

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

Публикация Г. Б. Петросяна и Б. А. Розенфельда

Доказательство Аганиса пятого постулата Евклида

Ниже приводится перевод отрывка из „Комментариев к первым десяти книгам „Начал Евклида“ математика IX—X веков Абу-л'Аббаса ал-Фадла ан-Найризи, содержащего изложение доказательства V постулата Евклида, принадлежащего математику, которого ан-Найризи называет Аганисом (Agānūs). Сведения об этом математике сохранились только у ан-Найризи, которому они известны через ученого VI века Симпликия (после изложения доказательства Аганиса ан-Найризи пишет: „Симпликий сказал: таковы слова Аганиса“). Так как в чертежах ан-Найризи, относящихся к доказательству Аганиса, буквы читаются в греческом порядке, слева направо, в то время, как в остальных чертежах буквы читаются в арабском порядке, справа налево, Аганис писал по гречески или на одном из языков, письменность которых находилась под влиянием греческой письменности.

Так как нет греческого имени, которое транскрибировалось бы по-арабски „Agānūs“, автор доказательства V постулата, по-видимому, не был греком. Весьма вероятно, что автор доказательства V постулата был армянином по имени Аган (*Աղան*). Имя Аган в древнеармянской литературе упоминается начиная с V века. Первый историк, который упоминает это имя, Газар Фарпеци (в конце V века). Это имя в последующих веках употребляется все чаще (см. Г. Аджарян, словарь собственных имен, т. I, Ереван, 1946 г., стр. 92—98, на армянском языке). Некоторые армянские собственные имена на греческом языке принимают окончание „ης“.

По поводу того, кто мог быть автором этого доказательства заметим, что в V—VI веках, когда, по-видимому, жил этот автор, в Византии было несколько десятков ученых армян, овладевших греческой культурой. К этому времени уже был создан армянский алфавит (Месроп Маштоц, 406 г.). Направление армянского письма совпадает с греческим. В V веке и начале VI века широко практиковался отбор лучших учеников армянских школ для получения высшего образования в Константинополе, Риме, Афинах, Александрии, Эдессе. Первая группа таких учеников, направленная в начале V века, состояла из 60 человек. В истории армянской литературы ученых, получивших образование указанным образом, называют „переводчиками“ и делят их на „старших

переводчиков" и "младших переводчиков". К "переводчикам" относятся такие крупные ученые, как философ Давид Непобедимый (VI в.) и историк Мовсес Хоренаци (V в.). Среди дошедших до нас имен "переводчиков" имеется Аган, который был учителем Газара Фарпеци и Вагана Мамиконяна, живших во второй половине V века. Аган был крупным ученым и владел греческим языком. Поэтому вероятнее всего, что автором доказательства V постулата был этот самый Аган.

Перевод выполнен Б. А. Розенфельдом по рукописи Cod. or. 399/1 Лейденской университетской библиотеки (стр. 150б—170б), микрофильм которой был любезно прислан хранителем восточных рукописей этой библиотеки д-ром П. Вооргуве (P. Vooghoeve). В работе над переводом ценную помощь переводчику оказал востоковед В. С. Сегаль. К переводу приложены примечания, также составленные Б. А. Розенфельдом; числа в квадратных скобках указывают № соответственного примечания. В квадратных скобках помещены также слова, добавленные переводчиком для большей ясности изложения. В переводе используется та же транскрипция арабских букв, что и в прежних переводах Б. А. Розенфельда, опубликованных в "Историко-математических исследованиях".

Предпосылки и предложения Симпликия [1] и Аганиса [2], необходимые для двадцать девятого предложения первой книги [3]

В доказательстве двадцать девятого предложения первой книги используется предпосылка: всякие две прямые, проведенные под углами меньшими двух прямых, встречаются [4]. [Это утверждение] — не из общепринятых утверждений.

