gamma_2 - \mathscr{E}\sqrt{\gamma}\,\alpha_1 = 0, \quad \beta_{11} + \beta_{22} + 2\mathscr{E}\sqrt{\alpha\gamma}\,\beta_{12} - \alpha\alpha' + \gamma\gamma' = 0. \tag{31}$$

Так как два выражения $\sqrt{\alpha}\,(\gamma_2 - \beta_1) - \mathscr{E}\sqrt{\gamma}\,(\alpha_1 + 3\beta_2)$ и $\beta_{11} + \beta_{22} + 2\mathscr{E}\,(\beta_{12} + \beta') - \alpha\alpha' + \gamma\gamma'$ являются относительными инвариантами, т. е. они пропорциональны своим дифференциалам по вторичным переменным (в этом можно убедиться непосредственным подсчетом с помощью формул (10′)), и в силу условий (18) совпадают с левыми частями уравнений (31), то инвариантные (относительно тетраэдра первого порядка) условия совпадения квадрик (16) и (21) будут иметь вид

$$\begin{aligned} &\sqrt{\alpha}\,(\gamma_2 - 3\beta_1) - \mathscr{E}\sqrt{\gamma}\,(\alpha_1 + 3\beta_2) = 0, \\ &\beta_{11} + \beta_{22} + 2\mathscr{E}\,(\beta_{12} + \beta') - \alpha\alpha' + \gamma\gamma' = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Если у каждой соответствующей пары гармонических линейчатых поверхностей конгруэнций $(A_1 A_2)$ и $(A_1 A_3)$ квадрики Ли совпадают, то уравнения (32) не зависят от $\mathscr{E}$ и такая конгруэнция будет характеризоваться инвариантными уравнениями

$$\alpha_1 + 3\beta_2 = 0, \quad \gamma_2 - 3\beta_1 = 0, \quad \beta_{12} + \beta' = 0, \quad \beta_{11} + \beta_{22} = \alpha\alpha' - \gamma\gamma'. \tag{33}$$

Докажем теорему существования такой конгруэнции. Дифференцируя первые два уравнения системы (33), получим

$$\begin{aligned} &\Delta\alpha_1 + 3\Delta\beta_2 = 4\,(\beta_2^2 - \beta\gamma')\,\omega_1^3 - (3\alpha\alpha' + \gamma\gamma')\,\omega_2^4, \\ &\Delta\gamma_2 - 3\Delta\beta_1 = -\,(\alpha\alpha' + 3\gamma\gamma')\,\omega_1^3 + 4\,(\beta_1^2 + \beta\alpha')\,\omega_2^4. \end{aligned} \tag{34}$$

Из этих уравнений определяя $\Delta\alpha_1$ и $\Delta\gamma_2$ и подставляя в первое и третье уравнения первого столбца системы (8), получим

$$3[\Delta\beta_2\omega_1^3]+[\Delta\beta_1\omega_2^4]+(3\alpha\alpha'+\gamma\gamma')[\omega_2^4\omega_1^3]=0,$$
$$[\Delta\beta_2\omega_1^3]+3[\Delta\beta_1\omega_2^4]+(\alpha\alpha'+3\gamma\gamma')[\omega_2^4\omega_1^3]=0,$$

которые непосредственно приведут к двум квадратичным уравнениям

$$[\Delta\beta_2\omega_1^3]+\alpha\alpha'[\omega_2^4\omega_1^3]=0,\quad [\Delta\beta_1\omega_2^4]+\gamma\gamma'[\omega_2^4\omega_1^3]=0. \tag{35}$$

Внося в эти уравнения значения $\Delta\beta_1$ и $\Delta\beta_2$ из системы (9), получим

$$\beta_{11}-\gamma\gamma'=0,\qquad \beta_{22}+\alpha\alpha'=0, \tag{36}$$

откуда, в силу последнего уравнения системы (33), будем иметь

$$\alpha\alpha'-\gamma\gamma'=0. \tag{37}$$

Следовательно, **изучаемая нами конгруэнция входит в класс конгруэнций *W*.**

Здесь мы попутно доказали теорему: **Если общая фокальная поверхность двух последующих конгруэнций последовательности Лапласа есть поверхность второго порядка и одна из этих конгруэнций есть конгруэнция *W*, то другая конгруэнция тоже *W* и, следовательно, последовательность Лапласа является последовательностью *R*** [6].

Действительно, из уравнений (36) и (37) вытекает соотношение

$$\beta_{11}+\beta_{22}=0, \tag{38}$$

которое показывает, что конгруэнция (A_1A_3) тоже есть конгруэнция W ([2], стр. 396–398).

Дифференцируя уравнение (37) получим $\Delta\alpha+\Delta\alpha'+\Delta\gamma+\Delta\gamma'=0$. Если сюда внести значения (7) и приравнять коэффициенты при ω_1^3 и ω_2^4, получим

$$\begin{aligned}\alpha_1-\gamma_1'&=\beta_2+\beta_2',\\ \alpha_2'-\gamma_2&=\beta_1+\beta_1'.\end{aligned} \tag{39}$$

Новое дифференцирование систем (39) и (34) дает

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_2'&=4\Delta\beta_1+\Delta\beta_1'-4\alpha\alpha'\omega_1^3+4(\beta_1^2+\beta\alpha')\omega_2^4,\\ \Delta\gamma_{11}'&=-4\Delta\beta_2-\Delta\beta_2'+4(\beta_2^2-\beta\gamma')\omega_1^3-4\alpha\alpha'\omega_2^4.\end{aligned} \tag{40}$$

Внося эти значения в первое и третье уравнения второго столбца системы (8), в силу (35) будем иметь только одно квадратичное уравнение

$$[\Delta\beta_1'\omega_2^4]-[\Delta\beta_2'\omega_1^3]=0, \tag{41}$$

которое равносильно одному конечному уравнению

$$\beta_{11}'+\beta_{22}'=0. \tag{42}$$

Это уравнение показывает, что преобразование Лапласа в сторону поверхности (A_2) тоже есть конгруэнция W, что и понятно, ибо последовательность Лапласа есть последовательность R.

Дифференцируя конечные уравнения (36) и третье уравнение системы (33), получим

$$\Delta\beta_{11}=(3\beta_1\alpha\beta'+3\beta'_1\beta\gamma'-3\alpha\alpha'\beta_2-\alpha\alpha'\beta'_2)\,\omega_1^3+\alpha\alpha'(\beta_3+\beta'_1)\,\omega_2^4,$$

$$\Delta\beta_{22}=\alpha\alpha'(\beta_2+\beta'_2)\,\omega_1^3-(3\beta_2\beta'\gamma+3\beta'_2\alpha'\beta+3\alpha\alpha'\beta_1+\alpha\alpha'\beta'_1)\,\omega_2^4, \qquad (42')$$

$$\Delta\beta_{12}=-\gamma'(\beta_1+\beta'_1)\,\omega_1^3-\alpha'(\beta_2+\beta'_2)\,\omega_2^4.$$

Внося эти значения в уравнения (10), получим два конечных уравнения

$$\beta_1+\beta'_1=0, \quad \beta_2+\beta'_2=0. \qquad (43)$$

Из уравнений (33), (39) и (43) непосредственно получим условия

$$\alpha'_2+3\beta'_1=0, \quad \gamma'_1-3\beta'_2=0, \qquad (43')$$

которые показывают, что **поверхность (A_2) тоже является поверхностью второго порядка.**

Дифференцируя уравнения (43), получим

$$\Delta\beta_1+\Delta\beta'_1=-(\beta\alpha'+\beta'\gamma)\,\omega_2^4, \quad \Delta\beta_2+\Delta\beta'_2=-(\alpha\beta'+\beta\gamma')\,\omega_1^3. \qquad (44)$$

Из этих уравнений определяя $\Delta\beta'_1$ и $\Delta\beta_2$ и внося в уравнения (8), в силу формул (9) получим конечные уравнения

$$\beta'_{12}+\beta=0, \quad \beta'_{11}+\alpha\alpha'=0. \qquad (45)$$

В силу последнего уравнения из (42) получим

$$\beta'_{22}-\alpha\alpha'=0. \qquad (46)$$

Уравнения (43′) (45) и (46) показывают, что поверхность (A_2) удовлетворяет всем тем требованиям, которым удовлетворяет поверхность (A_1). Следовательно, все фокальные поверхности последовательности Лапласа тоже будут удовлетворять этим требованиям. Дифференцируя уравнения (45), (46) и внеся полученные значения $\Delta\beta'_{12}$, $\Delta\beta'_{11}$, $\Delta\beta'_{22}$ вместе со значениями (42′) в квадратичные уравнения получим тождества. Все уравнения (33) — (46) и (3) — (9) замкнуты относительно операции внешнего дифференцирования, и система уравнений Пфаффа (3), (5), (7) и (9) вполне интегрируема. Ранг системы Пфаффа равен 14, число независимых конечных уравнений равно четырем (уравнения (33)), следовательно, **интегральное многообразие зависит от десяти произвольных постоянных.**

