

ГИДРОМЕХАНИКА

Г. А. Бабаджания

О плоской задаче открытого потока несжимаемой
жидкости

Задача плоского установившегося открытого потока несжимаемой жидкости сводится к решению системы, состоящей из двух уравнений движения и уравнения неразрывности

$$\begin{aligned}v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -g \frac{\partial h}{\partial x}; \\v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -g \frac{\partial h}{\partial y}; \\ \frac{\partial}{\partial x} (h v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (h v_y) &= 0,\end{aligned}\quad (1)$$

где v_x и v_y — компоненты вектора скорости по осям x, y ; h — глубина потока; g — ускорение силы тяжести. Эти уравнения получены в следующих предположениях:

а) Гидростатический закон распределения давления по глубине потока,

б) Постоянство вектора скорости по глубине потока,

в) Положительный уклон дна равен уклону сил трения.

Система уравнений (1) содержит три неизвестных v_x, v_y, h и образует замкнутую систему без дополнительного условия потенциальности потока.

Если движение жидкости потенциальное, то из условия отсутствия вихря и постоянства энергии, исходная система (1) приводится к одному нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка относительно потенциала скорости.

Это уравнение имеет следующий вид

$$\left(1 - \frac{v_x^2}{gh}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2 \frac{v_x v_y}{gh} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \left(1 - \frac{v_y^2}{gh}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (2)$$

где φ есть потенциал скорости.

Уравнение (2) для бурных потоков ($v > \sqrt{gh}$) будет гиперболического типа, решение которого в общем виде дается методом ха-

рактических. Если движение жидкости вихревое, то не имеет места вышеизложенное обстоятельство, т. е. не существует такой функции $\varphi(x, y)$, через которую компоненты скорости выражались бы в виде

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Следовательно, и решение задачи не может быть приведено к решению уравнения типа (2).

Цель настоящей работы заключается в том, чтобы построить соответствующую функцию для вихревого движения и составить уравнение, которому удовлетворяет эта функция.

При решении этой задачи вместо системы (1) составим другую систему уравнений, состоящую из двух последних уравнений системы (1) и из интеграла Бернулли для вихревого стационарного движения:

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -g \frac{\partial h}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial x}(h v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(h v_y) &= 0, \\ h + \frac{v^2}{2g} &= H(\psi). \end{aligned} \quad (3)$$

Из уравнения неразрывности имеем:

$$h v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad h v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4)$$

Умножая обе части уравнений (4) соответственно на dy и dx , затем складывая, получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = h v_x dy - h v_y dx = d\psi,$$

откуда

$$dy = \frac{v_y}{v_x} dx + \frac{1}{h v_x} d\psi. \quad (5)$$

Перейдем от независимых переменных x и y к переменным ξ, ψ , где $\psi(x, y)$ есть функция тока, а $\xi = x$. Тогда из (5) и из первого уравнения системы (3) можно написать

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{v_y}{v_x}, \quad \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{1}{h v_x}, \quad (6)$$

$$v_x \left(\frac{\partial v_y}{\partial \xi} + \frac{\partial v_y}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + v_x \frac{\partial v_y}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Заменяя v_x и v_y по (4) и производя сокращения получим

$$\frac{\partial v_y}{\partial \xi} = -gh \frac{\partial h}{\partial \psi}. \quad (7)$$

Из (7) вытекает, что существует такая функция $f(\xi, \psi)$, для которой имеют место соотношения

$$v_y = -\frac{\partial f}{\partial \xi} \text{ и } h = \sqrt{\frac{2}{g} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi}}. \quad (8)$$

Имея ввиду выражение (8), уравнения (6) примут следующий вид

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = -\frac{1}{\sqrt{v^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \psi}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{g} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} \left[v^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2 \right]}}, \quad (10)$$

где $v^2 = v_x^2 + v_y^2$.