Симпликий сказал об этом: этот постулат не очевиден, но необходим для доказательства с помощью линий. Антипат и Диодор [5] доказали о нем много различных предложений. Птолемей [6] также доказывал его, в его доказательстве использовались тринадцатое, пятнадцатое и шестнадцатое предложения первой книги "Стихий" [7]. Однако это невозможно, так как Евклид пользовался этим постулатом только в двадцать восьмом предложении этой книги, а само это утверждение опирается на утверждение о том, что если две прямые проводятся под двумя прямыми углами, они параллельны, а если они проводятся под углами, меньшими двух прямых, они встречаются.

Что касается нашего друга Аганиса, то он не видит, зачем ставить это утверждение в качестве постулата, так как оно нуждается в доказательстве. Он пользовался другими предложениями вместо предложений, имеющих в "Стихиях", для того, чтобы доказать двадцать девятое предложение без этого утверждения. Затем, согласно своему мнению, он доказал этот постулат геометрическим способом. Вот его слова в его [собственных] выражениях.

Агание сказал: согласно нашему обещанию изложим доказательство этого постулата, состоящего в том, что если две линии проведены под углами меньшими двух прямых, они встречаются.

Это доказывается, насколько возможно, с помощью геометрического доказательства. Некоторые порицают геометров за это и говорят: если вы требуете, чтобы мы согласились с тем, что это не доказано, почему же вы пользуетесь этим при доказательстве другого? Поэтому я проведу это [доказательство] и, хотя это утверждение и весьма важно, оно не нуждается в том, чтобы речь о нем была длинной.

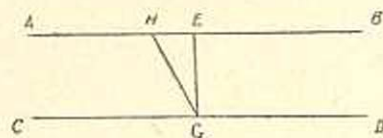
Я утверждаю, что мы определяем параллельные линии как такие, которые находятся на одной плоскости и если продолжать их бесконечно в обе стороны, расстояние между ними будет одно и то же [8]. Расстояние это кратчайшая линия, соединяющая их, то же говорится и о других расстояниях [9].

Добавим эти предложения к первой книге „Начал“ после двадцать шестого предложения, так что это предложение станет двадцать седьмым предложением.

[Первое предложение Аганиса]. Если две линии параллельны, расстояние между ними перпендикулярно каждой из них.

Пример этого — даны две параллельные линии AB , CD и пусть расстояние между ними EG . Я утверждаю, что [линия] EG перпендикулярна каждой из двух линий AB , CD .

Доказательство. Если EG не перпендикулярна линиям AB , CD , углы при точке E — не прямые. Пусть острый из них — угол AEG . Опустим из точки G перпендикуляр на линию AB , это GH .

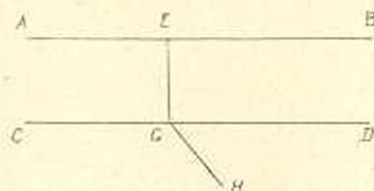


фиг. 1.

В силу доказательства XIX [предложения] I [книги „Начал“] [10] GE длиннее, чем GH . Но GE предполагалась кратчайшей прямой линией между линиями AB , CD , поэтому это нелепо. Таким образом, линия EG перпендикулярна каждой из линий AB , CD . Это и есть то, что мы хотели доказать.

Второе предложение Аганиса. Если прямая линия падает на две прямые линии и перпендикулярна каждой из них, то линии параллельны, а перпендикуляр является расстоянием между ними.

Пример этого — линии AB , CD , на них падает линия EG , составляющая с каждой из них прямые углы. Я утверждаю, что линии AB , CD параллельны, а линия EG — расстояние между ними.



фиг. 2.

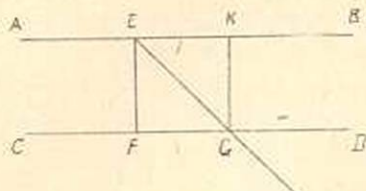
Доказательство. Если эти две линии не параллельны, через точку G проходит линия параллельная линии AB . Пусть, если возможно, это линия GH . В этом случае линия EG является расстоянием между линиями AB и GH , так как она — кратчайшая из всех линий, проведенных из точки G к линии AB .

Поэтому угол HGE прямой в силу доказательства предыдущего предложения. Но предполагалось, что угол DGE — прямой, поэтому

это нелепо. Таким образом, линии AB , CD параллельны, а линия GE —расстояние между ними. Это и есть то, что мы хотели доказать.

Третье предложение Аганиса. Прямая линия, проведенная к двум параллельным прямым линиям, образует равные накрестлежащие углы, внешний угол, равный соответственному ему внутреннему, и внутренние односторонние углы, вместе равные двум прямым [11].

Пример этого—две параллельные линии AB , CD , к ним проведена прямая EG . Я утверждаю, что углы, образующиеся при этом таковы, как мы указали.



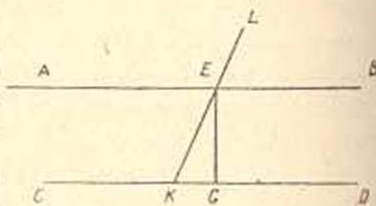
фиг. 3.

Линия EK параллельна линии FG . Линии EK и FG —расстояния между линиями EF и KG , поэтому они равны. Таким образом, линия FG равна линии EK , а линия EF —линии GK и эти линии образуют равные углы. Поэтому два треугольника $[FGE$ и $GKE]$ равны и остальные два угла равны остальным двум углам. Таким образом, угол FGE равен углу GKE , а это накрестлежащие углы. Но угол FGE равен углу HGD , так как они—при пересечении, в силу доказательства XV [предложения] I [книга „Начал“]. Поэтому угол GKE равен углу HGD , внешний—соответственному ему внутреннему. Так как мы доказали, что накрестлежащие углы равны, то, если мы прибавим к ним общий угол DGE , получится, что два угла FGE , EGD , равные двум прямым, равны двум углам KEG , DGE . Таким образом, внутренние односторонние углы равны двум прямым. Это и есть то, что мы хотели доказать.

Четвертое предложение Аганиса. Если прямая линия проведена к двум прямым линиям и накрестлежащие углы, образуемые между ней и двумя линиями, равны, или если внешний угол равен соответственному ему внутреннему, или внутренние односторонние углы равны двум прямым, то две прямые параллельны [13].

Пример этого—линии AB , CD , на них падает линия EG и образует с ними углы, как мы указали. Я утверждаю, что линии AB , CD , параллельны.

Доказательство. Если линия EG —перпендикуляр, очевидно, что линии AB , CD , параллельны, это доказано во втором из этих дополнительных предложений. Если же EG —не перпендикуляр, отпустим из точки E на линию CD перпендикуляр EK . Тогда если острый угол E —прямой угол, снова очевидно, что



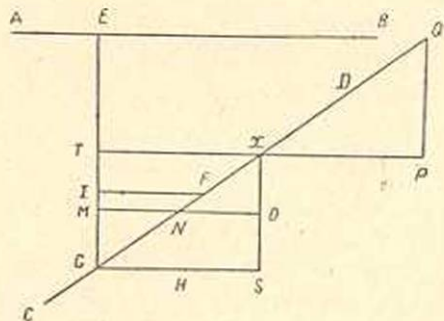
фиг. 4.

линии AB , CD параллельны, это доказано во втором из этих дополнительных предложений. Если же угол E — не прямой угол, восставим в точке E перпендикуляр к линии EK , как доказано в доказательстве XI [предложения] I [книги „Начал“]. Пусть этот перпендикуляр EL . Тогда линии EL , CD параллельны, как доказано в третьем из этих дополнительных предложений. Поэтому каждый из углов GEB , GEL равен углу CGE , но это невозможно. Таким образом, линии AB , CD параллельны. Это и есть то, что мы хотели доказать.

Таковы предложения Агания. Высказав их, он переходит к тридцать первому предложению: мы хотим провести из данной точки прямую, параллельную данной прямой [14], к тридцать второму предложению: у плоских фигур с параллельными сторонами противоположные стороны равны [15], к тридцать третьему предложению: линии, параллельные одной линии, параллельны между собой [16], к тридцать четвертому предложению: прямые линии, соединяющие равные параллельные линии, равны и параллельны [17] и к тридцать пятому предложению: если прямая линия падает на две прямые линии и внутренние односторонние углы меньше двух прямых, то эти две прямые, если продолжить их в сторону углов, меньших двух прямых, встречаются [18].

Пример этого — две прямые линии AB , CD , на которые падает прямая линия EG , причем внутренние односторонние углы со стороны B , D меньше двух прямых. Я утверждаю, что линии AB , CD встречаются с этой стороны.

Доказательство. Проведем через точку G линию, параллельную линии AB , как доказано в доказательстве Евклида в XXXI [предложения] I [книги „Начал“]. Пусть это линия GH . Проведем расстояние между ними в соответствии с доказательством XI [предложения] I [книги „Начал“], это линия GE . Предположим на линии CD произвольную точку, куда бы она ни пала, пусть это точка F . Опустим из точки F перпендикуляр на линию GE , как доказано в доказательстве XI [предложения] I [книги „Начал“], пусть это линия FI . Раздвоим линию GE , как доказано в доказательстве X [предложения] I [книги „Начал“] [19]. Раздвоим также ее половину и будем поступать так постоянно до тех пор, пока [точка] деления не попадет ниже точки I . Пусть [точка] деления попадет в точку M . Очевидно, что точка M попадет на ту часть линии EG , о которой мы говорим. Примем, например, что часть, которая падает ниже точки I — четверть GE . Проведем через точку M линию параллельную линиям GH , AB , как доказано в доказательстве XXXI [предложения] I [книги „Начал“], это линия MN . Продолжим линию GD



фиг. 5.

неограниченно и построим [линию] GQ , содержащую GN столько же раз, сколько раз EG содержит величину GM , т. е. четыре раза. Я утверждаю, что линии AB , CD , встречаются в точке Q . Доказательство. Отложим на линии GQ линию равную GN , как доказано в доказательстве III [предложения] I [книги „Начал“] [20]. Пусть это линия NX . Проведем из точки X линию параллельную GN , это линия XS , и продолжим линию MN до точки O . Тогда в треугольниках GMN , NXO две из их сторон равны, это GN и NX , а угол GNM равен углу ONX , как доказано в доказательстве XV [предложения] I [книги „Начал“], и, в силу доказательства третьего предложения из установленных Агanisом в этих предпосылках, угол MGN равен углу NXO , так как это накрестлежащие углы. В силу доказательства XXVI [предложения] I [книги „Начал“] [21] остальные стороны [первого треугольника] равны остальным сторонам [второго треугольника], каждая сторона — соответственной, и оставшийся угол равен оставшемуся углу. Поэтому сторона GM равна стороне XO . Но сторона OS равна стороне GM как противоположная сторона плоской фигуры с параллельными сторонами. Поэтому линия XS — удвоенная линия GM . Если провести из точки Q линию параллельную линиям EG и XS и провести через точку X линию XT в направлении параллельном AB , она встретится с линией, проведенной из точки Q параллельно линии EG . Тем самым доказано, что она отсекает от нее линию равную линии GT . Проведем ее, это линия PQ . Поэтому линия PQ равна линии TG , так как XQ равна XG , угол TXG равен углу QXP , угол FQX равен углу TGX как накрестлежащий, так что PQ равна GT в силу доказательства XXVI [предложения] I [книги „Начал“]. Но GT равен TE , поэтому PQ равна TE и линия AEB встречается с линией FQ в точке Q в силу доказанного Агanisом в установленном им предложении, в котором он утверждает, что линии, соединяющие концы равных и параллельных линий, параллельны и равны. Тем самым доказано, что если прямая линия падает на две прямые линии и внутренние односторонние углы меньше двух прямых углов, то эти две линии, если продолжить их в сторону, в которой углы меньше двух прямых, встречаются. Это и есть то, что мы хотели доказать [22].

Все, что он установил в этом предложении и в предшествующих ему предпосылках, принято как необходимый постулат в первой книге [„Начал“], но представляет собой предложения, добавленные Агanisом к предложениям Евклида, и ни в чем из сделанного им нет ничего заслуживающего порицания.

Симпликий сказал: таковы слова Аганиса и, пожалуй, Евклид поставил это утверждение в качестве постулата для того, что бы сделать путь ближе, чем путь, основанный на том, что параллельные линии — это такие линии на одной плоскости, что если продолжать их в обе стороны, расстояние между ними всегда будет равно.

Если обратить эту речь, то будет наоборот, т. е. если линии на одной плоскости таковы, что расстояние между ними не равно, они не параллельны, а так как они не параллельны, они встречаются. Евклид пользовался этим утверждением в прямом предложении из утверждений, принятие которых необходимо, а именно, что эти линии таковы, что при их продолжении [в сторону] углов меньших двух прямых они не сохраняют одного расстояния и, следовательно, встречаются. Очевидно, что их встреча происходит в стороне наклона, в другой же стороне они расходятся и расстояние между ними увеличивается [23]. Поэтому говорится, что если две линии параллельны, они necessarily встречаются, если только это не дуги, так как доказано, что конические сечения не параллельны и не встречаются [24]. Евклид упомянул эту предпосылку и применил эти предложения, а также [доказал] утверждение обратное указанному предложению: если на две прямые линии падает прямая линия и внутренние углы равны двум прямым, они параллельны. Если это предложение доказывается, то утверждение также нуждается в доказательстве [25]. Мы изложили все, что можно сказать о параллельных линиях.

П Р И М Е Ч А Н И Я

Автор рукописи, из которой заимствован рассматриваемый отрывок, назван в рукописи Абу-л-'Аббас ал-Фадл ибн Хатим ан-Найризи, но в большинстве источников он именуется не ан-Найризи. В частности, известные математики XI века Абу-р-Райхан ал Бируни (973 — 1048) и Омар Хайям (1048 — 1131) в своих сочинениях „Книга об индийских рашиках“ и „Комментарии к трудностям во введениях книги Евклида“ называют его Абу-л-'Аббасом ан-Найризи (см. рукопись 1043 Индийского ведомства в Лондоне, л. 28, и рукопись Cod. og. 199/8 Лейденской университетской библиотеки, лл. 76 об. и 78).

Иногда имя ан-Найризи читают „ат-Табризи“ (буквы „н“ и „т“, а также „б“ и „й“ в арабском алфавите отличаются только точками, в первом случае над, во втором случае под буквой). Например, небольшой трактат ан-Найризи, посвященный V постулату Евклида (рукопись Arabe 5467/7, Парижской национальной библиотеки, лл. 89—90) озаглавлен „Трактат ал-Фадла ибн-Хатима ат-Табризи о доказательстве известного постулата Евклида“ (Risāla-al Fādīl ibn Ḥatīm at-Ṭabrizī at-bān al-musādara al-mašḥūr al-Uklīdīs); под именем ат-Табризи этот автор фигурирует в биографическом словаре Поггендорфа (Poggendorff's Biographisch litterarisches Handwörterbuch, т. 3, Leipzig, 1898, стр. 24).

Ан-Найризи был уроженцем Ирана или Азербайджана, работал в Багдаде при халифе Му'тадиде (халиф с 892 по 902 г.), год рождения ан-Найризи неизвестен, умер он в 922 г. В лейденской рукописи его комментариев к Евклиду сохранились комментарии к I—VI книгам. Комментарии к I—III книгам были изданы вместе с латинским

переводом Бесторном и Гейбергом в Копенгагене в 1893—1905 гг. (*Euclidis Elementa ex interpretatione Al Nadschdschadschii cum commentariis Al-Nairizii, Arabice et Latine ediderunt notisque instruxerunt R. O. Besthorn et J. L. Heiberg, I—III, Hauniae, 1893—1905*), комментарии к IV—VI книгам были изданы там же Юнге, Редером и Томсоном в 1910—1932 гг. Комментарии ко всем десяти книгам сохранились в латинском переводе Герарда Кремонского (XII век). Этот перевод был издан в 1899 г. Курце (*Anarithi in decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii, ed M. Curtze, Leipzig, 1899*). Рассматриваемый нами отрывок имеется в этом переводе на стр. 65—75 (без заголовка).

Кроме теории параллельных линий, которой посвящен приводимый нами отрывок, значительный интерес в комментариях ан-Найризи представляет раздел, посвященный теории отношений; именно в связи с этими вопросами ан-Найризи упоминается в вышеуказанных сочинениях ал-Бируни и Хайяма. Ан-Найризи был автором комментариев к Птолемею, где он рассматривал вопросы тригонометрии и, в частности, дал доказательство сферической теории синусов.

1. Симпликий (у ан-Найризи Санбиликийус) — греческий философ и математик VI века, комментатор Аристотеля и Евклида, работал сначала в Афинах, после того, как языческие философы были изгнаны из Афин императором Юстинианом, переехал в Персию. Сведения о комментариях Симпликия к Евклиду сохранились только у ан-Найризи, который, по-видимому, был знаком с работами Симпликия, имевшимися в Персии.

2. Об Аганисе см. вводную заметку. Издатель латинского перевода сочинения ан-Найризи М. Курце без достаточных оснований отождествляет Аганиса с математиком I века до н. э. Геминиом Родосским (см. *Anarithus*, цит. соч., стр. 13, а также P. Tannery, *Le philosophe Aganis est-il identique à Geminus?* *Bibliotheca mathematica*, 3-я серия, т. II, 1901, стр. 9—11).

3. 29-е предложение I книги — первое предложение „Начал“ Евклида, доказательство которого опирается на V постулат. Ан-Найризи называет Евклида Ауклүдис, а „Начала“ — ал-Усул (см. также [7]).

4. Это — V постулат Евклида (см. Евклид. Начала, перевод Д. Д. Мордухай-Болтовского, книги I—VI, М.—Л., 1948, стр. 15).

5. Антинат (Антйййатус) и Диодор (Дйдурус) — поздне-эллинистические математики. Комментарии александрийского математика IV века Паппа к сочинению Диодора „Аналема“ упоминаются в „Математическом собрании“ Паппа (*Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt*, ed. F. Hultsch, vol. I, Berolini, 1876, стр. 246) см. также предисловие Ф. Гульча к III тому той же книги (Berolini, 1878, стр. IX—XI); Антинат не упоминается в других дошедших до нас источниках.

6. Птолемей (Битлимйус) — знаменитый александрийский астроном II века Клавдий Птолемей. Доказательство Птолемея V постулата

дошло до нас в передаче афинского философа и математика Прокла Диалоха (Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum libri commentarii, ed. G. Friedlein Lipsiae, 1873, стр. 365 — 367).

7. „Стихии“ (ал-Истиксат) — другое название „Начал“ Евклида, искажение греческого названия этого сочинения *Στοιχια* (стихии, элементы). XIII, XV и XVI предложения I книги „Начал“ (см. Евклид, цит. соч., стр. 26, 28 и 29) — теоремы о том, что смежные углы в сумме равны двум прямым, вертикальные углы равны друг другу, внешний угол треугольника больше каждого из внутренних углов, не смежных с ним.

8. В этом определении параллельных линий неявно используется предложение, что геометрическое место точек плоскости равностоящих от прямой по одну сторону от нее, — прямая линия. Это предложение содержит утверждение, эквивалентное V постулату Евклида. На этом неявном предположении основывается все „доказательство“ Аганиса.

В своем определении параллельных линий Аганис имел предшественника в лице философа I века до н. э. Посидония, работавшего на о. Родос и в Риме. По сообщению Прокла, Посидоний определял параллельные линии следующим образом: „Параллельными называются такие прямые линии, которые находясь на одной плоскости, не сближаются и не удаляются одна от другой, так что все перпендикуляры, проведенные из точек одной из них на другую, равны между собой“ (Proclus Diadochus, цит. соч., стр. 176).

9. Под расстоянием между двумя точками древние и средневековые математики понимали не число, как современные математики, а прямолинейный отрезок, соединяющий две данные точки, под расстоянием между двумя параллельными прямыми понимался общий перпендикуляр этих прямых.

10. XIX предложение I книги „Начал“ (см. Евклид, цит. соч., стр. 31) — теорема „во всяком треугольнике большой угол стягивается большой стороной“.

11. Это — утверждение XXIX предложения I книги „Начал“ (см. Евклид, цит. соч., стр. 41).

