ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XIII, № 1, 1960 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. А. Хачатрян

Об устойчивости и колебаниях круглых трансверсально-изотропных пластинок

1. Рассмотрим круглую пластинку постоянной толщины h, изготовленную из трансверсально-изотропного материала. Принимаем, что плоскость изотропии параллельна срединной плоскости пластинки.

Цилиндрическая система координат (r, β, γ) выбрана так, что координатная плоскость $r\beta$ совпадает со срединной плоскостью пластинки.

Принимаются следующие гипотезы [1]:

а) нормальными напряжениями σ_γ на площадках, параллельных срединной плоскости, можно пренебречь по сравнению с прочими напряжениями;

б) Расстояние по нормали (γ) между двумя точками пластинки после деформации остается неизменным;

в) Для касательных напряжений $\tau_{r\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ имеем

$$\tau_{r\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4}-\gamma^2\right)\varphi(r, \beta), \qquad \tau_{\beta\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4}-\gamma^2\right)\psi(r, \beta), \tag{1.1}$$

где φ, ψ — искомые функции координат r, β.

В работе [2], при рассмотрении задачи изгиба круглых ортотропных пластинок, обладающих цилиндрической анизотропией, получена разрешающая система трех дифференциальных уравнений относительно трех искомых функций: нормального перемещения $w(r, \beta)$ и функций $\varphi(r, \beta)$ и $\psi(r, \beta)$. При принятых обозначениях эта система имеет вид

$$\frac{h^3}{12}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)+Z=0,$$

$$-B_{11}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)-(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right)+B_{22}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)+$$

$$+a_{55}\frac{h^2}{10}\left[B_{11}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+B_{66}\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}-B_{22}\frac{\varphi}{r}\right]-r\varphi+$$

$$+a_{44}\frac{h^2}{10}\left[(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\beta}-(B_{66}+B_{22})\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right]=0, \tag{1.2}$$

$$
-(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial r^2\partial\beta}-B_{22}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\beta}\right)+
$$

$$
+a_{55}\frac{h^2}{10}\left[(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\beta}+(B_{66}+B_{22})\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right]+
$$

$$
+a_{44}\frac{h^2}{10}\left[B_{66}\left(r\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{\psi}{r}\right)+B_{22}\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}\right]-r\psi=0,
$$

где Z — интенсивность нормально приложенной поверхностной нагрузки; B_{ik}, a_{44}, a_{55} — известные коэффициенты упругости [4].

В случае, когда пластинка изготовлена из трансверсально-изотропного материала, для коэффициентов упругости имеем

$$
B_{11}=B_{22}=\frac{E}{1-\nu^2},\qquad B_{12}=\frac{\nu E}{1-\nu^2},
$$

$$
B_{66}=\frac{E}{2(1+\nu)},\qquad a_{44}=a_{55}=\frac{1}{G'}, \tag{1.3}
$$

где E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона в плоскости изотропии; G' — модуль сдвига, характеризующий искажение углов между направлениями в плоскости изотропии и направлением, перпендикулярным к ней.

Учитывая (1.3), из системы (1.2) легко можно исключить φ и ψ. Тогда для w получим следующее дифференциальное уравнение

$$
D\Delta\Delta w=(1-ka^2\Delta)Z, \tag{1.4}
$$

где a — радиус пластинки,

$$
\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2},
$$

$$
D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},\quad k=\frac{1}{10(1-\nu^2)}\cdot\frac{E}{G'}\cdot\frac{h^2}{a^2}. \tag{1.5}
$$

При составлении уравнений рассматриваемых здесь задач устойчивости и колебаний круглых трансверсально-изотропных пластинок будем исходить из уравнения (1.4).

2. Пусть пластинка сжата в своей плоскости равномерно распределенной нагрузкой, нормальной к контуру и равной P на единицу длины.

Уравнение статической устойчивости получим, если в (1.4) заменим Z выражением [5, 6]

$$
Z=-P\Delta w, \tag{2.1}
$$

где Δ — оператор Лапласа в полярных координатах (1.5).

Подставляя (2.1) в (1.4), получим

$$
\Delta\Delta w+\frac{c^2}{a^2}\Delta w=0, \tag{2.2}
$$

где

$$c^2 = \frac{Pa^2}{D - Pka^2}. \tag{2.3}$$

Решение уравнения (2.2) имеет вид

$$w(r, \beta) = \left[C_1 J_n\left(c\frac{r}{a}\right) + C_2 Y_n\left(c\frac{r}{a}\right) + C_3\left(\frac{r}{a}\right)^n + C_4\left(\frac{r}{a}\right)^{-n}\right]\sin n\beta, \tag{2.4}$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$; J_n и Y_n — функции Бесселя соответственно первого и второго рода, порядка n. Постоянные интегрирования $C_1, \ldots C_4$ определяются из граничных условий.

Предположим, что рассматриваемая пластинка защемлена по всему контуру. При этом граничные условия будут:

при
$$r = a \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0. \tag{2.5}$$

Если пластинка сплошная (без отверстия в центре), надо положить $C_2 = C_4 = 0$. Тогда из условий (2.5) получим:

$$\begin{gathered} C_1 J_n(c) + C_3 = 0, \\ C_1\left[-\frac{n}{a}J_n(c) + \frac{c}{a}J_{n-1}(c)\right] + C_3\frac{n}{a} = 0. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Для определения постоянных C_1 и C_3 получили систему однородных уравнений. Приравнивая нулю определитель этой системы, для определения c получим следующее трансцендентное уравнение

$$2n J_n(c) - c J_{n-1}(c) = 0. \tag{2.7}$$

Это уравнение для каждого n имеет бесчисленное множество корней, среди которых наименьший получается при $n = 1$ и равен $c = 5{,}136$. Следовательно, учитывая (2.3), найдем значение критической силы

$$P^* = \frac{26{,}38\ D}{a^2(1 + 26{,}38\ k)}. \tag{2.8}$$

Принимая здесь $k = 0$, получим значение критической силы, вычисленное по классической теории пластинок.

Как и следовало ожидать [3], в отличие от классической теории, критическая сила (2.8) зависит также от коэффициента k, т. е. от отношения упругих постоянных E/G' и отношения h/a.

В таблице 1 приведены значения коэффициента k и отношения критической силы (2.8) к критической силе, вычисленной по классической теории пластинок ($P^*_{kл} = 26{,}38D/a^2$) для различных значений отношения E/G' при $\frac{h}{a} = 0{,}1$ и $\nu = 0{,}3$.

Из таблицы 1 замечаем, что при увеличении коэффициента k увеличивается расхождение между значениями критических сил, вычисленными по формуле (2.8) и по классической теории пластинок.

Таблица 1

E/G'	0	2.6	5	10	20
k	0	0.0029	0,0055	0,0110	0.0220
$P^*/P^*_{кл}$	1.0	0.929	0.873	0.775	0.633

3. Уравнение свободных колебаний ненагруженной пластинки получим, если в (1.4) заменим Z выражением

$$-Z = -\frac{\gamma_0 h}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{3.1}$$

где γ_0 — удельный вес материала пластинки, g — ускорение силы тяжести.

Подставляя (3.1) в (1.4), получим

$$\Delta\Delta w + \frac{\gamma_0 h}{gD}(1 - ka^2\Delta)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \tag{3.2}$$

Принимая

$$w(r, \beta, t) = W(r, \beta)\sin\omega t$$

и подставляя в (3.2), получим

$$\Delta\Delta W - \frac{\gamma_0 h}{gD}\omega^2(1 - ka^2\Delta)W = 0. \tag{3.3}$$

Уравнение собственных колебаний (3.3) и граничные условия (2.5) будут удовлетворены, если положить

$$W(r, \beta) = \left| I_n(\mu'_{nj})J_n\left(\mu_{nj}\frac{r}{a}\right) - J_n(\mu_{nj})J_n\left(\mu'_{nj}\frac{r}{a}\right)\right|\cos n\beta \tag{3.4}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots;\ j = 1, 2, 3, \ldots),$$

где J_n — и I_n — функции Бесселя первого рода вещественного и чисто мнимого аргументов порядка n,

$$\mu'_{nj} = \mu_{nj}/\sqrt{1 + k\mu^2_{nj}},$$

μ_{nj} — корни уравнения, получающиеся из второго условия (2.5)

$$I_n(\mu'_{nj})\frac{d}{dr}\left[J_n\left(\mu_{nj}\frac{r}{a}\right)\right]_{r=a} - J_n(\mu_{nj})\frac{d}{dr}\left[I_n\left(\mu'_{nj}\frac{r}{a}\right)\right]_{r=a} = 0, \tag{3.6}$$

которое можно написать в виде

$$\mu_{nj}I_n(\mu'_{nj})J_{n-1}(\mu_{nj}) - \mu'_{nj}J_n(\mu_{nj})I_{n-1}(\mu'_{nj}) = 0. \tag{3.7}$$

При этом для частот собственных колебаний ω_{nj} имеем

$$\omega^2_{nj} = \frac{gD}{a^4\gamma_0 h}\mu^2_{nj}\mu'^2_{nj}. \tag{3.8}$$

Принимая в (3.8) $k=0$, получим собственные частоты рассматриваемой пластинки, вычисленные по классической теории пластинок.

Отметим, что корни уравнения (3.7) зависят от коэффициента k, т. е. от отношения упругих постоянных E/G', коэффициента Пуассона и отношения h/a. Следовательно, для нахождения корней уравнения (3.7) необходимо иметь значение коэффициента k.

Ниже приводим корни уравнения (3.7), заключенные в интервале $0<\mu_{nj}<10$ при $n=0, 1, 2$ для двух значений коэффициента k:

при $k=0$ $\quad \mu_{01}=3{,}196, \quad \mu_{02}=6{,}306, \quad \mu_{03}=9{,}439;$

$\mu_{11}=4{,}611, \quad \mu_{12}=7{,}799,$

$\mu_{21}=5{,}906, \quad \mu_{22}=9{,}197,$

при $k=0{,}0011$ $\quad \mu_{01}=3{,}224, \quad \mu_{02}=6{,}399, \quad \mu_{03}=9{,}612;$

$\mu_{11}=4{,}662, \quad \mu_{12}=7{,}928,$

$\mu_{21}=5{,}981, \quad \mu_{22}=9{,}356.$

В таблице 2 приведены значения отношения частот ω_{nj} (3.8) при $k=0{,}011$ к соответствующим частотам $\overset{0}{\omega}_{nj}$, вычисленным по классической теории пластинок ($k=0$).

Таблица 2

	$n=0, j=1$	$n=0, j=2$	$n=0, j=3$	$n=1, j=1$	$n=1, j=2$	$n=2, j=1$	$n=2, j=2$
$\omega_{nj}/\overset{0}{\omega}_{nj}$	0,964	0,855	0,730	0,918	0,795	0,869	0,739

Из этой таблицы замечаем, что, как и следовало ожидать [3], частоты собственных колебаний (ω_{nj}), вычисленные при $k=0{,}011$, заметно отличаются от соответствующих величин ($\overset{0}{\omega}_{nj}$), найденных по классической теории пластинок ($k=0$). Причем это отличие тем больше, чем больше n и j. Вычисления показывают, что это отличие также увеличивается при увеличении коэффициента k.

4. Пусть нагрузка, равномерно распределенная по контуру пластинки (см. п. 2), меняется периодически во времени.

Уравнение динамической устойчивости получим, если в (1.4) заменим Z выражением

$$Z=-P\Delta w-\frac{\gamma_0 h}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{4.1}$$

Подставляя (4.1) в (1.4), получим

$$(D-Pka^2)\Delta\Delta w+P\Delta w+\frac{\gamma_0 h}{g}(1-ka^2\Delta)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0. \tag{4.2}$$

Представим $w(r, \beta, t)$ в следующем виде

$$w=T_{nj}(t)\left[I_n(\mu'_{nj})J_n\left(\mu_{nj}\frac{r}{a}\right)-J_n(\mu_{nj})I_n\left(\mu'_{nj}\frac{r}{a}\right)\right]\cos n\beta. \tag{4.3}$$

фактически принимая, что форма изгиба зажатой по контуру круглой пластинки совпадает с формой свободных колебаний ненагруженной пластинки. При этом удовлетворяются граничные условия задачи (2.5), так как остаются в силе формулы (3.5) и (3.8).

Ясно, что (4.3) не будет удовлетворять уравнению (4.2). Уравнению (4.2) будем удовлетворять приближенно, пользуясь вариационным методом Галеркина.

Подставим (4.3) в (4.2) и полученное выражение умножив на

$$\left[I_n(\mu'_{nj}) J_n\left(\mu_{nj}\frac{r}{a}\right) - J_n(\mu_{nj}) I_n\left(\mu'_{nj}\frac{r}{a}\right)\right] \cos n\beta\, r dr\, d\beta$$

проинтегрируем по всей площади пластинки.

Учитывая, что [9]

$$\int_0^a J_n^2\left(\mu_{nj}\frac{r}{a}\right) r dr = \frac{a^2}{2}\left\{ [J'_n(\mu_{nj})]^2 + \left(1 - \frac{n^2}{\mu_{nj}^2}\right) J_n^2(\mu_{nj}) \right\},$$

$$\int_0^a I_n^2\left(\mu'_{nj}\frac{r}{a}\right) r dr = -\frac{a^2}{2}\left\{ [I'_n(\mu'_{nj})]^2 - \left(1 + \frac{n^2}{\mu'^2_{nj}}\right) I_n^2(\mu'_{nj}) \right\},$$

$$\int_0^a J_n\left(\mu_{nj}\frac{r}{a}\right) I_n\left(\mu'_{nj}\frac{r}{a}\right) r dr = \frac{a^2}{\mu_{nj}^2 + \mu'^2_{nj}} \Big[\mu'_{nj} J_n(\mu_{nj}) I'_n(\mu'_{nj}) -$$

$$- \mu_{nj} I_n(\mu'_{nj}) J'_n(\mu_{nj}) \Big],$$

где в силу (3.6) последний интеграл обращается в нуль, после некоторых преобразований для T_{nj} получим следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 T_{nj}}{dt^2} + \omega_{nj}^2 \left(1 - \frac{Pa^2}{D\mu_{nj}^2 \mu'^2_{nj}} \cdot \frac{b_2}{b_1}\right) T_{nj} = 0, \tag{4.4}$$

где

$$b_1 = \mu_{nj}^4 + \mu'^4_{nj} + (\mu_{nj}^2 - \mu'^2_{nj}) \left\{ \mu_{nj}^2 \left[\frac{J'_n(\mu_{nj})}{J_n(\mu_{nj})}\right]^2 - n^2 \right\},$$

$$b_2 = (\mu_{nj}^4 + \mu'^4_{nj}) \left\{ \mu_{nj}^2 \left[\frac{J'_n(\mu_{nj})}{J_n(\mu_{nj})}\right]^2 - n^2 \right\} + \mu_{nj}^6 - \mu'^6_{nj}. \tag{4.5}$$

Принимая $P = P_0 \cos \theta t$ и учитывая, что

$$P_{nj}^* = \frac{D\mu_{nj}^2 \mu'^2_{nj}}{a^2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \tag{4.6}$$

представляет собой приближенное (в смысле метода Галеркина) значение критической силы, уравнение (4.4) можно написать в следующем виде

$$\frac{d^2T_{nj}}{dt^2}+\omega_{nj}^2(1-2\lambda_{nj}\cos\theta t)\,T_{nj}=0, \tag{4.7}$$

где

$$\lambda_{nj}=P_0/2P_{nj}^*. \tag{4.8}$$

Уравнение (4.7) представляет собой известное уравнение Матье, которое при некоторых соотношениях между его коэффициентами имеет неограниченно возрастающие решения. Этим решениям будут соответствовать области динамической неустойчивости рассматриваемой задачи.

Границы областей динамической неустойчивости можно определить по следующим приближенным формулам [8]:

$$\frac{\theta^*}{2\omega_{nj}}=\sqrt{1\pm\lambda_{nj}} \tag{4.9}$$

для первой (главной) области неустойчивости,

$$\frac{\theta^*}{2\omega_{nj}}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{3}\lambda_{nj}^2}\,,\quad \frac{\theta^*}{2\omega_{nj}}=\frac{1}{2}\sqrt{1-2\lambda_{nj}^2} \tag{4.10}$$

для второй области неустойчивости,

$$\frac{\theta^*}{2\omega_{nj}}=\frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{9\lambda_{nj}^2}{8\pm9\lambda_{nj}}} \tag{4.11}$$

для третьей области неустойчивости и т. д., где θ^* — критические частоты внешней нагрузки, т. е. частоты внешней нагрузки, соответствующие границам областей неустойчивости.

Отметим, что формулы (4.9)—(4.11), определяющие границы областей динамической неустойчивости, внешне ничем не отличаются от аналогичных формул, полученных исходя из классической теории пластинок ($k=0$). Но отличие несомненно имеется. Оно заключается в самих величинах ω_{nj} и P_{nj}^*.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 31 X 1959

Ա. Ա. Խաչատրյան

ԿԼՈՐ ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ-ԻԶՈՏՐՈՊ ՍԱԼԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկված սալերի համար ընդունված են Ս. Ա. Համբարձումյանի առաջարկած [1] հետևյալ հիպոթեզները՝

ա) սալի միջին հարթությանը զուգահեռ հարթակներում գործող նորմալ լարումները կարելի է արհամարհել մյուս լարումների նկատմամբ,

բ) սալի որևէ երկու կետերի միջև նորմալ (γ) ուղղությամբ եղած հեռավորությունը դեֆորմացիայից հետո մնում է անփոփոխ,

գ) τ_{xz} և τ_{yz} շոշափող լարումները ըստ սալի հաստության փոխվում են պարաբոլական օրենքով (1.1):

Կոր օրթոտրոպ սալերի ձևման համար բերված հավասարումների սիստեմը (1.2) ստացված է [2] աշխատանքի հիման վրա:

Տրանսվերսալ-իզոտրոպ նյութից պատրաստված սալերի դեպքում (1.2) սիստեմից ճկվածքի համար ստացված է (1.4) հավասարումը: (1.4) հավասարման մեջ փոխարինելով Z-ը (2.1), (3.1) և (4.1) արտահայտություններով, ստացված են համապատասխանաբար ստատիկ կայունության, սեփական տատանումների և դինամիկ կայունության խնդիրները:

Լուծված են հետևյալ խնդիրները՝ ա) ստատիկ կայունության խնդիրները (2-րդ կետ), երբ սալը սեղմված է ամբողջ եզրով հավասարաչափ բաշխված P ինտենսիվությամբ ուժով. բ) դինամիկ կայունության խնդիրը (4-րդ կետ), երբ վերոհիշյալ ուժը ժամանակի ընթացքում փոփոխվում է պարբերաբար (կոսինուսի օրենքով). գ) չբեռնավորված սալի սեփական տատանումների խնդիրը (3-րդ կետ): Այս բոլոր դեպքերի համար ընդունված է, որ դիտարկվող սալն ամրակցված է ամբողջ եզրով:

Ստացված բանաձևերը և նրանց հիման վրա կատարված թվային հաշվումները ցույց է տալիս, որ այստեղ բերված մեծությունները (կրիտիկական ուժը, սեփական տատանումների հաճախականությունը և այլն), կախված k (1.5) գործակցից, զգալիորեն տարբերվում են կլասիկ տեսությամբ ստացված համապատասխան մեծություններից:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* К теории изгиба анизотропных пластинок. Известия АН СССР, ОТН, 5, 1958.
2. *Амбарцумян С. А., Пештмалджян Д. В.* К теории ортотропных оболочек и пластинок. Известия АН АрмССР, т. 12, 1, 1959.
3. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Об устойчивости и колебаниях анизотропных пластинок. ДАН АрмССР, т. XXIX, № 4, 1959.
4. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. Гостехиздат, 1957.
5. *Галеркин Б. Г.* Собрание сочинений, т. II. Изд. АН СССР, 1953.
6. *Филипов А. П.* Колебания упругих систем. Изд. АН УССР, 1956.
7. *Боднер Б. А.* Устойчивость пластин под действием периодических сил. ПММ, т. II, в. 1, 1938.
8. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, 1956.
9. *Грей Э.* и *Мэтьюз Г. Б.* Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Изд. И. Л., 195?.