§ 6. Конфигурация L

Полученную конфигурацию назовем конфигурацией L и выясним некоторые ее свойства. Для этой цели отнесем нашу конфигурацию к тетраэдру, построенному на осях фокальной сети (A_1) (см. [2], стр. 360), т. е. будем выбирать точки A_3 и A_4 тетраэдра так, чтобы ребра $A_1 A_3$ и $A_2 A_4$ были вторыми касательными фокальных сетей, точка A_3 была вторым фокусом луча $A_1 A_3$ и грань $A_1 A_3 A_4$ — была ее фокальной плоскостью.

Такой тетраэдр характеризуется уравнениями (18).

В силу этих уравнений из (43) получим

$$\beta_1=0, \quad \beta'_2=0. \qquad (47)$$

Отсюда следует, что наш тетраэдр является тетраэдром первого порядка и для конгруэнции $A_2 A_4$ (т. е. построен на осях фокальной сети поверхности (A_2)). Следовательно, **конфигурация L является частным случаем конфигурации T** (см. [7], стр. 229—236). Третье уравнение системы (33) и первое уравнение системы (45) показывают [4], что **наша конфигурация T образована из четырех конгруэнций последовательности Лапласа** [4]. Так как последовательность Лапласа образована из конгруэнций W, то линейчатая поверхность $\sqrt{\alpha}\,\omega_1^3 = \mathscr{E}\sqrt{\gamma}\,\omega_2^4$ конгруэнции $(A_1 A_2)$ и ее соответствующие линейчатые поверхности в других конгруэнциях последовательности будут гармоническими. Следовательно, **эти четыре гармонические линейчатые поверхности, согласно условиям (33), имеют общую квадрику Ли.**

Уравнение этой квадрики мы получим из (16) (или (17)) с учетом формул (18), (33)—(46). Оно будет иметь вид

$$\sqrt{\alpha}\,x^2x^3 - \mathscr{E}\sqrt{\gamma}\,x^1x^4 = 0, \quad (\mathscr{E} = \pm 1). \tag{48}$$

Так как все фокальные поверхности конфигурации L являются поверхностями второго порядка, то мы можем написать их уравнения относительно тетраэдра $(A_1 A_2 A_3 A_4)$. В работе [8] А. М. Васильев получил инвариантное уравнение квадрики Ли для фокальных поверхностей конфигурации. В нашей конфигурации эти квадрики будут являться одновременно фокальными поверхностями и их уравнения напишутся в виде:

уравнение поверхности (A_1), $(x^2)^2 + \alpha\gamma(x^3)^2 - 2\gamma x^1x^4 = 0$,

» » (A_2), $(x^1)^2 + \alpha'\gamma'(x^4)^2 - 2\gamma' x^2x^3 = 0$,

» » (A_3), $(x^1)^2 + \alpha'\gamma'(x^4)^2 - 2\gamma' x^2x^3 = 0$,

» » (A_4), $(x^2)^2 + \alpha\gamma(x^3)^2 - 2\gamma x^1x^4 = 0$.

Эти уравнения показывают, что **поверхность (A_1) совпадает с поверхностью (A_4), а поверхность (A_2) — с поверхностью (A_3).**

Прямая $A_2 A_3$ пересекается с поверхностью (A_1) в точках

$$A_3 \pm \sqrt{-\alpha\gamma}\,A_2. \tag{49}$$

Эти две точки гармонически разделяют пару точек A_2, A_3. Фокусы луча $A_2 A_3$ определяются двумя точками

$$A_3 + \mathscr{E}\sqrt{\alpha\gamma}\,A_2, \quad (\mathscr{E} = \pm 1), \tag{50}$$

которые тоже гармонически разделяют пару точек A_2, A_3. Фокусы луча $A_1 A_4$ напишутся в виде

$$A_4 + \mathscr{E}\sqrt{\alpha'\gamma'}\,A_1. \tag{51}$$

Аналитическая прямая $l_{\mathscr{E}}$, определяемая точками (50) и (51), удовлетворяет уравнению

$$dl_{\mathscr{E}} = (\omega_3^3 + \omega_4^4)\,l_{\mathscr{E}}.$$

Таким образом, две прямые $l_{\mathscr{E}}$ неподвижны, и следовательно, **две диагонали конфигурации L описывают одну линейную конгруэнцию с директрисами $l_{\mathscr{E}}$.**

Касательные к гармонической сети $\alpha(\omega_1^3)^2 - \gamma(\omega_2^4) = 0$ поверхности (A_1) пересекаются с диагональю $A_2 A_3$ в фокусах последнего луча. Следовательно, одна серия гармонических касательных поверхности (A_1) и (A_2) пересекается с одним неподвижным лучом l_g, другая серия—другим лучом l_g.

Прямые $A_1 A_4$ и $A_2 A_3$ сопряжены относительно обеих поверхностей (A_1) и (A_2).

Ереванский Арм. пед. институт им. Х. Абовяна.

Поступила 5 X 1959

Ս. Ե. Կարապետյան

L ԿՈՆՖԻԳՈՒՐԱՑԻԱՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատությունում հետազոտված են կոնգրուենցիայի հարմոնիկ գծավոր մակերևույթների Լիի կվադրիկները։ Սկզբում ստացված են մի քանի թեորեմներ, որոնք բնութագրում են համալուծ գծավոր մակերևույթների ընտանիքները կոնգրուենցիայի մեջ։

Երբ պահանջում ենք, որ Լապլասի հաջորդականության երկու հարևան կոնգրուենցիաների համալուծ գծավոր մակերևույթների Լիի կվադրիկները համընկնեն, ապա ստանում ենք մի փակ հաջորդականություն, որի բոլոր չորս կոնգրուենցիաները հավասարազոր են։ Այդ կոնֆիգուրացիան, որը նշանակվում է L տառով, օժտված է հետևյալ հիմնական հատկություններով.

1. L կազմող Լապլասի հաջորդականությունը R հաջորդականություն է։

2. Բոլոր ֆոկալ մակերևույթները II կարգի են և համընկնում են մեկ առ մեկ, այսինքն L կոնֆիգուրացիան կազմված է երկու II կարգի մակերևույթներից և նրա շոշափողներից։

3. Նախորդ երկու կվադրիկների նկատմամբ L կոնֆիգուրացիայի երկու անկյունագծերը բևեռա-համալուծ են իրար։

4. Այդ անկյունագծերը գծում են մի գծային կոնգրուենցիա, որի երկու դիրեկտրիսները կարող են հիմք ծառայել խնդիրը հասցնելու մինչև սինթետիկ երկրաչափության։

ЛИТЕРАТУРА

1. **Фиников С. П.** Метод внешних форм Картана, 1948.
2. **Фиников С. П.** Теория конгруэнции, 1950.
3. **Карапетян С. Е.** Квадрики Ли линейчатых поверхностей конгруэнций, ДАН СССР, 117, 2, 1957.
4. **Карапетян С. Е.** Геометрические значения некоторых инвариантов конгруэнций. Научн. Докл. ВШ, серия физ.-мат., № 1, 1958.
5. **Sania G.** Nuova esposizione delle geometria infinitesimale delle congruenze rettilinee, Ann. di Matem. (III), 15, 1908, 143—185.
6. **Фиников С. П.** Проективно-дифференциальная геометрия, 1937.
7. **Фиников С. П** Теория пар конгруэнций, 1956.
8. **Васильев А. М.** Об одном классе конгруэнций W. Уч. записки МГУ, серия математ., 7, 1954.
9. **Щербаков Р. Н.** Проективная теория репера линейчатой поверхности конгруэнций. Мат. сборник, т. 46(88) : 2, 1958.
10. **Карапетян С. Е.** Две конгруэнции с общими инвариантами F и F'. Научн. Докл. ВШ, серия физ.-мат., № 2, 1958.
11. **Карапетян С. Е.** Гармонические квадрики и некоторые линейчатые поверхности конгруэнций. ДАН СССР, 122, 3, 1958.