Третье уравнение системы (3) в новых переменных примет следующий вид

$$\sqrt{\frac{2}{g} \frac{\partial f}{\partial \xi}} + \frac{v^2}{2g} = H(\psi). \quad (11)$$

Из (9) и (10) перекрестным дифференцированием исключая y и подставляя значения v^2 , $v \frac{\partial v}{\partial \xi}$, $v \frac{\partial v}{\partial \psi}$ из (11), получим то искомое уравнение, которому удовлетворяет функция $f(\xi, \psi)$.

$$\begin{aligned} \sqrt{g} \frac{dH}{d\psi} \cdot \frac{\partial f}{\partial \psi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right)^{-1/2} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \left[3 \sqrt{\frac{g}{2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \psi} \right)^2 - \right. \\ \left. - gH(\psi) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right)^{-1/2} \right] + 2\sqrt{g} \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} \left[H(\psi) - \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right)^{1/2} \right] + \\ + \sqrt{2} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right)^{-1/2} \frac{\partial f}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \psi \partial \xi}. \end{aligned} \quad (12)$$

В этом уравнении $H(\psi)$ — заданная функция. Определив из уравнения (12) функцию $f(\xi, \psi)$, из (9) и (10) можно найти $y(\xi, \psi)$. Функция $y(\xi, \psi = \text{const})$ есть линия тока.

Компоненты скорости v_x , v_y и глубину h можно найти из (8) и (11).

Уравнение (12) имеет очень сложный вид и при решении конкретных задач его применение невозможно. Чтобы выявить особенности некоторых движений, рассмотрим частные случаи, применив идею функции $f(\xi, \psi)$.

1. Рассмотрим случай, когда $h = h(\psi)$, т. е. глубина сохраняется вдоль линии тока. Требуется найти возможное движение жидкости.

Из второго соотношения (8) имеем

$$f(\xi, \psi) = \frac{g}{2} h^2(\psi) \cdot \xi + \theta(\psi), \quad (13)$$

где $\theta(\psi)$ неизвестная функция.

Из (9) и (10) имеем

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = - \frac{ghh'\xi + \theta'(\psi)}{\sqrt{v^2 - (ghh'\xi + \theta')^2}}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{1}{h\sqrt{v^2 - (ghh'\xi + \theta')^2}}, \quad (15)$$

где

$$h' = \frac{dh}{d\psi}, \quad \theta'(\psi) = \frac{d\theta}{d\psi}.$$

Интегрируя (14), получим

$$y = \sqrt{\frac{v^2}{(ghh')^2} - \left(\xi + \frac{\theta'}{ghh'}\right)^2} + \eta(\psi), \quad (16)$$

где $\eta(\psi)$ — произвольная функция.

Дифференцируя (16) по ψ и сравнивая полученное выражение с (15), можно написать

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v^2}{(ghh')^2} - \left(\xi + \frac{\theta'}{ghh'}\right)^2} \left[\frac{d}{d\psi} \frac{v^2}{(ghh')^2} - \right. \\ & \left. - 2 \left(\xi + \frac{\theta'}{ghh'} \right) \frac{d}{d\psi} \left(-\frac{\theta'}{ghh'} \right) \right] + \frac{d\eta}{d\psi} = \\ & = \frac{1}{gh^2 h'} \sqrt{\frac{v^2}{(ghh')^2} - \left(\xi + \frac{\theta'}{ghh'}\right)^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

В выражении (17) переменная ξ входит явным образом, поэтому ясно, что написанное выражение будет иметь место лишь тогда, когда

$$\frac{d\eta}{d\psi} = 0, \quad \frac{d}{d\psi} \frac{\theta'}{ghh'} = 0,$$

или

$$\eta(\psi) = \text{const}, \quad \frac{\theta'}{ghh'} = \text{const}.$$

Исходя из этого, (17) примет следующий вид

$$\frac{d}{d\psi} \frac{v^2}{(ghh')^2} = \frac{2}{gh^2 h'}. \quad (18)$$

Присоединяя к этому уравнению интеграл Бернулли в виде (11), получим два уравнения с двумя неизвестными $v(\psi)$ и $h(\psi)$. Из (16) получим уравнение линии тока

$$(y + \text{const})^2 + \left(\xi + \text{const}\right)^2 = \frac{v^2}{(ghh')^2}. \quad (19)$$

Уравнение (19) является уравнением семейства концентрических окружностей.

В этом случае возможное движение есть вращательное движение частиц жидкости по окружности.

Если глубина всюду одинакова, т. е. $h = \text{const}$, то из (14) и (15) получим:

$$y = -\frac{\theta' \xi}{\sqrt{v^2 - \theta'^2}} + s(\psi), \quad (20)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{1}{h\sqrt{v^2 - \theta'^2}}. \quad (21)$$

Дифференцируя (20) по ψ и сравнивая с (21) получим

$$-\xi \frac{d}{d\psi} \frac{\theta'}{\sqrt{v^2 - \theta'^2}} + \frac{ds}{d\psi} = \frac{1}{h\sqrt{v^2 - \theta'^2}}.$$

Аналогично уравнению (17), можем написать

$$\frac{d}{d\psi} \frac{\theta'}{\sqrt{v^2 - \theta'^2}} = 0,$$

или

$$\frac{\theta'}{\sqrt{v^2 - \theta'^2}} = \text{const}. \quad (22)$$

Таким образом, получаются два уравнения. Первое из них

$$\frac{ds}{d\psi} = \frac{1}{h\sqrt{v^2 - \theta'^2}}, \quad (23)$$

а второе — интеграл Бернулли в виде (11).

Линии тока в этом случае являются семейством параллельных прямых. Действительно, учитывая (22) выражение (20) примет следующий вид

$$y = \text{const} \cdot \xi + s(\psi).$$

2. Рассмотрим безвихревое движение [$H(\psi) = \text{const}$].

В этом случае v выразится по закону Бернулли через глубину h

$$v^2 + 2gh = 2gH.$$

Из второго уравнения (8) получим

$$\frac{\partial h}{\partial \psi} = -\frac{1}{gh} \frac{\partial v_y}{\partial \xi} = -\frac{1}{gh} \frac{dv_y}{dh} \cdot \frac{\partial h}{\partial \xi}, \quad (24)$$

уравнение характеристик которого, имеет вид

$$\frac{d\xi}{\frac{1}{gh} \frac{dv_y}{dh}} = \frac{d\psi}{1}. \quad (25)$$

Интегрируя (25), получим

$$\xi = \frac{1}{gh} \frac{dv_y}{dh} \cdot \psi + f_1(h), \quad (26)$$

где $f_1(h)$ неизвестная функция.

Для простоты исследования вместо ξ и ϕ введем новые переменные h и $\psi = \Phi$, тогда

$$\frac{\partial y}{\partial \Phi} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \Phi} + \frac{\partial y}{\partial \phi} = \frac{1}{gh} \frac{\partial v_y}{\partial h} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \phi},$$

$$\frac{\partial y}{\partial h} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial h} = \frac{\partial y}{\partial x} \left(\frac{1}{gh} \cdot \frac{d^2 v_y}{dh^2} \Phi - \frac{1}{gh^2} \frac{dv_y}{dh} \Phi + f_1 \right).$$

Подставляя в эти уравнения $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \xi}$ из (9), $\frac{\partial y}{\partial \phi}$ из (10) и имея ввиду,

что $v_y = -\frac{\partial f}{\partial \phi}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \Phi} &= \frac{1}{gh} \frac{\partial v_y}{\partial h} \frac{v_y}{\sqrt{v^2 - v_y^2}} + \frac{1}{h \sqrt{v^2 - v_y^2}} = \\ &= -\frac{1}{gh} \frac{d}{dh} \sqrt{v^2 - v_y^2} = -\frac{1}{gh} \frac{dv_x}{dh}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\frac{\partial y}{\partial h} = \frac{v_y}{v_x} \left(\frac{1}{gh} \frac{d^2 v_y}{dh^2} \Phi - \frac{1}{gh^2} \frac{dv_y}{dh} \Phi + f_1 \right). \quad (28)$$

Интегрируя (27) получим

$$y = -\frac{1}{gh} \frac{dv_x}{dh} \Phi + f_2(h), \quad (29)$$

где $f_2(h)$ — произвольная функция.

Подставляя значение y в (28), после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{gh^2} \frac{dv_x}{dh} - \frac{1}{gh} \frac{d^2 v_x}{dh^2} - \frac{v_y}{v_x} \frac{1}{gh} \frac{d^2 v_y}{dh^2} + \frac{v_y}{v_x} \frac{1}{gh^2} \frac{dv_y}{dh} \right) \Phi + \\ &+ f_2(h) - \frac{v_y}{v_x} f_1(h) = 0. \end{aligned}$$

Из этого уравнения видно, что для существования выбранного движения необходимо, чтоб имели место следующие соотношения

$$\frac{1}{h} \frac{dv_x}{dh} - \frac{d^2 v_x}{dh^2} - \frac{v_y}{v_x} \frac{d^2 v_y}{dh^2} + \frac{v_y}{v_x} \frac{1}{h} \frac{dv_y}{dh} = 0, \quad (30)$$

$$f_2(h) - \frac{v_y}{v_x} f_1(h) = 0. \quad (31)$$

Уравнение (31) используется при установлении граничных условий. Обозначив угол наклона скорости через $\beta(h)$ и имея ввиду соотношения:

$$v_x = v \cos \beta = v_x(h), \quad v_y = v \sin \beta = v_y(h),$$

уравнение (30) можно преобразовать следующим образом

$$\begin{aligned}
 v_x \frac{d^2 v_x}{dh^2} - v_y \frac{d^2 v_y}{dh^2} - \frac{1}{h} \left(v_x \frac{dv_x}{dh} + v_y \frac{dv_y}{dh} \right) = \\
 = \frac{1}{2} \frac{d^2 v^2}{dh^2} - \left(\frac{dv}{dh} \cos \beta - v \sin \beta \frac{d\beta}{dh} \right)^2 - \\
 - \left(\frac{dv}{dh} \sin \beta + v \cos \beta \frac{d\beta}{dh} \right)^2 - \frac{1}{h} \frac{d}{dh} \frac{v^2}{2} = \\
 = v \frac{d^2 v}{dh^2} - v^2 \left(\frac{d\beta}{dh} \right)^2 - \frac{v}{h} \frac{dv}{dh}.
 \end{aligned}$$

Подставляя значение $\frac{dv}{dh}$, $\frac{d^2 v}{dh^2}$ из закона Бернулли, получим

$$\frac{g^2}{v^3} + v \left(\frac{d\beta}{dh} \right)^2 - \frac{g}{hv} = 0.$$

Из этого уравнения вытекает

$$\left(\frac{d\beta}{dh} \right)^2 = \frac{g}{hv^2} - \frac{g^2}{v^4} = \frac{gh}{h^2 v^2} \left(1 - \frac{g^2 h^2}{v^2} \right),$$

или

$$\left(\frac{d\beta}{dh} \right)^2 = \frac{c^2}{h^2 v^2} \left(1 - \frac{c^2}{v^2} \right), \quad (32)$$

где $c = \sqrt{gh}$ — скорость поверхностной волны.

Как показывает уравнение (32), для существования движения необходимо, чтобы в правой части выражение в скобке было положительным т. е. чтобы $v > c$ или $v > \sqrt{gh}$. Таким образом, отыскиваемое движение возможно только при скоростях, соответствующих сверхзвуковым потокам.

В этом случае задача решается до конца. Действительно, возьмем соотношения

$$\frac{d\beta}{dh} = \frac{d\beta}{dv} \cdot \frac{dv}{dh} = -\frac{g}{v} \cdot \frac{d\beta}{dv}.$$

Подставляя значение $\frac{d\beta}{dh}$ из (32), получим

$$\frac{d\beta}{dv} = \pm \frac{\sqrt{v^2 - c^2}}{cv}. \quad (33)$$

Принимая во внимание, что

$$\sin \alpha = \frac{c}{v},$$

где α есть угол Маха (угол между касательной к характеристике в данной точке и вектором скорости) уравнение (33) примет следующий вид

$$d\beta \pm \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{v} dv = 0. \quad (34)$$

Интеграл уравнения (34) есть*

$$\beta = \mp \left[\sqrt{3} \arctg \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{3}} \right) + \alpha \right] + \text{const.} \quad (35)$$

Уравнение (35) устанавливает связь между β и v вдоль характеристик. Как известно, если характеристики в плоскости (x, y) суть прямые линии, то задача решается точно.

Уравнение (35) представляет два (соответствующие двум знакам правой части) семейства линий, зависящих каждое от одного параметра. Эти кривые расположены между окружностями с радиусами $R_B = v_{kp}$ и $R_H = \sqrt{3} v_{kp}$, где $v_{kp} = \sqrt{2g \frac{\partial a}{3}}$. Легко доказать, что эти линии на плоскости (v_x, v_y) будут эллипсами.

Неизвестные функции $f_1(h)$ и $f_2(h)$ определяются из граничных условий.

Можно найти также уравнение линий тока. Для этого вычислим

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dh} &= \frac{d}{dh} (v \cos \beta) = -\frac{g}{v} \cos \beta \mp \frac{g}{v} v \sin \beta \cdot \frac{V \sqrt{v^2 - c^2}}{cv} = \\ &= -\frac{g}{v \sin \alpha} \left(\sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \frac{\sin \beta \cdot \sin \alpha}{c} V \sqrt{v^2 - c^2} \right) = \\ &= -\frac{g}{v \sin \alpha} \cdot \sin (\alpha \pm \beta). \end{aligned}$$

Таким же образом

$$\frac{dv_y}{dh} = \frac{d}{dh} (v \sin \beta) = \pm \frac{g}{v \sin \alpha} \cdot \cos (\alpha \pm \beta).$$

Из (35) можно вычислить $\sin (\alpha \pm \beta)$ и $\cos (\alpha \pm \beta)$. Подставляя значения $\frac{dv_x}{dh}$, $\frac{dv_y}{dh}$ в выражения (26) и (29) при значениях $\Phi = \text{const}$, получим уравнения линий тока в параметрическом виде

$$\begin{aligned} x &= \pm \frac{\cos (\alpha \pm \beta)}{h v \sin \alpha} \cdot \text{const} + f_1(h), \\ y &= \frac{\sin (\alpha \pm \beta)}{h \cdot v \cdot \sin \alpha} \cdot \text{const} + f_2(h). \end{aligned}$$

Таким образом, полученные результаты утверждают правильность выбранного метода.

* Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. 2, 1948.

Գ. Լ. Բարսեղյան

ԱՆՍԵՂՄԵԼԻ ՇԵՂՈՒԿԻ ԲԱՅ ՀՈՍԱՆՔԻ ՀԱՐԹ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ՝ Փ Ո Փ Ո Ի Մ

Աշխատության մեջ ուսումնասիրվում է անսեղմելի հեղուկի բաց հոսանքի հարթ խնդիրը ազատ մակերևույթի առկայությամբ, որը հավասարումների մեջ նանդիս է գալիս որպես անհայտ:

Հայտնի է, որ երբ արագությունն ունի պոտենցիալ, ապա տեղի ունեն

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

պայմանները: Այս դեպքում շարժման դիֆերենցիալ հա-

վասարումները անխզելիության հավասարման հետ միասին բերվում են մեկ երկրորդ կարգի ոչ դժվարին մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարման, որը բուռն հոսանքի դեպքում հիպերբոլական տիպի է և որի լուծումը տրվում է խառակաերեսայինների մեթոդով:

Այն դեպքում, երբ հեղուկի շարժման արագությունը չունի պոտենցիալ, այսինքն շարժումը մրբկալին է, վերը նշված հավասարումների սխառեման չի բերվում մեկ հավասարման և խնդրի լուծումը խիստ դժվարանում է: Հոգ-վածում ուսումնասիրվում է երկրորդ դեպքը, կառուցվում է այս դեպքի հա-մար $f(x, y)$ ֆունկցիան, որով արտահայտվում են v_x, v_y և իւ Ստացվում է նաեւ այն հավասարումը, որին բավարարում է $f(x, y)$ ֆունկցիան: Լուծված են մի քանի մասնավոր դեպքեր: