

Н. О. Гулканян

О кручении призматических стержней прямоугольного сечения с двумя симметричными прямоугольными полостями

Решена задача о кручении призматического стержня прямоугольного поперечного сечения, имеющего два симметрично расположенных выреза. При решении использован метод сведения задач кручения к вполне регулярным бесконечным системам [1]. Удовлетворение граничных условий приводит к совокупности четырех бесконечных систем линейных уравнений. Доказана вполне регулярность этих систем. Получены формулы для определения жесткости и напряжений. В качестве численного примера вычислены напряжения и жесткость призматического стержня прямоугольного сечения с соотношением сторон 1:2, имеющего два симметричных квадратных выреза. Жесткость такого стержня сопоставлена с жесткостью стержня, поперечное сечение которого имеет один вырез и площадь, равную половине площади сечения данного стержня.

Кручению призматических стержней прямоугольного поперечного сечения с одним прямоугольным вырезом посвящены работы [2] и [3].

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу кручения призматического стержня прямоугольного поперечного сечения $CQVW$ (фиг. 1) с двумя симметрично расположенными полостями $PRST$ и $GNMH$. Оси x и y направим по осям симметрии.

Функция напряжений $U(x, y)$ при кручении удовлетворяет внутри области поперечного сечения уравнению Пуассона

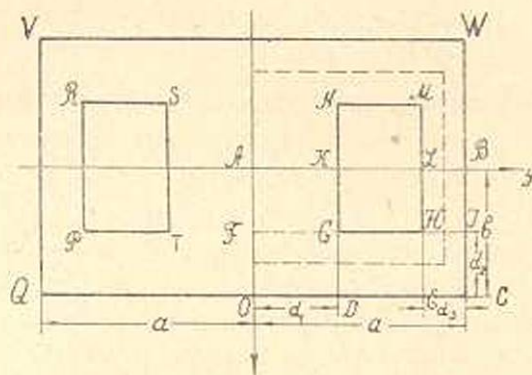
$$\nabla^2 U(x, y) = -2, \quad (1.1)$$

а на контурах сечения принимает постоянные значения, причем одно из этих постоянных может быть принято равным нулю.

В данной задаче принято, что функция напряжений $U(x, y)$ равна нулю на внешнем контуре сечения. В силу симметрии области поперечного сечения на обоих внутренних контурах функция напря-

жений принимает одно и то же постоянное значение U_0 , а решение ищется только в области $OAKGHLBCO$. Чтобы распространить решение на всю область сечения, потребуем, чтобы на осях симметрии нормальные производные функции напряжений обращались в нуль, т. е.

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (1.2)$$



Фиг. 1

Пусть

$$U(x, y) = \begin{cases} U_1(x, y) & \text{в области } AKDOA, \\ U_2(x, y) & \text{в области } OFICO, \\ U_3(x, y) & \text{в области } LBCOL. \end{cases} \quad (1.3)$$

Функции $U_i(x, y)$ ($i = 1, 2, 3$), в силу вышесказанного, должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial U_1}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0, \quad \left. \frac{\partial U_1}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad U_1(b, y) = 0, \\ U_1(x, d_1) &= \begin{cases} U_0 & \text{при } 0 \leq x \leq b - d_2, \\ U_2(x, d_1) & \text{при } b - d_2 \leq x \leq b, \end{cases} \\ \left. \frac{\partial U_2}{\partial y} \right|_{y=a} &= 0, \quad U_2(b, y) = 0, \quad U_2(x, a) = 0, \\ U_2(b - d_2, y) &= \begin{cases} U_1(b - d_2, y) & \text{при } 0 \leq y \leq d_1, \\ U_0 & \text{при } d_1 \leq y \leq a - d_3, \\ U_3(b - d_2, y) & \text{при } a - d_3 \leq y \leq a, \end{cases} \\ \left. \frac{\partial U_3}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0, \quad U_3(x, a) = 0, \quad U_3(b, y) = 0, \\ U_3(x, a - d_3) &= \begin{cases} U_0 & \text{при } 0 \leq x \leq b - d_2, \\ U_2(x, a - d_3) & \text{при } b - d_2 \leq x \leq b. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Введем вспомогательные функции [1] $\Phi_i(x, y)$ ($i=1, 2, 3, 4$), т. е. функции напряжений $U_i(x, y)$ ($i=1, 2, 3$) будем искать в виде:

$$\begin{aligned} U_1(x, y) &= \psi_1(x, y) + \begin{cases} 0 & \text{в области } AKGFA, \\ \Phi_1(x, y) & \text{в } FGDOF, \end{cases} \\ U_2(x, y) &= \psi_2(x, y) + \begin{cases} 0 & \text{в } GHEDG, \\ \Phi_2(x, y) & \text{в } FGDOF, \\ \Phi_4(x, y) & \text{в } HICEH, \end{cases} \\ U_3(x, y) &= \psi_3(x, y) + \begin{cases} 0 & \text{в } LBIHL, \\ \Phi_3(x, y) & \text{в } HICEH. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Вспомогательные функции $\Phi_i(x, y)$ ($i=1, 2, 3, 4$) удовлетворяют уравнению Лапласа, т. е.

$$\nabla^2 \Phi_i(x, y) = 0 \quad (i=1, 2, 3, 4), \quad (1.6)$$

следовательно, функции $\psi_i(x, y)$ должны удовлетворять, согласно (1.1), уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \psi_i(x, y) = -2. \quad (1.7)$$

Из (1.4) получим граничные условия для функций $\psi_i(x, y)$ ($i=1, 2, 3$) и $\Phi_i(x, y)$ ($i=1, 2, 3, 4$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \psi_1(b, y) + \Phi_1(b, y) = 0, \\ \psi_1(x, d_1) &= U_0, \quad \psi_2(b-d_2, y) = U_0, \quad \psi_2(b, y) = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \Big|_{y=0} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \Big|_{y=0} &= 0, \quad \psi_2(x, a) + \Phi_4(x, a) = 0, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, \quad \psi_3(x, a-d_3) = U_0, \quad \psi_3(x, a) = 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\psi_3(b, y) + \Phi_3(b, y) = 0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \Phi_2(b, y) = 0,$$

$$\Phi_4(b, y) = 0, \quad \Phi_3(x, a) = 0.$$

Для непрерывности решения надо потребовать, чтобы на линиях контакта удовлетворялись условия:

$$\begin{aligned} \Phi_1(b-d_2, y) &= 0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \Big|_{x=b-d_2} = 0, \quad \Phi_1(x, d_1) = \psi_2(x, d_1) - U_0, \\ \Phi_2(x, d_1) &= 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \Big|_{y=d_1} = 0, \quad \Phi_2(b-d_2, y) = \psi_1(b-d_2, y) - U_0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\Phi_4(x, a-d_3)=0, \quad \left. \frac{\partial \Phi_4}{\partial y} \right|_{y=a-d_3}=0, \quad \Phi_4(b-d_2, y)=\psi_3(b-d_2, y)-U_0,$$

$$\Phi_3(b-d_2, y)=0, \quad \left. \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \right|_{x=b-d_2}=0, \quad \Phi_3(x, a-d_3)=\psi_2(x, a-d_3)-U_0.$$

Граничные условия для функций $\Phi_i(x, y)$ и $\psi_i(x, y)$ неоднородны. Согласно Гринбергу [4], решение ищем в такой же форме, как и при однородных граничных условиях

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} H_k(x) \cos \frac{(2k-1)\pi y}{2d_1}, \quad \psi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(y) \sin \frac{k\pi(b-x)}{d_2}, \\ \psi_3(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x) \sin \frac{k\pi}{d_3}(a-y), \quad \Phi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k(x) \cos \frac{(2k-1)\pi y}{2d_1}, \\ \Phi_2(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \sin \frac{k\pi}{d_2}(b-x), \quad \Phi_3(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} L_k(x) \sin \frac{k\pi}{d_3}(a-y), \\ \Phi_4(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} K_k(y) \sin \frac{k\pi}{d_2}(b-x), \end{aligned}$$

(1.10)

где

$$\begin{aligned} H_k(x) &= \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \psi_1(x, y) \cos \frac{(2k-1)\pi y}{2d_1} dy, \\ U_k(y) &= \frac{2}{d_2} \int_{b-d_2}^b \psi_2(x, y) \sin \frac{k\pi(b-x)}{d_2} dx, \\ V_k(x) &= \frac{2}{d_3} \int_{a-d_3}^a \psi_3(x, y) \sin \frac{k\pi}{d_3}(a-y) dy, \\ W_k(x) &= \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \Phi_1(x, y) \cos \frac{(2k-1)\pi y}{2d_1} dy, \\ Y_k(y) &= \frac{2}{d_2} \int_{b-d_2}^b \Phi_2(x, y) \sin \frac{k\pi}{d_2}(b-x) dx, \\ L_k(x) &= \frac{2}{d_3} \int_{a-d_3}^a \Phi_3(x, y) \sin \frac{k\pi}{d_3}(a-y) dy, \end{aligned}$$

(1.10')

$$h_k(y) = \frac{2}{d_2} \int_{b-d_2}^b \Phi_1(x, y) \sin \frac{k\pi}{d_2} (b-x) dx.$$

Умножая каждое из уравнений (1.7) и (1.6) соответственно: уравнение для $\psi_1(x, y)$ на $\frac{2}{d_1} \cos \frac{(2k-1)\pi y}{2d_1}$ и интегрируя его от нуля до d_1 , уравнение для $\psi_2(x, y)$ на $\frac{2}{d_2} \sin \frac{k\pi}{d_2} (b-x)$ и интегрируя от $b-d_2$ до b и т. д. аналогично (1.10'), получим линейные дифференциальные уравнения для определения функций $H_k(x)$, $U_k(y)$, ..., $K_k(y)$:

$$\begin{aligned} H_k''(x) - \xi_k^2 H_k(x) &= \frac{2\zeta_k}{d_1} U_0(-1)^k - \frac{8(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)}, \\ U_k''(y) - \eta_k^2 U_k(y) &= \frac{2\eta_k}{d_2} U_0(-1)^k - \frac{4}{k\pi} [1 - (-1)^k], \\ V_k''(x) - \zeta_k^2 V_k(x) &= \frac{2\zeta_k}{d_3} U_0(-1)^k - \frac{4}{k\pi} [1 - (-1)^k], \\ W_k''(x) - \xi_k^2 W_k(x) &= \frac{2\zeta_k}{d_1} (-1)^k \sum_{p=1}^{\infty} U_p(d_1) \sin \eta_p(b-x) + \\ &\quad + \frac{2\zeta_k}{d_1} U_0(-1)^{k+1}, \\ Y_k''(y) - \eta_k^2 Y_k(y) &= \frac{2\eta_k}{d_2} (-1)^k \sum_{p=1}^{\infty} H_p(b-d_2) \cos \xi_p y + \frac{2\eta_k U_0}{d_2} (-1)^{k+1}, \\ L_k''(x) - \xi_k^2 L_k(x) &= \frac{2\zeta_k}{d_3} (-1)^k \sum_{p=1}^{\infty} U_p(a-d_3) \sin \eta_p(b-x) + \\ &\quad + \frac{2\zeta_k}{d_3} U_0(-1)^{k+1}, \\ K_k''(y) - \eta_k^2 K_k(y) &= \frac{2\eta_k}{d_2} (-1)^k \sum_{p=1}^{\infty} V_p(b-d_2) \sin \zeta_p(a-y) + \\ &\quad + \frac{2\eta_k}{d_2} U_0(-1)^{k+1}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где обозначено

$$\frac{(2k-1)\pi}{2d_1} = \xi_k, \quad \frac{k\pi}{d_2} = \eta_k, \quad \frac{k\pi}{d_3} = \zeta_k. \quad (1.12)$$

§ 2. Решение уравнений задачи. Исследование бесконечных систем

Из условий (1.8) и (1.9) получим граничные условия, которым должны удовлетворять функции $H_k(x)$, $U_k(y)$, ..., $K_k(y)$:

$$\begin{aligned} H'_k(x)|_{x=0} &= 0, \quad V'_k(x)|_{x=0} = 0, \quad W'_k(b-d_2) = 0, \\ W'_k(b-d_2) &= 0, \quad K'_k(a-d_2) = 0, \quad K'_k(a-d_3) = 0, \\ Y'_k(d_1) &= 0, \quad Y'_k(d_1) = 0, \quad L'_k(b-d_2) = L'_k(b-d_3) = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} H_k(b) + W_k(b) &= 0, \quad V_k(b) + L_k(b) = 0, \\ U_k(a) + K_k(a) &= 0, \quad U_k(0) + Y_k(0) = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Решая дифференциальные уравнения (1.11) и удовлетворяя условиям (2.1), получим значения функций $H_k(x)$, $U_k(y)$, ... и $K_k(y)$. В выражениях функций $H_k(x)$, $V_k(x)$ и $U_k(y)$ войдут постоянные интегрирования A_k , E_k , C_k и D_k , для определения которых подставим полученные выражения функций $H_k(x)$, $V_k(x)$, ..., $U_k(y)$ в (2.2). В результате получим совокупность четырех бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Удобно вместо постоянной C_k ввести новую постоянную F_k :

$$C_k = \operatorname{sch} \eta_k a [-D_k \operatorname{sh} \eta_k a + F_k]. \quad (2.3)$$

Сделаем подстановку

$$\begin{aligned} \alpha \frac{(2k-1)(-1)^k}{2} A_k \operatorname{ch} \xi_k (b-d_2) &= M_k, \\ \alpha k (-1)^k E_k \operatorname{ch} \zeta_k (b-d_2) &= N_k, \\ k (-1)^k [F_k \operatorname{ch} \eta_k d_1 \operatorname{sch} \eta_k a - D_k \operatorname{sh} \eta_k (a-d_1) \cdot \operatorname{sch} \eta_k a] &= G_k, \\ k (-1)^k [F_k \operatorname{ch} \eta_k (a-d_3) \cdot \operatorname{sch} \eta_k a - D_k \operatorname{sh} \eta_k d_3 \cdot \operatorname{sch} \eta_k a] &= H_k. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь α — некоторый постоянный множитель, величина которого будет определена в дальнейшем.

Для определения M_k , N_k , G_k и H_k получим совокупность бесконечных систем линейных уравнений

$$\begin{aligned} M_k &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{11} G_p + b_k^1, \\ N_k &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{21} H_p + b_k^2, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$G_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{31} N_p + \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{32} M_p + b_k^{11},$$

$$H_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{41} N_p + \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{42} M_p + b_k^{1V},$$

где

$$a_{kp}^{11} = \frac{2\alpha d_2 \xi_k}{(\pi p)^2 + (d_2 \xi_k)^2} \operatorname{sh} \xi_k d_2 \cdot \operatorname{sch} \xi_k b \cdot \operatorname{ch} \xi_k (b - d_2),$$

$$b_k^1 = \frac{2U_0 \alpha}{\pi d_2 \xi_k} \operatorname{sh} \xi_k d_2 \cdot \operatorname{sch} \xi_k b \cdot \operatorname{ch} \xi_k (b - d_2) - \\ - \frac{2d_2 \alpha}{\pi \xi_k} \operatorname{sh} \xi_k d_2 \cdot \operatorname{sch} \xi_k b \cdot \operatorname{ch} \xi_k (b - d_2) + \\ + \frac{4\alpha}{\pi \xi_k^2} \operatorname{ch} \xi_k d_2 \cdot \operatorname{sch} \xi_k b \cdot \operatorname{ch} \xi_k (b - d_2),$$

.....

$$a_{kp}^{41} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{2d_3 \tau_{ik}}{(p\pi)^2 + (d_3 \tau_{ik})^2} \operatorname{sh} \tau_{ik} d_3 \cdot \operatorname{sch} \tau_{ik} a \cdot \operatorname{ch} \tau_{ik} (a - d_3),$$

$$a_{kp}^{42} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{8d_1 \tau_{ik}}{\pi^2 (2k-1)^2 + (2d_1 \tau_{ik})^2} \operatorname{ch} \tau_{ik} d_1 \cdot \operatorname{sch} \tau_{ik} a \cdot \operatorname{sh} \tau_{ik} d_3. \quad (2.6)$$

$$b_k^{1V} = \frac{2U_0}{\pi d_3 \tau_{ik}} \operatorname{sh} \tau_{ik} d_3 \cdot \operatorname{sch} \tau_{ik} a \cdot \operatorname{ch} \tau_{ik} (a - d_3) - \frac{2d_3}{\pi \tau_{ik}} \operatorname{sh} \tau_{ik} d_3 \cdot \operatorname{sch} \tau_{ik} a \times \\ \times \operatorname{ch} \tau_{ik} (a - d_3) + \frac{4d_1}{\pi \tau_{ik}} \operatorname{ch} \tau_{ik} d_1 \cdot \operatorname{sch} \tau_{ik} a \cdot \operatorname{sh} \tau_{ik} d_3 + \\ + \frac{4}{\pi \tau_{ik}^2} \operatorname{sh} \tau_{ik} d_1 \cdot \operatorname{sch} \tau_{ik} a \cdot \operatorname{sh} \tau_{ik} d_3 + \frac{4}{\pi \tau_{ik}^2} \operatorname{ch} \tau_{ik} d_3 \cdot \operatorname{sch} \tau_{ik} a \cdot \operatorname{ch} \tau_{ik} (a - d_3) - \\ - \frac{4(-1)^k}{\pi \tau_{ik}^2} \operatorname{ch} \tau_{ik} (a - d_3) \cdot \operatorname{sch} \tau_{ik} a.$$

Если положить

$$H_k = Z_{4k}, \quad N_k = Z_{4k-2}, \quad G_k = Z_{4k-1}, \quad M_k = Z_{4k-3},$$

$$C_{4k-3, 4p} = C_{4k-3, 4p-2} = C_{4k-3, 4p-3} = 0, \quad C_{4k-3, 4p-1} = a_{kp}^{11}, \quad \gamma_{4k-3} = b_k^1,$$

$$C_{4k-2, 4p} = a_{kp}^{21}, \quad C_{4k-2, 4p-1} = C_{4k-2, 4p-2} = C_{4k-2, 4p-3} = 0, \quad \gamma_{4k-2} = b_k^{1V}, \quad (2.7)$$

$$C_{4k-1, 4p-2} = a_{kp}^{31}, \quad C_{4k-1, 4p-3} = a_{kp}^{32}, \quad \gamma_{4k-1} = b_k^{11},$$

$$C_{4k+1, 4p} = C_{4k+1, 4p-1} = 0, \quad \gamma_{4k+1} = b_k^{1V}, \quad C_{4k, 4p-2} = a_{kp}^{41},$$

$$C_{4k, 4p-4} = a_{kp}^{42}, \quad C_{4k, 4p-1} = C_{4k, 4p} = 0,$$

то совокупность систем (2.5) можно представить в виде одной системы:

$$Z_\nu = \sum_{p=1}^{\infty} C_{\nu p} Z_p + \gamma_\nu, \quad (\nu = 1, 2, \dots). \quad (2.8)$$

Можно показать, что для всех ν при $d_3 > 2d_1$, если придать α значение

$$\alpha = \sqrt{\frac{1 + e^{-\frac{\pi}{d_2}(a-d_1-d_3)}}{1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(b-d_2)}}},$$

то

$$\sum_{p=1}^{\infty} |C_{\nu p}| \leq \frac{1}{2} \sqrt{\left[1 + e^{-\frac{2\pi(b-d_2)}{d_2}}\right] \left[1 + e^{-\frac{\pi(a-d_1-d_3)}{d_2}}\right]},$$

а при $d_3 < 2d_1$, выбирая α

$$\alpha = \sqrt{\frac{1 + e^{-\frac{\pi}{d_2}(a-d_1-d_3)}}{1 + e^{-\frac{\pi}{d_1}(b-d_2)}}},$$

будем иметь

$$\sum_{p=1}^{\infty} |C_{\nu p}| \leq \frac{1}{2} \sqrt{\left[1 + e^{-\frac{\pi(b-d_2)}{d_1}}\right] \left[1 + e^{-\frac{\pi(a-d_1-d_3)}{d_2}}\right]},$$

т. е. в обоих случаях $\sum_{p=1}^{\infty} |C_{\nu p}| \leq 1 - \theta$ для любого ν и $\theta > 0$. Следовательно, система (2.8) вполне регулярна.

Система (2.8) остается вполне регулярной и тогда, когда вырезы вырождаются как в продольные, так и в поперечные трещины.

Свободные члены γ_ν системы (2.8) ограничены и, следовательно, система имеет ограниченные решения.

Решив систему, согласно (2.7) получим значения постоянных H_k , N_k , G_k , M_k , а следовательно, в силу (2.4) и значения постоянных интегрирования A_k , E_k , D_k и F_k . Этим будут определены функции $H_k(x)$, $V_k(y)$ и $U_k(y)$. Подставляя в (1.10) значения функций $H_k(x)$, $U_k(y)$, ..., $K_k(y)$, на основании (1.6) получим значения функций напряжений $U_i(x, y)$ ($i=1, 2, 3$) во всей области поперечного сечения

$$U_1(x, y) = U_0 + (d_1^2 - y^2) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} Z_{4k-3} \cdot \operatorname{ch} \tilde{\epsilon}_k x \times \\ \times \operatorname{sch} \tilde{\epsilon}_k (b - d_2) \cdot \cos \tilde{\epsilon}_k y \\ 0 \leq x \leq b - d_2, \\ 0 \leq y \leq d_1,$$

$$\begin{aligned}
 U_1(x, y) = & \frac{U_0}{d_2} (b-x) + (b-x)(d_2-b+x) + \frac{2}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} \cdot Z_{4k-3} \times \\
 & \times \operatorname{sh} \xi_k (b-x) \cdot \operatorname{csch} \xi_k d_2 \cdot \cos \xi_k y + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot Z_{4k-1} \operatorname{ch} \eta_k y \times \\
 & \times \operatorname{sch} \eta_k d_1 \sin \eta_k (b-x) + \frac{32 d_1^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} \operatorname{sh} \xi_k (b-x) \times \\
 & \times \operatorname{csch} \xi_k d_2 \cdot \cos \xi_k y; \\
 & b-d_2 \leq x \leq b, \\
 & 0 \leq y \leq d_1;
 \end{aligned} \quad (2.9)$$

§ 3. Определение постоянной U_0 и жесткости при кручении

Функции напряжений $U_i(x, y)$ выражены через постоянную U_0 — значение функции напряжений на внутреннем контуре, которая определяется из теоремы о циркуляции касательного напряжения [6]. Согласно этой теореме

$$\int_{C_0} T_s ds = \int_{C_0} \left[X_z \frac{dx}{ds} + Y_z \frac{dy}{ds} \right] ds = \int_{C_0} \left[\frac{\partial U}{\partial y} dx - \frac{\partial U}{\partial x} dy \right] G\tau = 2\Omega, \quad (3.1)$$

где C_0 — внутренний контур поперечного сечения, Ω — область, ограниченная этим контуром C_0 , G — модуль сдвига, τ — угол закручивания на единицу длины стержня, T_s — проекция касательного напряжения в какой-либо точке контура на направление касательной к этому контуру в той же точке контура.

Подставляя в (3.1) значения функций напряжений из (2.6) и интегрируя, после некоторых преобразований получим следующую формулу для определения постоянной U_0 :

$$\begin{aligned}
 U_0 \left\{ \frac{1}{d_2} (a-d_1-d_3) + \frac{1}{d_3} (b-d_2) \right\} - (2a-d_3)(b-d_2) - \\
 - d_2(a-d_1-d_3) = - \frac{2}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k-3}}{2k-1} \operatorname{th} \xi_k (b-d_2) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [Z_{4k} + \\
 + Z_{4k-1}] \operatorname{th} \frac{\eta_k}{2} (a-d_1-d_3) - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k-2}}{k} \operatorname{th} \xi_k (b-d_2). \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Ряды, входящие в выражение (3.2), имеют порядок сходимости $\frac{1}{k^2}$.

поскольку неизвестные Z_k имеют порядок $\frac{1}{k}$. С помощью некоторых преобразований возможно получить формулу для вычисления U_0 , выраженную через ряды, порядок сходимости которых не менее $\frac{1}{k^3}$.

Действительно, если составить сумму выражений

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k-3}}{2k-1} \operatorname{ch} \zeta_k b \cdot \operatorname{csch} \zeta_k d_2 \operatorname{sch} \zeta_k (b-d_2) + \\ & + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k-2}}{k} \operatorname{ch} \zeta_k b \cdot \operatorname{sch} \zeta_k (b-d_2) \operatorname{csch} \zeta_k d_2 + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{Z_{4k}}{k} \operatorname{sh} \eta_k (a-d_1) \cdot \operatorname{csch} \eta_k d_3 \cdot \operatorname{csch} \eta_k (a-d_1-d_3) - \right. \\ & - \frac{Z_{4k-1}}{k} \operatorname{csch} \eta_k (a-d_1-d_3) \left. \right\} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{Z_{4k-1}}{k} \operatorname{ch} \eta_k (a-d_3) \cdot \operatorname{sch} \eta_k d_1 \times \right. \\ & \times \operatorname{csch} \eta_k (a-d_1-d_3) - \frac{Z_{4k}}{k} \operatorname{csch} \eta_k (a-d_1-d_3) \left. \right\}, \end{aligned}$$

то после приведения подобных членов получим выражение, совпадающее с правой частью (3.2), которое выражено через ряды порядка не менее $\frac{1}{k^3}$. Заменяя правую часть (3.2) полученным выражением, окончательно, для вычисления U_0 , получим следующую формулу

$$\begin{aligned} U_0 \left\{ \frac{1}{d_2} \left(a - \frac{2}{3} d_3 \right) + \frac{1}{d_3} \left(b - \frac{2}{3} d_2 \right) \right\} &= \frac{d_2}{\pi d_3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k}}{k^2} + \\ &+ \frac{d_3}{\pi d_2 \alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k-2}}{k^2} + \frac{4d_1}{\pi d_2 \alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k-3}}{(2k-1)^2} - \frac{4d_2^2}{\pi^3} \sum_{1,3} \frac{1}{k^3} \times \\ &\times \operatorname{cth} \frac{\eta_k d_3}{2} - \frac{1}{2} \frac{d_2^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \operatorname{th} \eta_k d_3 - \frac{4d_2^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \operatorname{th} \eta_k d_1 - \\ &- \frac{4d_3^2}{\pi^3} \sum_{1,3} \frac{1}{k^3} \operatorname{cth} \frac{\zeta_k d_2}{2} - \frac{1}{2} \frac{d_3^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \operatorname{th} \zeta_k d_2 - \\ &- \frac{32d_1^2}{\pi^3} \sum_{1,3} \frac{1}{k^3} + (2a-d_3)b - d_2 \left(a - \frac{2}{3} d_3 - \frac{2}{3} d_1 \right). \quad (3.3) \end{aligned}$$

Жесткость при кручении стержней многосвязного профиля определяется по формуле

$$C = G \left[-2U_1 \Omega_1 + 2 \sum_{k=1}^n U_k \Omega_k + 2 \int_{\Omega} U(x, y) dx dy \right], \quad (3.4)$$

где Ω_1 — площадь, ограниченная внешним контуром, Ω_k — площадь, ограниченная внутренним контуром C_k , G — модуль сдвига, Ω — область поперечного сечения стержня, U_1 — значение функции напряжений на внешнем контуре, U_k — значение функции напряжений на внутреннем контуре. В применении к данному сечению формула (3.4) согласно (1.5) принимает вид

$$\begin{aligned} C = 8G & \left\{ \int_0^{d_1} \int_0^{b-d_2} \psi_1(x, y) dx dy + \int_0^{d_1} \int_{b-d_1}^b [\psi_1(x, y) + \Phi_1(x, y)] dx dy + \right. \\ & + \int_{d_1}^{a-d_1} \int_{b-d_2}^b \psi_2(x, y) dx dy + \int_{a-d_1}^a \int_0^{b-d_2} \psi_3(x, y) dx dy + \\ & \left. + \int_{a-d_1}^a \int_{b-d_2}^b [\psi_3(x, y) + \Phi_3(x, y)] dx dy \right\} + 4U_0 \Omega_0 G. \quad (3.5) \end{aligned}$$

Подставляя в (3.5) значения функций напряжений, после некоторых преобразований окончательно получаем следующую формулу для вычисления жесткости

$$\begin{aligned} C = 8G & \left\{ U_0 \left(ab - \frac{d_3 b}{2} - \frac{a d_2}{2} + \frac{d_2 d_3}{4} \right) + \frac{1}{6} \left(4d_1^3 b - \right. \right. \\ & - 4d_1^3 d_2 + d_2^3 a - \frac{1}{2} d_3 d_2^3 + b d_3^3 - \frac{1}{2} d_2 d_3^3 \Big) - \\ & - \frac{8d_1^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{4k-3}}{(2k-1)^3} \operatorname{sh} \xi_k \left(b - \frac{d_2}{2} \right) \operatorname{sch} \frac{\xi_k d_2}{2} \operatorname{sch} \xi_k (b - d_2) - \\ & - \frac{2d_2^2}{\pi^2} \sum_{1,3}^{\infty} \frac{Z_{4k-1}}{k^3} \operatorname{sh} \frac{\eta_k}{2} (a + d_1 - d_3) \cdot \operatorname{sch} \eta_k d_1 \cdot \operatorname{sch} \frac{\eta_k}{2} (a - d_1 - d_3) - \\ & - \frac{2d_2^2}{\pi^2} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{Z_{4k}}{k^3} \operatorname{sh} \frac{\eta_k}{2} (a - d_1) \cdot \operatorname{sch} \frac{\eta_k d_3}{2} \operatorname{sch} \frac{\eta_k}{2} (a - d_1 - d_3) - \\ & - \frac{2d_3^2}{\pi^2} \sum_{1,3}^{\infty} \frac{Z_{4k-2}}{k^3} \operatorname{sh} \zeta_k \left(b - \frac{d_2}{2} \right) \operatorname{sch} \frac{\zeta_k d_2}{2} \operatorname{sch} \zeta_k (b - d_2) + \\ & \left. + \frac{128d_1^4}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \operatorname{th} \frac{\xi_k d_2}{2} \right\}. \quad (3.6) \end{aligned}$$

§ 4. Числовой пример

Вычислим жесткость стержня, поперечное сечение которого имеет следующие размеры:

$$a = 2b, a - (d_1 + d_3) = 2(b - d_2), d_3 = 2d_1, \frac{b}{d_2} = \frac{3}{2}.$$

Решая систему (2.8), после применения лимитант [5] получим следующие оценки для неизвестных:

$$\begin{aligned} 0,02455a^2 &\leq Z_1 \leq 0,02564a^2, \\ 0,02939a^2 &\leq Z_2 \leq 0,03057a^2, \\ 0,00066a^2 &\leq Z_3 \leq 0,00184a^2, \\ 0,01220a^2 &\leq Z_4 \leq 0,01365a^2, \\ 0,00483a^2 &\leq Z_5 \leq 0,00662a^2, \\ 0,01044a^2 &\leq Z_6 \leq 0,01198a^2, \\ 0,00027a^2 &\leq Z_7 \leq 0,00187a^2, \\ 0,00574a^2 &\leq Z_8 \leq 0,00778a^2, \\ 0,00262a^2 &\leq Z_9 \leq 0,00491a^2, \\ 0,00676a^2 &\leq Z_{10} \leq 0,00864a^2, \\ 0,00029a^2 &\leq Z_{11} \leq 0,00226a^2, \\ 0,00386a^2 &\leq Z_{12} \leq 0,00633a^2, \\ 0,00031a^2 &\leq Z_{(v>13)} \leq 0,00800a^2. \end{aligned}$$

а для U_0

$$0,18573a^2 \leq U_0 \leq 0,18727a^2.$$

Жесткость при кручении такого стержня

$$0,44288 Ga^4 \leq C \leq 0,44840 Ga^4.$$

За расчетное значение C принимаем среднее арифметическое между нижней и верхней границами жесткости

$$C = 0,44564 Ga^4,$$

что дает ошибку 0,6 %.

Жесткость данного стержня C_0 сопоставлена с жесткостью C^* стержня, поперечное сечение которого имеет только один вырез (фиг 2),

и размеры $a = 2b, a - (d_1 + d_3) = 2(b - d_2), d_3 = 2d_1, \frac{b}{d_2} = \frac{3}{2}$. т. е.

площадь, равную половине площади сечения рассматриваемого стержня.

Значение жесткости $C^* = 10,9259 Gd_2^4$ взято из работы [3].

Сопоставление показывает, что если стержень с двумя отверстиями (фиг. 1) разрезать по оси симметрии OA на два одинаковых стержня с одним отверстием (фиг. 2), то жесткость C^* полученного стержня (площадь поперечного сечения которого равна половине площади сечения основного стержня) будет в 3,3 раза меньше, чем жесткость стержня с двумя полостями.

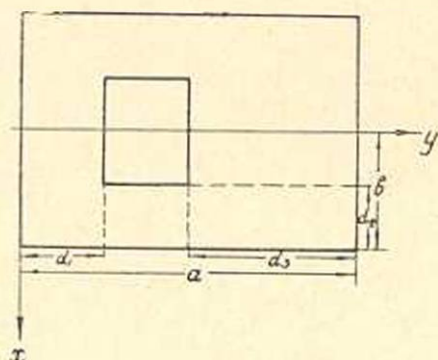
По приближенной формуле теории тонкостенных стержней замкнутого профиля [7], которая в применении к данному сечению (фиг. 1) принимает вид

$$C = \frac{4GF_1^2}{\frac{1}{d_2} \left(a - \frac{d_3}{2} \right) + \frac{1}{d_3} \left(b - \frac{d_2}{2} \right)}$$

(здесь F_1 — площадь, заключенная внутри срединной линии, отмеченной пунктиром на фиг. 1), для жесткости получаем значение

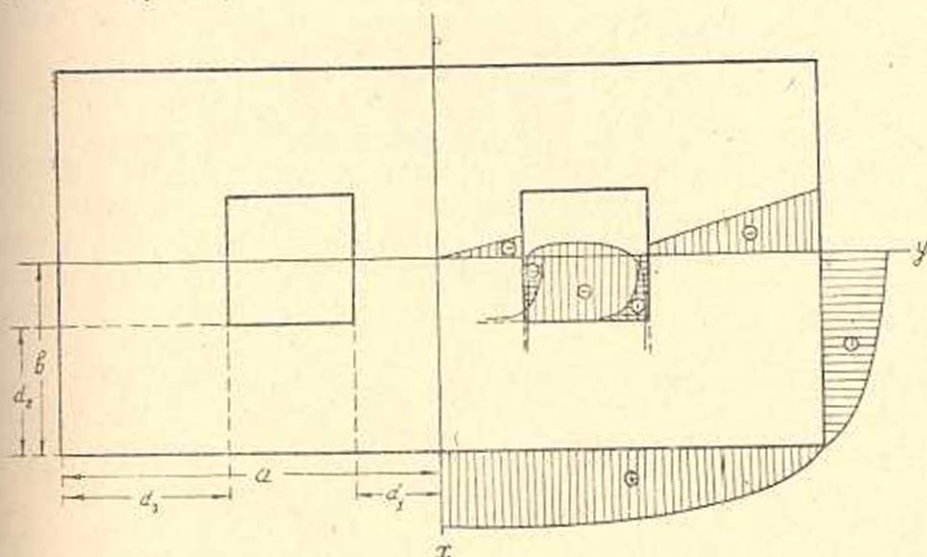
$$C = 0,34879 \, Ga^4.$$

Это показывает, что приближенная формула по крайней мере при $\frac{d_2}{b} \geq \frac{2}{3}$ не применима к полым прямоугольным стержням, т. к. приближенное значение жесткости отличается от точного не менее, чем на 21,7 %.



Фиг. 2.

Для иллюстрации напряженного состояния построена эпюра напряжений (фиг. 3).



Фиг. 3.

Ն. Օ. Գուլկանյան

ԵՐԿՈՒ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԱՆՑՔԵՐՈՎ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԿՏՐՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ՊՐԻԶՄԱՏԻԿ ԶՈՂԻ ՈՒՈՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հարումների ֆունկցիայի որոնման համար օգտագործված է լուծումը
գծային հավասարումների անվերջ սխեմաների բերման եղանակը [1]:

Քննարկվող խնդրի լուծումը բերվում է գծային հավասարումների չորս
անվերջ սխեմաների համախմբի լուծմանը: Ապացուցված է այդ անվերջ սխե-
մաների համախմբի լուծման սկզբնական փուլի կոշտությունը և լարում-
ների որոշման համար ստացված են բանաձևեր: Որպես լուծման օրինակ հա-
շտված են երկու սիմետրիկ քառակուսի անցքերով կողմերի 1: 2 հարաբերու-
թյամբ ուղղանկյուն կտրվածքով ձողի կոշտությունը և լարումները: Ստացված
արդյունքները համեմատված են մի անցքով ուղղանկյուն հատվածք ունեցող
ձողի որոշման կոշտության հետ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюник Н. X. Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. ДАН АрмССР, т. IX, № 2, 1948, ПММ, т. XIII, № 1, 1949.
2. Абрамян Б. Л. Кручение и изгиб призматических стержней с полым прямоугольным сечением. ПММ, т. XIV, в. 3, 1950.
3. Гулканян Н. О. О кручении призматических стержней прямоугольного сечения с несимметричным прямоугольным вырезом. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. X, № 5, 1957.
4. Гринберг Г. А. Новый метод решения некоторых краевых задач для уравнений математической физики, допускающих разделение переменных. Изв. АН СССР, серия физическая; т. X, в. 2, 1946.
5. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. ОТНИ, М., 1949.
6. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. Гостехиздат, М.—Л., 1947.
7. Папкович П. Ф. Теория упругости. Госуд. издат-во оборонной промышленности, М.—Л., 1939.