12. Здесь Аганис доказал возможность существования четырехугольника с 4 прямыми углами, непосредственно вытекающую из сделанного им неявного предположения (см. 8). Вопрос о существовании такого четырехугольника становится в центре исследований по теории параллельных линий у последующих математиков средневекового Востока Ибн ал-Хайсама (965 — 1039), Хайяма и Насир-ад-Дин ат-Туси (1201 — 1274) (см. Б. А. Розенфельд, Новые исследования по предистории неевклидовой геометрии, дополнение в книге: В. Ф. Каган, Основания геометрии, М., 1956, стр. 322 — 330, и Доказательства пятого постулата Евклида средневековых математиков Хасана Ибн ал-Хайсама и Льва Герсонида, Историко-математические исследования, вып. XI, М., 1958, стр. 733 — 782).

13. Это — утверждения XXVII и XXVIII предложений I книги „Начал“ (см. Евклид, цит. соч., стр. 29—40). Отметим, что эти утверждения Евклид доказывал, не опираясь ни на V постулат, ни на эквивалентные ему утверждения, в то время, как Аганис использует здесь свои предыдущие предложения, опирающиеся на предложение, содержащее утверждение эквивалентное V постулату.

14. Эта задача — XXXI предложение I книги „Начал“ (см. Евклид, цит. соч., стр., 43).

15. Это — первая часть XXXIV предложения I книги „Начал“ (см. Евклид, цит. соч., стр. 45).

16. Это — XXX предложение I книги „Начал“ (см. Евклид, цит. соч., стр. 42).

17. Это — XXXIII предложение I книги „Начал“ (см. Евклид, цит. соч., стр. 44).

18. Здесь Аганис переходит к непосредственному доказательству V постулата.

19. X предложение I книги „Начал“ (см. Евклид, цит. соч., стр. 24) — задача о раздвоении (делении пополам) отрезка.

20. II предложение I книги „Начал“ (см. Евклид, цит. соч., стр. 16) — задача об откладывании от данной точки отрезка равного данному отрезку.

21. XXVI предложение I книги „Начал“ (см. Евклид, цит. соч., стр. 37) — теорема о том, что если два угла и сторона одного треугольника соответственно равны двум углам и стороне другого треугольника, третий угол и две остальные стороны первого треугольника соответственно равны третьему углу и двум остальным сторонам другого треугольника.

22. Доказательство Аганиса основано на двух положениях: 1) если две прямые пересекаются третьей так, что внутренние односторонние углы меньше двух прямых углов, то первые две прямые пересекаются в одной из вершин параллелограмма, две из сторон которого направлены по первой и третьей прямым, а одна из диагоналей — по второй прямой, 2) для всяких двух отрезков существует такое натуральное число, что если это число раз раздвигать больший отрезок, получится отрезок меньший меньшего отрезка. Фактически доказательство проводится для случая, когда третья прямая перпендикулярна одной из двух данных прямых, но для получения общего случая достаточно проводить прямую FI не перпендикулярно прямой EG , а только параллельно прямой AB . Первое из указанных положений было взято за основу доказательства V постулата Хайямом, второе из этих положений, равносильное аксиоме Архимеда (для всяких двух отрезков существует такое натуральное число, что если это число раз повторять меньший отрезок, получится отрезок, больший большего отрезка), игравший существенную роль в доказательствах Ибн ал-Хайсама и ат-Туси. Аганис не строит указанного параллелограмма целиком, но сначала строит треугольник FIG , образованный прямой

FI , проведенной из некоторой точки F второй прямой, параллельно первой, второй и третьей прямым, затем делит отрезок FG третьей прямой между первыми двумя прямыми на такое число частей, являющееся степенью 2, что полученный отрезок MG меньше стороны IG построенного треугольника. Далее Аганис строит треугольник MNG гомотетичный треугольнику FIG , и треугольники, гомотетичные треугольнику MNG с коэффициентами гомотетии $-1, \pm 2, \pm 4$ и т. д. до тех пор, пока не будет построена вершина параллелограмма, противоположная его вершине G ; эта вершина Q и является точкой пересечения данных прямых AB и CD . Аганис предполагает, что точка F второй прямой находится между первой прямой и параллельной ей прямой, проходящей через точку G пересечения второй и третьей прямых. Если бы он рассмотрел точку F вне этой полосы, он должен был бы применить аксиому Паша—утверждение о том, что прямая, не проходящая через вершины треугольника, пересекающая одну из его сторон и не пересекающая другую, обязательно пересекается с третьей стороной. Это утверждение существенно используется в доказательствах Ибн ал-Хайяма и ат-Туси.

23. Утверждения о том, что из приближения двух прямых друг к другу, следует, что они пересекаются, и о том, что удаление двух прямых друг от друга с одной стороны предполагает их приближение друг к другу с другой стороны, эквивалентны V постулату Евклида (на плоскости Лобачевского параллельные прямые асимптотически приближаются друг к другу, а расходящиеся удаляются друг от друга по обе стороны от их общего перпендикуляра). Оба эти утверждения, приписываемые Хайямом Аристотелю, были выдвинуты Хайямом в качестве постулата, заменяющего V постулат, и положены им в основу его теории параллельных линий.

24. Аганис имеет ввиду асимптотическое приближение ветви гиперболы к ее асимптоте или двух ветвей гипербол к общей асимптоте.

25. В рукописи вместо „Евклид“ ошибочно написано — „Аганис“. Здесь приводится известный довод за то, что V постулат доказуем с помощью остальных аксиом и постулатов, состоящий в том, что обратное ему утверждение является теоремой (XXVIII предложение I книги „Начал“).

Комиссия по истории естествознания и техники
АН Армянской ССР
Коломенский Педагогический институт

Поступила 8 I 1960

Հրապարակում Գ. Բ. Պետրոսյանի և Բ. Ս. Բոգեմբեկի

ԱՂԱՆԻՍԻ՝ ԷՎԿԼԻԴԵՍԻ 5-ՐԴ ՊՈՍՏՈՒԼԱՏԻ ԱՊԱՑՈՒՅՑԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ քննարկվում է մի հատվածի թարգմանությունն Էվկլիդեսի «Նիմունքներ»-ի առաջին տասը դրքի մասին մեկնաբանություններից գրված 6—10 դարերի հեղինակ ան-Նալրիդի կողմից արաբերեն լեզվով:

Այդ հատվածը պարունակում է էպիկրիկաի երկրաչափության 5-րդ պոստուլատի ապացույցը, որը պատկանում է Աղանիսին:

Աղան անունը հին հայկական մասնագրության մեջ հիշվում է սկսած 5-րդ դարից: Առաջին պատմիչը, որ գործ է ածել այդ անունը հանդիսացել է Ղազար Փարպեցին: Անտհեսե այդ անունը այնպիսի հաճախ է գործածվում հաջորդ դարերում:

Աղանիսի մասին մաթեմատիկական տեղեկությունների քննարկում են միմիայն ան-Նալրիկի մաս, որպիսիք իրեն հայտնի են դարձել 6-րդ դարի հուն գիտնական Սիմպլիցիի աշխատությունների միջոցով:

Ան-Նալրիկի երկրաչափական դժգոհությունը, որոնք վերաբերում են Աղանիսի ապացույցներին, տառերը կարդացվում են ձախից աջ, մինչդեռ մյուս դժգոհությունը տառերը կարդացվում են աջից-ձախ:

Աշխատության մեջ համառոտակի պատմական փաստերի հիման վրա ցույց է տրվում, որ ան-Նալրիկի աշխատության մեջ բերված 5-րդ պոստուլատի ապացույցը ամենայն հավանականությամբ պատկանում է հայ գիտնական մաթեմատիկոս Աղանիսին, որը ապրել է 5-րդ դարում և մահում է թարգմանիչների խմբի մեջ այնպես, ինչպես Մովսես Թորենացին, Կավրիթ Ան-հաղթը և արիչները:

Համաձայն թարգմանությունը արաբերենից սուսերեն^{*} կատարվել է Բ. Ա. Բոգենֆելդի կողմից, որին էական օգնություն է ցույց տվել արևելագետ Վ. Ս. Սևգալը, ծանոթությունները գրվել են նույնպես Բ. Ա. Բոգենֆելդի կողմից: