ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 1, 1960 Физико-математические науки

ГИДРОМЕХАНИКА

А. Г. Багдоев

Распространение давления в неоднородной жидкости

§ 1. Случай неоднородной жидкости

Рассматривается задача распространения давления вглубь полуплоскости, занятой неоднородной сжимаемой жидкостью.

Пусть в точке O границы полуплоскости возникает некоторое давление, которое затем распространяется по границе ударной волной. Расположим ось Ox по невозмущенной границе полуплоскости, ось Oz перпендикулярно ей. t время с начала движения. На оси Ox имеем граничное условие для давления

$$P(x, O, t) = \begin{cases} P_1(x, t) & |x| < R(t), \\ O & |x| > R(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

где $R(t)$ координата фронта на границе жидкости, $P_1(x, t)$—распределение давления за фронтом.

Обозначим $a(z)$ изменение с глубиной скорости звука в невозмущенной жидкости. Уравнения движения неоднородной жидкости сводятся к уравнению для давления [3]

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2(z)} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \tag{1.2}$$

Найдем распределение давления на головной волне AB (фиг. 1), представляющей огибающую элементарных возмущений, порожденных фронтом на границе. Уравнение линии AB найдено в [3] и имеет вид

$$x = R(t') + \lambda \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{a^2(z)} - \lambda^2}},$$

$$t - t' = \int_0^z \frac{dz}{a^2(z)\sqrt{\frac{1}{a^2(z)} - \lambda^2}}, \tag{1.3}$$

$$O = \lambda R'(t') - 1.$$

Дифференциальные уравнения характеристических лучей уравнения (1.2) имеют вид ([1], стр. 267):

$$\frac{dx}{ds} = \frac{p_2}{2}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{p_3}{2}, \quad \frac{dp_1}{ds} = 0,$$

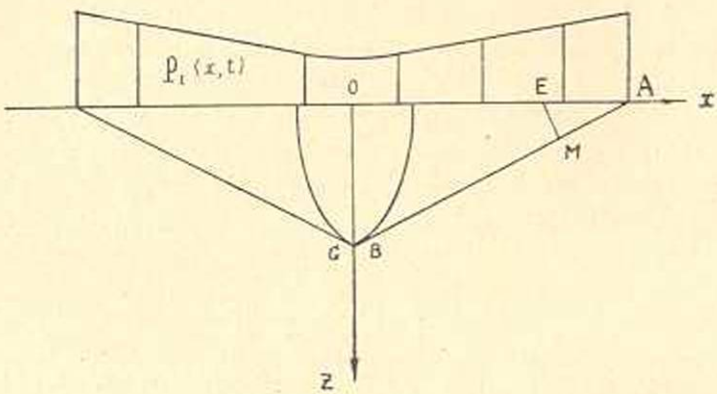
(1.4)

$$\frac{dp_3}{ds} = -(p_1^2 + p_3^2)\frac{1}{4a^2(z)}\frac{\partial}{\partial z}a^2(z), \quad t - t_0 = \int_0^s \frac{ds}{a^2(z)}.$$

Начальные условия для уравнения (1.4)
при $s = 0, \quad x = x_0, \quad z = z_0, \quad t = t_0,$

$$p_1 = \frac{2}{a(z_0)}\sin\vartheta_0, \quad p_3 = \frac{2}{a(z_0)}\cos\vartheta_0, \tag{1.5}$$

где ϑ_0 — угол наклона луча в точке (x_0, z_0) к оси Oz.



Фиг. 1.

Интегрируя уравнение (1.4) при условиях (1.5), получим уравнение характеристических лучей

$$x = \frac{\sin\vartheta_0}{a(z_0)}s + x_0,$$

$$\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{a^2(z)} - \frac{\sin^2\vartheta_0}{a^2(z_0)}}} = s, \tag{1.6}$$

$$t - t_0 = \int_{z_0}^{z}\frac{dz}{a^2(z)\sqrt{\frac{1}{a^2(z)} - \frac{\sin^2\vartheta_0}{a^2(z_0)}}}.$$

Условие в точке E для угла наклона луча ME (фиг. 1) к оси Oz (ϑ_0) имеет вид

$$\sin\vartheta_0 = \frac{a(o)}{R'(t_0)}. \tag{1.7}$$

В уравнении (1.6) t_0 — момент времени, когда фронт проходит через точку E границы, $x_0 = R(t_0)$, $z_0 = 0$.

Если учесть последние соотношения, уравнения (1.6) и (1.7) перепишутся в виде

$$x - x_0 = \frac{\sin\vartheta_0}{a(o)} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{a^2(z)} - \frac{\sin^2\vartheta_0}{a^2(o)}}} = \frac{\sin\vartheta_0}{a(o)}\, s,$$

$$t - t_0 = \int_0^z \frac{dz}{a^2(z)\sqrt{\frac{1}{a^2(z)} - \frac{\sin^2\vartheta_0}{a^2(o)}}}, \tag{1.8}$$

$$R'(t_0)\frac{\sin\vartheta_0}{a(o)} - 1 = 0.$$

Очевидно, уравнения (1.8) совпадают с уравнением линии AB (1.3) если принять $t' = t_0$, $\lambda = \frac{\sin\vartheta_0}{a(o)}$.

Решение уравнения (1.2) в точке M головной волны может быть получено по формуле акад. С. Л. Соболева, которая для плоского случая имеет вид [2]

$$P(x, z, t) = \frac{\Psi(\vartheta_0)}{\sqrt{\frac{D(x, z)}{D(s, \vartheta_0)}}}, \tag{1.9}$$

где $\frac{D(x, z)}{D(s, \vartheta_0)}$ якобиан преобразования (1.8), $\Psi(\vartheta_0)$ — произвольная функция, определяемая из начальных условий на луче ME в точке E.

Вычисление якобиана $\frac{D(x, z)}{D(s, \vartheta_0)}$ дает нам:

$$\frac{D(x, z)}{D(s, \vartheta_0)} = \mu(z, \lambda)\left\{-\frac{\cos\vartheta_0}{a(o)}\int_0^z \frac{\mu^{-3}(z, \lambda)\, dz}{a^2(z)} + \frac{R'^3(t_0)\cos\vartheta_0}{a(o)R''(t_0)}\right\}, \tag{1.10}$$

где

$$\mu(z, \lambda) = \sqrt{\frac{1}{a^2(z)} - \lambda^2}, \quad \lambda = \sin\vartheta_0 / a(o).$$

Подставляя (1.10) в (1.9) и определяя функцию $\Psi(\vartheta_0)$ из условия в точке E при $s = 0$

$$z = 0, \quad x = x_0 = R(t_0), \quad t = t_0, \quad P(x, o, t) = P_1(x_0, t_0), \tag{1.11}$$

получим распределение давления вдоль головной волны

$$\frac{P(x, z, t)}{P_1[x_0(\vartheta_0), t_0(\vartheta_0)]} = \sqrt{\frac{R'^3(t_0)}{R''(t_0)}} \cdot \left[\frac{D(x, z)}{D(s, \vartheta_0)}\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\cos\vartheta_0}{a(o)}, \tag{1.12}$$

где угол ϑ_0 находится из (1.7), t_0 и x_0 получаются из соотношений

$$x_0 = R(t_0) = R\left[t - \int_0^z \frac{dz}{a^2(z)\sqrt{\frac{1}{a^2(z)} - \frac{\sin^2\vartheta_0}{a^2(o)}}}\right], \tag{1.13}$$

которые с учетом (1.7) служат для определения ϑ_0, t_0, x_0. Очевидно, значения t_0 и x_0 совпадают со значениями $\overrightarrow{t_*}$ и $\overrightarrow{r_0}$ § 4 работы [3].

Получим формулу (1.12) с помощью общих решений в интегральной форме работы [3]. Как показано в работе [3], распределение давления вдоль головной волны записывается в виде

$$\frac{P(x, z, t)}{P_1(\overline{r_0^*}, \overline{t_*})} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\mu(o, \lambda)}{\mu(z, \lambda)}}\left[\int_0^z \frac{dz}{\mu(z, \lambda)} \int_0^z \frac{dz}{\mu^3(z, \lambda)\, a^2(z)}\right]^{-\frac{1}{2}} R'(t_0) \times$$

$$\times \int_0^{\eta_1} \frac{d\eta}{1 - \lambda R'(\tau')}, \tag{1.14}$$

где

$$\lambda = \frac{\sin\vartheta_0}{a(o)}; \quad \eta_1^2 = \left[\lambda \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{a^2(z)} - \lambda^2}}\right]^2 - (x_0 - x)^2,$$

$$\tau' = t - \int_0^z \frac{dz}{a^2(z)\sqrt{\frac{1}{a^2(z)} - \lambda^2}}. \tag{1.15}$$

Очевидно, на головной волне в силу (1.8) имеем $\eta_1 = 0$, $1 - R'(\tau')\lambda = 0$, причем η_1 и $1 - R'(\tau')\lambda$ бесконечно малые одного порядка.

Разложим выражение $1 - \lambda R'(\tau')$ в ряд по степеням η_1^2. Нетрудно показать, что

$$\frac{\partial}{\partial \eta_1^2}\left[1 - \lambda R'(\tau')\right] = -\frac{1}{2C} \cdot \frac{1}{1 - \lambda R'(\tau')}, \tag{1.16}$$

где

$$\frac{1}{C}\left\{\frac{R'(t_0)}{\int_0^z \frac{dz}{a^2(z)\left[\frac{1}{a^2(z)} - \lambda^2\right]^{3/2}}} - \lambda R''(t_0)\right\} : (x - x_0). \tag{1.17}$$

Если отбросить малые высшего порядка, из (1.16) получим

$$\frac{\partial^2}{\partial(\tau_1^2)^2}[1-\lambda R'(\tau')] = -\frac{1}{2^2C^2}\cdot\frac{1}{[1-\lambda R'(\tau')]^3},$$

. . . .

$$\frac{\partial^k}{\partial(\tau_1^2)^k}[1-\lambda R'(\tau')] = \frac{(2_k-3)\,!!}{2^kC^k}\cdot\frac{1}{[1-\lambda R'(\tau')]^{2k-1}}. \qquad (1.18)$$

. . . .

Теперь получим разложение для $1-\lambda R'(\tau')$

$$1-\lambda R'(\tau') = [1-\lambda R'(\tau')]_{\tau_1^2=0}\left[1-\frac{1}{2}\xi^2-\frac{1}{212^2}\xi^4-\ldots\right.$$

$$\left.\ldots-\frac{(2_k-3)\,!!}{2^kk!}\xi^{2k}-\ldots\right] = [1-\lambda R'(\tau')]_{\tau_1^2=0}\sqrt{1-\xi^2}, \qquad (1.19)$$

где

$$\xi = \frac{\tau_1}{\sqrt{C}\,[1-\lambda R'(\tau')]_{\tau_1^2=0}}. \qquad (1.20)$$

Если сделать в (1.14) замену переменной (1.20) и учесть, что $[1-\lambda R'(\tau')]_{\tau_1^2=\tau_1^2}=0$, и, следовательно, из (1.19)

$$\xi_1 = \frac{\tau_1}{\sqrt{C}[1-\lambda R'(\tau')]_{\tau_1^2=0}} = 1,$$

можно найти распределение давления вдоль головной волны

$$\frac{P(x,z,t)}{P_1(r_0\bar{t}_*)} = \frac{2}{\pi}R'(\bar{t}_*)\sqrt{\frac{\mu(o,\lambda)}{\mu(z,\lambda)}}\times$$

$$\times\left[C\int\limits_0^z\frac{dz}{\mu(z,\lambda)}\int\limits_0^z\frac{dz}{\mu^3(z,\lambda)\,a^2(z)}\right]^{-\frac{1}{2}}\int\limits_0^1\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \qquad (1.21)$$

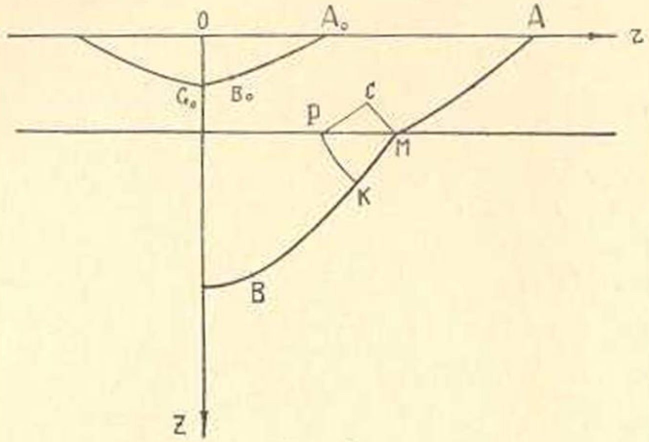
и вычислив интеграл, после несложных преобразований, легко из (1.21) получить выражение (1.12).

В случае однородной жидкости формулы упрощаются. В случае, если начальная плотность меняется с глубиной $\rho_0(z)$, в формуле (1.12) добавляется множитель $\sqrt{\frac{\rho_0(z)}{\rho_0(o)}}$ [3].

§ 2. Случай слоистой жидкости

Рассмотрим распространение давления в слоистой среде. Пусть жидкий слой, имеющий начальные скорость звука и плотность a_1 и ρ, лежит на жидком полупространстве, начальные параметры которого соответственно a_2 и ρ_1. Пусть в точке O поверхности жидкости возникло давление, которое затем распространяется по ней произвольной ударной волной (фиг. 2).

Рассмотрим сначала плоский случай. Выберем ось Or по свободной поверхности жидкости, Oz—перпендикулярно к ней. Для давления и закона распространения по поверхности воспользуемся обозначениями § 1 (заменив x на r).



Фиг. 2.

В силу симметрии рассматриваем область $r > 0$. Найдем сначала область возмущенного движения жидкости. Обозначим высоту слоя h. Тогда для моментов времени $t < \dfrac{h}{a_1}$ фронт волны находится построением Гюйгенса для однородной среды [3].

Он состоит из дуги окружности B_0G_0 с уравнением

$$\sqrt{r^2 + z^2} = a_1 t \tag{2.1$_1$}$$

и дуги кривой A_0B_0, которая находится из соотношений

$$[r - R(t_0)]^2 + z^2 = a_1^2 (t - t_0)^2, \quad R'(t_0)[R(t_0) - r] = a_1^2 (t_0 - t_1). \tag{2.1$_2$}$$

Легко видеть, что уравнение A_0B_0 можно представить в виде

$$\frac{a_1}{R'(t_0)} = \cos\theta, \quad r = R(t_0) + a_1 (t - t_0) \cos\theta,$$
$$z = a_1 (t - t_0) \sin\theta. \tag{2.1$_3$}$$

Уравнения $(2.1)_3$ для фиксированного θ суть уравнения луча ME [4]. Для $t > \dfrac{h}{a_1}$ начнет преломляться участок G_0B_0 волны. Уравнение линии GB получится по Гюйгенсу из G_0B_0. Легко видеть, что уравнение GB дается $(2.1)_2$, где нужно положить $R = \sqrt{a_1^2 t^2 - h^2}$.

Нами в работе [3] получено уравнение для границы элементарного возмущения в случае неоднородной жидкости (см. § 1, линия BG на фиг. 1)

$$r=\lambda\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{a^2(z)}-\lambda^2}},\quad t=\int_0^z\frac{dz}{a^2(z)\sqrt{\frac{1}{a^2(z)}-\lambda^2}}. \qquad (2.2)_1$$

Уравнение линии BA дается (1.3). Если исключить $r\,(=x)$ и t из уравнения $(2.2)_1$ и (1.3), получим

$$-R(t')+\lambda\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{a^2(z)}-\lambda^2}}=\frac{1}{R'(t')}\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{a^2(z)}-\frac{1}{R'^2(t')}}},$$

$$\int_0^z\frac{dz}{a^2(z)\sqrt{\frac{1}{a^2(z)}-\lambda^2}}-t'=\int_0^z\frac{dz}{a^2(z)\sqrt{\frac{1}{a^2(z)}-\frac{1}{R'^2(t')}}}. \qquad (2.2)_2$$

Система $(2.2)_2$ имеет решение $t'=0$,

$$\lambda=\frac{1}{R'(o)}. \qquad (2.2)_3$$

Решение $(2.2)_3$ определяет координаты точки B (фиг. 1).

Из $(2.2)_1$ имеем

$$\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)_B=-R'(o)\sqrt{\frac{1}{a^2(z)}-\frac{1}{R'^2(o)}}.$$

То же значение производной $\left(\frac{dx}{dz}\right)_B=\left(\frac{dr}{dz}\right)_B$ дает (1.3). Таким образом мы доказали, что линия ABM (фиг. 1) — гладкая. Если положить

$$a(z)=\begin{cases}a_1 & z<h,\\ a_2 & z>h,\end{cases}$$

получим вместо $(2.2)_1$ при $z>h$

$$r=\frac{\lambda h}{\sqrt{\frac{1}{a_1^2}-\lambda^2}}+\frac{\lambda(z-h)}{\sqrt{\frac{1}{a_2^2}-\lambda^2}},$$

$$t=\frac{h}{a_1^2\sqrt{\frac{1}{a_1^2}-\lambda^2}}+\frac{z-h}{a_2^2\sqrt{\frac{1}{a_2^2}-\lambda^2}}. \qquad (2.3)_1$$

Легко показать, что (2.3) совпадает с уравнением линии BG, полученным выше иным путем.

Уравнение (1.3) даст нам (если заменить t' на t_0) при $z>h$

$$r-R(t_0)=\frac{1}{R'(t_0)}\left[\frac{h}{\sqrt{\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{R'^2(t_0)}}}+\frac{z-h}{\sqrt{\frac{1}{a_2^2}-\frac{1}{R'^2(t_0)}}}\right],$$

$$t-t_0=\frac{h}{a_1^2\sqrt{\frac{1}{a_1^2}-\frac{1}{R'^2(t_0)}}}+\frac{z-h}{a_2^2\sqrt{\frac{1}{a_2^2}-\frac{1}{R'^2(t_0)}}}. \quad (2.3)_2$$

Для моментов времени $\frac{h}{a_1}<t<\frac{h}{a_1\sqrt{1-\frac{a_1^2}{R'^2(o)}}}$ возмущенная область в нижнем полупространстве ограничена GB: для

$$t>\frac{h}{a_1\sqrt{1-\frac{a_1^2}{R'^2(o)}}}$$

начинает преломляться волна A_0B_0.

Уравнение огибающей BM элементарных возмущений, порожденных следом волны M на границе $z=h$, получится в виде

$$\left.\begin{aligned}&[r-r_\Gamma(t')]+(z-h)^2=a_2^2(t-t')^2,\\&r'_\Gamma(t')[r_\Gamma(t')-r]=a_2^2(t'-t),\end{aligned}\right| \quad (2.4)_1$$

где абсцисса точки M $r_\Gamma(t')$ определяется уравнениями (см. $(2.3)_2$)

$$r_\Gamma(t')=R(t_0)+\frac{1}{R'(t_0)}\frac{h}{\sqrt{\frac{1}{a_1^2}-\frac{1}{R'^2(t_0)}}},$$

$$t'=t_0+\frac{h}{a_1^2\sqrt{\frac{1}{a_1^2}-\frac{1}{R'^2(t_0)}}}. \quad (2.4)_2$$

Нетрудно теперь показать, что уравнение линии BM $(2.4)_{1,2}$ тождественно уравнению $(2.3)_2$. Таким образом геометрическая теория волн, полученная для непрерывных неоднородностей, распространяется и на разрывные (слоистые) случаи

$$a(z)=\begin{cases}a_1 & z<h,\\ a_2 & z>h.\end{cases}$$

Очевидно, что уравнение линии BM можно записать также в виде

$$\begin{aligned}r&=r_\Gamma+a_2(t-t_\Gamma)\cos\theta,\\ z&=h+a_2(t-t_\Gamma)\sin\theta,\end{aligned}\qquad \frac{\cos\theta}{\cos\theta_1}=\frac{a_1}{a_2}, \quad (2.4)_3$$

где положено $r_\Gamma=R(t_0)+h\operatorname{ctg}\theta$,

$$t_\Gamma=t_0+\frac{h}{a_1\sin\theta}.$$

Очевидно, t_Γ есть момент прихода возмущения, возникшего в момент t_0 в точке $\{R(t_0),o\}$, на границу $z=h$; $\{r_\Gamma,h\}$ координаты точки P прихода.

Переходим к определению давления на отраженной волне CM и преломленной волне BM. Проведем лучи—преломленный KP и отраженный CP.

Как показано в [4] и [5], давление вдоль лучей в прифронтовых областях для фронтов прямой, отраженной и преломленной волн, выразится

$$P_0 = \frac{A_0(\theta) f(\tau)}{\sqrt{t - t_0(\theta) + \frac{r_0(\theta)}{a_1}}}, \quad A_0(\theta) = P_1(x_0, t_0) \sqrt{\frac{r_0(\theta)}{a_1}},$$

$$r_0(\theta) = \frac{-R'^3[t_0(\theta)] \sin^2\theta}{R''[t_0(\theta)]\, a_1}, \tag{2.5}$$

где

$$\tau = t - t_0(\theta) - \frac{\sqrt{[r - R(t_0)]^2 + z^2}}{a_1},$$

$$[r - R(t_0)] \sin\theta = z\cos\theta; \ \cos\theta = \frac{a_1}{R'(t_0)};$$

$$P_1 = \frac{A_1(\theta) f(\tau_1)}{\sqrt{t - t_\Gamma(\theta) + \frac{r_{\Gamma_1}(\theta)}{a_1}}}, \tag{2.6}$$

где

$$\tau_1 = t - t_\Gamma(\theta) - \frac{\sqrt{[r - r_\Gamma(\theta)]^2 + (h - z)^2}}{a_1},$$

$$(r - r_\Gamma) \sin\theta = (h - z) \cos\theta,$$

$$r_\Gamma - R(t_0) = \frac{h a_1}{R'(t_0) \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{R'^2(t_0)}}};$$

$$P_2 = \frac{B_0(\theta) f(\tau_2)}{\sqrt{t - t_\Gamma(\theta) + \frac{r_{\Gamma_2}(\theta)}{a_2}}}, \tag{2.7}$$

где

$$\tau_2 = t - t_\Gamma(\theta) - \frac{\sqrt{[r - r_\Gamma(\theta)]^2 + (z - h)^2}}{a_2},$$

$$[r - r_\Gamma(\theta)] \sin\theta_1 = (z - h) \cos\theta_1.$$

Функция $f(\tau)$ характеризует давление за фронтом, причем имеем $f'(\tau) \gg f(\tau)$ (для вычисления давления). На самом фронте волны можно считать

$$f(\tau) = \sigma(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau > 1 \\ 0 & \tau < 0 \end{cases}; \quad f'(\tau) = \delta(\tau) \ \text{(дельта—функция)}.$$

Выражение $r_{\Gamma_{1,2}}(\theta)$ представляет радиус кривизны отраженной и преломленной волн в точке $P[r_\Gamma(\theta), h]$ границы в момент падения $t_\Gamma(\theta)$, которое имеет вид [5]

$$r_{\Gamma_2}(\theta) = r_{\Gamma_1}(\theta)\frac{a_2}{a_1}\frac{\operatorname{ctg}^2\theta}{\operatorname{ctg}^2\theta_1} = \left|\frac{h}{\sin\theta} - \frac{R'^3(t_0)\sin^2\theta}{a_1 R''(t_0)}\right|\frac{a_2\operatorname{ctg}^2\theta}{a_1\operatorname{ctg}^2\theta_1}. \tag{2.8}$$

Падающая волна задана (2.5). Если учесть, что

$$t - t_0(\theta) + \frac{r_0(\theta)}{a_1} = t - t_\Gamma(\theta) + \frac{r_{\Gamma_1}(\theta)}{a_1},$$

выражение (2.5) запишется

$$P_0 = \frac{A_0(\theta) f(\tau)}{\sqrt{t - t_\Gamma(\theta) + \dfrac{r_{\Gamma_1}(\theta)}{a_1}}}. \tag{2.5}$$

Для определения отраженной и преломленной волн используем условия в точке P границы жидкостей (начальные условия для определения $A_1(\theta)$ и $B_0(\theta)$ при $t = t_\Gamma(\theta)$):

а) равенство давлений $P_0 + P_1 = P_2$,

б) равенство нормальных скоростей $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P_0}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P_1}{\partial z} = \dfrac{1}{\rho_1}\dfrac{\partial P_2}{\partial z}$.

Легко показать, что при $z = h$ $\tau = \tau_1 = \tau_2 = t - t_\Gamma(\theta)$.

Имеем, кроме того, $\left(\dfrac{\partial\tau}{\partial z}\right)_{z=h} = -\left(\dfrac{\partial\tau_1}{\partial z}\right)_{z=h} = -\dfrac{\sin\theta}{a_1}$;

$$\left(\frac{\partial\tau_2}{\partial z}\right)_{z=h} = -\frac{\sin\theta}{a_2}.$$

Граничные условия запишутся теперь

$$f(\tau)\frac{A_0(\theta)}{\sqrt{\dfrac{r_{\Gamma_1}(\theta)}{a_1}}} + f(\tau_1)\frac{A_1(\theta)}{\sqrt{\dfrac{r_{\Gamma_1}(\theta)}{a_1}}} = f(\tau_2)\frac{B_0(\theta)}{\sqrt{\dfrac{r_{\Gamma_2}(\theta)}{a_2}}},$$

$$-f'(\tau)\frac{1}{\rho}\frac{\sin\theta}{a_1}\frac{A_0(\theta)}{\sqrt{\dfrac{r_{\Gamma_1}(\theta)}{a_1}}} + f'(\tau_2)\frac{1}{\rho}\frac{\sin\theta}{a_1}\frac{A_1(\theta)}{\sqrt{\dfrac{r_{\Gamma_1}(\theta)}{a_1}}} =$$

$$= -f'(\tau_2)\frac{1}{\rho_1}\frac{\sin\theta_1}{a_2}\frac{B_0(\theta)}{\sqrt{\dfrac{r_{\Gamma_1}(\theta)}{a_2}}}. \tag{2.9}$$

Для давления в точке M преломленной волны получим

$$B_0(\theta) = \frac{2\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\sin\theta}{a_1}\sqrt{\dfrac{a_1}{a_2}}}{\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\sin\theta}{a_1} + \dfrac{1}{\rho_1}\dfrac{\sin\theta_1}{a_2}} A_0(\theta)\sqrt{\frac{r_{\Gamma_2}(\theta)}{r_{\Gamma_1}(\theta)}}$$

и

$$P_2 = \frac{A_0(\theta)}{\sqrt{t - t_\Gamma(\theta) + \frac{r_{\Gamma_2}(\theta)}{a_2}}} \cdot K,$$

где

$$K = \frac{2\frac{1}{\rho}\frac{\sin\theta}{a_1}}{\frac{1}{\rho}\frac{\sin\theta}{a_1} + \frac{1}{\rho_1}\frac{\sin\theta}{a_2}} \cdot \frac{\operatorname{ctg}\theta}{\operatorname{ctg}\theta_1}. \tag{2.10}$$

В частности, для случая $R'(t) = V = \text{const}$, $P_1 = \text{const}$,

$$P_2 = P_1 \frac{2\frac{1}{\rho}\sqrt{M^2 - 1}}{\sqrt{M^2 - 1}\,\frac{1}{\rho} + \sqrt{M^2 - 1}\,\frac{1}{\rho_1}},$$

где

$$M = \frac{V}{a}, \quad M_1 = \frac{V}{a_2}.$$

Для случая осесимметричной задачи легко показать [4], что прифронтовые выражения для давления определятся через (2.5), (2.6) и (2.7) для плоской задачи, посредством соотношений

$$P_0^* = P_0\sqrt{\frac{x_0(\theta)}{r}}, \tag*{$(2.5)_1$}$$

$$P_1^* = P_1\sqrt{\frac{r_\Gamma(\theta)}{r}}, \tag*{$(2.6)_1$}$$

$$P_2^* = P_2\sqrt{\frac{r_\Gamma(\theta)}{r}}. \tag*{$(2.7)_1$}$$

Здесь r—координата меридионального сечения, а остальные обозначения те же, что при плоской задаче.

Окончательно в точке M преломленной волны

$$P_2^* = \frac{A_0(\theta)\cdot K}{\sqrt{t - t_\Gamma(\theta) + \frac{r_{\Gamma_2}(\theta)}{a_2}}}\sqrt{\frac{x_0(\theta)}{r}}. \tag{2.11}$$

В частности, для $P_1 = \text{const}$; $R'(t) = V = \text{const}$ имеем

$$P_2^* = P_1 \frac{2\frac{1}{\rho}\sqrt{M^2-1}}{\frac{1}{\rho_1}\sqrt{M_1^2-1}+\frac{1}{\rho}\sqrt{M^2-1}} \sqrt{\frac{M_1^2 r - Vt + h\frac{M^2-M_1^2}{\sqrt{M^2-1}}}{r\,(M_1^2-1)}}. \qquad (2.12)$$

Выражение (2.12) для случая однородной жидкости получено А. Я. Сагомоняном [6].

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 22 V 1959

Ա. Գ. Բագդոև

ՃՆՇՄԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒՄԸ ՈՉ ՀԱՄԱՍԵՌ ՀԵՂՈՒԿԻ ՄԵՋ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկվում է հարվածող ալիքի թափանցումը իդեալական ոչ համասեռ կամ շերտավոր հեղուկով կիսատարածության խորքը: Ստացված է հեղուկի խանգարված շարժման երկրաչափական պատկերը, ընդ որում ցույց է տրված, որ շերտավոր հեղուկի խանգարված տիրույթի սահմանը կարելի է ստանալ անընդհատ անհամասեռության բանաձևի օգնությամբ: Այնուհետև ճառագայթային եղանակով հաշված է ճնշման բաշխումը ինչպես անհամասեռ, այնպես էլ շերտավոր հեղուկի առաջնային ալիքի վրա:

[3] աշխատությունում Ադամարի եղանակով ստացված է ամբողջ խանգարված տիրույթի ինտեգրալ ներկայացում անհամասեռ հեղուկի համար:

Ներկա աշխատության մեջ հետազոտվում է այդ լուծման ասիմպտոտիկ վարքը առաջնային ալիքի վրա, և ցույց է տրվում լուծումների նույնությունը ալիքների ֆրոնտում, որոնք ստացվել են ճառագայթման և ինտեգրալ ներկայացման եղանակներով:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. IУ.

2. *Соболев С. Л.* Об интегрировании волнового уравнения. Труды Сейсмолог. института АН ССР, № 6, 1930.

3. *Багдоев А. Г.* Кандидатская диссертация. МГУ, 1959.

4. *Багдоев А. Г.* Распространение давления в упругое полупространство. ДАН АрмССР, № 2, 1959.

5. *Филиппов А. Ф.* О методе вычисления волн. Известия АН СССР, серия геофизическая, № 7, 1957.

6. *Сагомонян А. Я.* Докторская диссертация. МГУ, 1954.