

Р. М. Мартиросян

О спектре оператора

$-\Delta u + pLu + \int K(Q, P)u(P) dP$ на плоскости

Вопрос о строении спектра сингулярного оператора $-u'' + pu$ с комплексным потенциалом $p(x)$ был впервые изучен М. А. Наймарком [1], который для получения соответствующих результатов пользовался найденной им асимптотикой решений уравнения $-u'' + pu = \lambda u$ на полуоси. Совершенно иной подход к решению этой задачи был указан в заметке [2] И. М. Гельфанда. Дальнейшее развитие этот метод получил в диссертации автора, посвященной спектру не-самосопряженного оператора Шредингера и выполненной под руководством И. М. Гельфанда в 1954 году. Аналогичный метод использован в настоящей работе для изучения спектра операторов вида

$$Tu = -\Delta u + pLu + \int_E K(Q, P)u(P) dP,$$

рассматриваемых на всей евклидовой плоскости E . Здесь L — ограниченный оператор в $L_2(E)$, а $p(Q)$ и $K(Q, P)$ подчинены определенным условиям. Однако, из-за наличия интегрального оператора и оператора L , пришлось по существу дать новые доказательства, изложение которых будет приведено ниже. Заметим, что результаты теорем 1, 3 и 4 в том частном случае, когда $K(Q, P) \equiv 0$, а оператор L сводится к единичному, были получены в диссертации автора (формулировка их без доказательства приведена в обзорной статье М. А. Наймарка [3]) и в развернутой форме публикуются впервые. Отметим, наконец, что вопрос об изучении спектра операторов рассматриваемого вида возник в связи с задачей, впервые предложенной М. М. Джрбашьяном, о разложении по собственным функциям оператора

$$-u'' + pu + \int_0^x K(x, t)u(t) dt,$$

решение которой на конечном промежутке дано в работе А. Н. Нерсисяна [4].

С целью четкой формулировки задачи напомним ряд известных фактов и условимся о некоторых обозначениях. Условимся прежде

всего через E обозначать обычную евклидову плоскость, а через $L_2(E)$ — гильбертово пространство функций, определенных на всей плоскости E и суммируемых с квадратом. Далее, обозначим через Ω область определения гипермаксимального оператора $-\Delta u$, рассматриваемого в гильбертовом пространстве $L_2(E)$. Как известно, этот оператор получается замыканием в $L_2(E)$ оператора $-\Delta u$, рассматриваемого на всех финитных функциях. Известно также, что оператор $-\Delta u$ обладает чисто непрерывным спектром, совпадающим с положительной полуосью. Таким образом, для точек λ комплексной плоскости, лежащих вне положительной полуоси, существует резольвента оператора $-\Delta u$, которую мы будем обозначать через $B_\lambda u$ и интегральное представление которой также хорошо известно. Именно, если λ находится вне положительной полуоси, то при любом $f(Q) \in L_2(E)$, уравнение

$$-\Delta u - \lambda u = f \quad (u \in \Omega) \quad (1)$$

имеет одно и только одно решение из Ω , которое выражается формулой

$$u(Q) = B_\lambda f = \frac{i}{4} \int_E H_0(\sqrt{\lambda} r_{QP}) f(P) dP \quad (\operatorname{Im} \sqrt{\lambda} > 0), \quad (2)$$

где r_{QP} означает расстояние между точками Q и P , $\sqrt{\lambda}$ выбирается из верхней полуплоскости, а через $H_0(z)$ мы обозначили, опустив верхний индекс, функцию Ханкеля первого рода. В дальнейшем мы будем часто пользоваться известным интегральным представлением этой функции [5]

$$H_0(z) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}} \int_0^\infty e^{-iz\xi} \xi^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{i\xi}{2z}\right)^{-\frac{1}{2}} d\xi, \quad (3)$$

которое справедливо для всех $z \neq 0$, $\arg z \neq \frac{3\pi}{2}$, причем радикалы вы-

бираются так, чтобы при $\arg z = \frac{\pi}{2}$ было

$$\arg \sqrt{z} = \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad \arg \left(1 + \frac{i\xi}{2z}\right)^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

Считая теперь комплекснозначные функции $p(Q)$ и $K(Q, P)$ таковыми, что

$$\int_E |p(Q)|^2 dQ < \infty, \quad \int_E \int_E |K(Q, P)|^2 dQ dP < \infty, \quad (4)$$

причем $p(Q)$ ограничена, и обозначая через L произвольный линейный ограниченный (несамосопряженный) оператор в $L_2(E)$, введем в рассмотрение оператор

$$Tu = -\Delta u + pLu + \int_E K(Q, P)u(P)dP, \quad (u \in \mathcal{Q}) \quad (5)$$

определенный на указанном выше многообразии $\mathcal{Q}$.

Наиболее общий результат о спектре этого оператора составляет содержание нижеследующей теоремы, где утверждение о совпадении „непрерывного“ спектра несамосопряженного оператора T с положительной полуосью следует понимать в том смысле, что ни одна точка положительной полуоси не может быть регулярной точкой оператора T (повидимому правильнее было бы говорить о „сплошном“ спектре этого оператора, но вряд ли целесообразно вводить здесь новый термин).

Теорема 1. Непрерывный спектр оператора T совпадает с положительной полуосью, а точки спектра, лежащие в остальной части комплексной плоскости, могут быть лишь собственными значениями, не имеющими точек накопления вне положительной полуоси.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$Tu - \lambda u = -\Delta u + pLu + \int_E K(Q, P)u(P)dP - \lambda u = f, \quad (6)$$

где $f(Q) \in L_2(E)$. В силу (2) оно эквивалентно уравнению

$$u = B_\lambda f - C_\lambda u, \quad (7)$$

где положено

$$C_\lambda u = B \left\{ pLu + \int_E K(Q, P)u(P)dP \right\}. \quad (8)$$

Покажем, что оператор C_λ вполне непрерывен. Действительно, в силу полной непрерывности интегрального оператора [это следует из (4)] достаточно установить, что оператор $B_\lambda \{pLu\}$ является вполне непрерывным. Но

$$B_\lambda \{pLu\} = \frac{i}{4} \int_E H_0(\sqrt{\lambda} r_{MQ}) p(Q) Lu(Q) dQ$$

и, поскольку оператор L ограничен, достаточно показать, что ядро $H_0(\sqrt{\lambda} r_{MQ}) p(Q)$ — типа Гильберта-Шмида. Действительно, интеграл

$$\int_E |H_0(\sqrt{\lambda} r_{MQ})|^2 dM$$

существует (это следует из известной асимптотики функции Ханкеля) и не зависит от выбора точки Q , ибо интегрирование ведется по всему пространству. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_E \int_E |H_0(V\sqrt{\lambda}r_{MQ})p(Q)|^2 dQ dM &= \int_E \left\{ \int_E |H_0(V\sqrt{\lambda}r_{MQ})|^2 dM \right\} |p(Q)|^2 dQ = \\ &= \int_E |H_0(V\sqrt{\lambda}r_{MQ})|^2 dM \cdot \int_E |p(Q)|^2 dQ < \infty, \end{aligned}$$

что и доказывает полную непрерывность оператора C_λ .

Допустим теперь, что неположительное λ не является собственным значением оператора T . Это значит, что однородное уравнение (6), а следовательно и однородное уравнение (7) (получающееся при $B_\lambda f = 0$), имеют лишь тривиальное решение. В силу альтернативы Фредгольма уравнение (7), а поэтому и эквивалентное ему уравнение (6), разрешимы при любой $f(Q) \in L_2(E)$. Отсюда, благодаря замкнутости оператора T , заключаем, что существует ограниченная резольвента $(T - \lambda E)^{-1}$ и поэтому λ является регулярной точкой оператора T . Это доказывает, что точками спектра этого оператора, лежащими вне положительной полуоси, могут быть лишь собственные значения. Эти собственные значения являются, очевидно, собственными значениями для уравнения

$$u = -C_\lambda u.$$

Но поскольку вполне непрерывный оператор C_λ аналитически зависит от параметра λ вне положительной полуоси (ибо этим свойством обладает оператор B_λ), то в силу теоремы Келдыша ([6] и [2]) собственные значения оператора T не могут иметь предельных точек вне положительной полуоси.

Переходя к доказательству первой части теоремы, покажем сперва, что если при некотором неположительном λ существует ограниченная резольвента $R_\lambda = (T - \lambda E)^{-1}$ оператора T , то она представляется в виде

$$R_\lambda f = B_\lambda f + K_\lambda f, \quad (9)$$

где оператор K_λ вполне непрерывен. Действительно, наше предположение означает, что однородное уравнение (6), а следовательно и однородное уравнение (7) (получающееся при $B_\lambda f = 0$), имеют лишь тривиальное решение. Поэтому существует оператор $(E + C_\lambda)^{-1}$. Далее, легко проверить, что

$$(E + C_\lambda)^{-1} = E - C_\lambda (E + C_\lambda)^{-1}. \quad (10)$$

С другой стороны, $R_\lambda f$ является решением уравнения (6), а следовательно и уравнения (7). Поэтому

$$R_\lambda f = B_\lambda f - C_\lambda R_\lambda f,$$

откуда, в силу (10),

$$R_\lambda f = B_\lambda f - C_\lambda (E + C_\lambda)^{-1} B_\lambda f$$

и достаточно положить

$$K_\lambda = -C_\lambda (E + C_\lambda)^{-1} B_\lambda.$$

чтобы получить представление (9), ибо полная непрерывность K , очевидна.

Допустим теперь, что некоторое положительное $\lambda = \lambda_0 > 0$ является регулярной точкой оператора T , т. е. что существует ограниченная резольвента R_{λ_0} этого оператора при $\lambda = \lambda_0$. Введем в рассмотрение уравнение

$$-\Delta u - \lambda_0 u = Tu - pLu - \int_E K(Q, P)u(P)dP - \lambda_0 u = f, \quad (11)$$

которое, очевидно, эквивалентно уравнению

$$u = R_{\lambda_0} f + R_{\lambda_0} Su, \quad (12)$$

где положено

$$Su = pLu + \int_E K(Q, P)u(P)dP.$$

Покажем, что оператор $R_{\lambda_0} S$ вполне непрерывен. Для этого заметим, что из существования R_{λ_0} следует существование R_λ в некоторой окрестности $\lambda = \lambda_0$. Выберем из этой окрестности последовательность неположительных $\lambda = \lambda_n$ так, чтобы $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$. Как известно, будем иметь $\|R_{\lambda_n} - R_{\lambda_0}\| \rightarrow 0$. В силу ограниченности оператора S , отсюда получаем, что $\|R_{\lambda_n} S - R_{\lambda_0} S\| \rightarrow 0$. Поэтому полная непрерывность оператора $R_{\lambda_0} S$ будет установлена, если мы убедимся в полной непрерывности операторов $R_{\lambda_n} S$. Но это очевидное следствие представления (9), ибо полная непрерывность операторов $B_{\lambda_n} S = C_{\lambda_n}$ была установлена выше. Заметим теперь, что однородное уравнение, соответствующее (11),

$$-\Delta u - \lambda_0 u = 0$$

имеет, как известно, лишь тривиальное решение, ибо все положительные λ принадлежат непрерывному спектру оператора $-\Delta u$. Таким образом и однородное уравнение, соответствующее (12) (получающееся при $R_{\lambda_0} f = 0$), имеет лишь тривиальное решение. Но тогда, в силу альтернативы Фредгольма, уравнение (12), следовательно и равносильное ему уравнение (11), разрешимы при любой правой части. Это означает, что при $\lambda = \lambda_0$ существует резольвента оператора $-\Delta u$, определенная на всем гильбертовом пространстве $L_2(E)$. В силу замкнутости оператора $-\Delta u$, эта резольвента ограничена и поэтому $\lambda = \lambda_0$ является регулярной точкой оператора $-\Delta u$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Теорема 2. Обозначим $\|K\|^2 = \iint_E |K(Q, P)|^2 dQ dP$ и предположим, что $|p(Q)| \leq M$. Тогда весь спектр оператора T лежит внутри параболы $\eta^2 = 4\alpha(z + \bar{z})$, где $\alpha = \frac{\pi}{2} \sqrt{M^2 \|L\|^2 + \|K\|^2}$, $\bar{z} = Re\lambda$, $\eta = Im\lambda$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что если $z = x + iy$ и $\operatorname{Im} z = y > 0$, то, как легко видеть, при $\xi \geq 0$ выполняется неравенство

$$\left| 1 + \frac{\bar{z}\xi}{2z} \right|^{-\frac{1}{2}} \leq 1.$$

Поэтому из (3) следует, что

$$|H_0(z)| \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{e^{-y}}{|Vz|} \int_0^{\infty} e^{-\xi} \xi^{-\frac{1}{2}} d\xi \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} \quad (y = \operatorname{Im} z > 0). \quad (13)$$

Отсюда при $\operatorname{Im} \sqrt{\lambda} = \tau > 0$ получаем

$$\begin{aligned} \int_E |H_0(\sqrt{\lambda} r_{MQ})| dQ &= 2\pi \int_0^{\infty} |H_0(\sqrt{\lambda} r)| r dr \leq 2\pi \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau r}}{\sqrt{\tau r}} r dr = \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\tau^2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi \sqrt{2}}{\tau^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть теперь $u(Q)$ является собственной функцией оператора T при некотором неположительном λ , т. е. $Tu - \lambda u = 0$. Как мы уже знаем, $u(Q)$ удовлетворяет уравнению

$$u(M) = -\frac{i}{4} \int_E H_0(\sqrt{\lambda} r_{MQ}) \left[p(Q) Lu(Q) + \int_E K(Q, P) u(P) dP \right] dQ. \quad (15)$$

Применяя неравенство Буняковского и считая $u(Q)$ нормированной, получим

$$\begin{aligned} |u(M)|^2 &\leq \frac{1}{16} \int_E |H_0(\sqrt{\lambda} r_{MQ})| dQ \cdot \int_E |H_0(\sqrt{\lambda} r_{MQ})| \times \\ &\times \left\{ 2M^2 |Lu(Q)|^2 + 2 \int_E |K(Q, P)|^2 dP \right\} dQ. \end{aligned}$$

Заметив теперь, что интегрирование функции $|H_0(\sqrt{\lambda} r_{MQ})|$ по одной из переменных дает константу, не зависящую от другой переменной (ибо интегрирование ведется по всему пространству E), немедленно получаем, интегрируя последнее неравенство по переменной M ,

$$1 \leq \frac{1}{8} \left(\int_E |H_0(\sqrt{\lambda} r_{MQ})| dQ \right)^2 \{ M^2 \|L\|^2 + \|K\|^2 \},$$

или в силу (14)

$$\tau^4 \leq \frac{\pi^2}{4} \{ M^2 \|L\|^2 + \|K\|^2 \}.$$

Заметим, далее, что если $\lambda = \xi + i\eta$, а $\sqrt{\lambda} = \sigma + i\tau$, то, как легко видеть, $\tau^2 = 4\sigma^2(\tau^2 + \xi)$. Чтобы доказать теорему, остается воспользоваться последним неравенством.

Прежде, чем сформулировать теорему 3, примем следующее

Определение 1. Будем говорить, что оператор L ограничен над многообразием ограниченных функций из $L_2(E)$, если существует некоторая константа, которую мы обозначим через $\|L\|_E$, такая, что для всех $u(Q) \in L_2(E)$ выполняется неравенство

$$|Lu(Q)| \leq \|L\|_E \sup |u(Q)|. \quad (16)$$

Теорема 3. Пусть оператор L ограничен над многообразием ограниченных функций из $L_2(E)$ (определение 1), а функция $p(Q)$ и интеграл

$$\int_E |K(Q, P)| dP \quad (17)$$

являются ограниченными и суммируемыми функциями точки Q . Тогда дискретный спектр оператора T ограничен.

Доказательство. Заметим сперва, что если $\text{Im}\sqrt{\lambda} > 0$, то из неравенства (13) следует

$$|H_0(\sqrt{\lambda}r)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} |\lambda|^{-\frac{1}{4}} r^{-\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

Отметим также, что все функции $u(Q) \in \mathfrak{Q}$ являются ограниченными, ибо представляются в виде

$$u(Q) = B_1 f = \frac{i}{4} \int_E H_0(\sqrt{\lambda}r_{QP}) f(P) dP,$$

откуда

$$|u(Q)|^2 \leq \frac{1}{16} \int_E |H_0(\sqrt{\lambda}r_{QP})|^2 dP \cdot \int_E |f(P)|^2 dP.$$

Пусть теперь $u(Q)$ некоторая собственная функция, соответствующая собственному значению λ оператора T . Как нам известно, $u(Q)$ должно удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} u(M) = & -\frac{i}{4} \int_E H_0(\sqrt{\lambda}r_{MQ}) p(Q) Lu(Q) dQ - \\ & - \frac{i}{4} \int_E H_0(\sqrt{\lambda}r_{MQ}) \left\{ \int_E K(Q, P) u(P) dP \right\} dQ. \end{aligned}$$

Используя оценку (18) и неравенство (16), получаем отсюда

$$|u(M)| \leq \sup |u(Q)| \cdot |\lambda|^{-\frac{1}{4}} \left\{ \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \|L\|_E \cdot \int_E \frac{|p(Q)|}{\sqrt{r_{MQ}}} dQ + \right.$$

$$+ \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_E \frac{1}{V r_{MQ}} \left(\int_E K(Q, P) |dP \right) dQ \}. \quad (19)$$

Но в силу ограниченности и суммируемости функции $p(Q)$ и интеграла (17), выражение в фигурных скобках ограничено некоторой константой A , не зависящей ни от выбора точки M , ни от значения параметра λ . Таким образом окончательно

$$\sup |u(Q)| < A |\lambda|^{-\frac{1}{4}} \sup |u(Q)|.$$

Но поскольку $u(Q)$ ограничена, отсюда следует, что $|\lambda| < A^4$, что и доказывает теорему.

Замечание. Теорема остается в силе, если при некотором $\varepsilon_0 > 0$ существует интеграл

$$\int_E \int_E e^{i\varepsilon r_{Q_1} P} e^{i\varepsilon r_{P_1} Q} |K(Q, P)|^2 dQ dP < \infty,$$

ибо и в этом случае последний интеграл в правой части (19) допускает оценку, не зависящую от выбора точки M (здесь r_Q означает расстояние точки Q до начала координат). Действительно, дважды пользуясь неравенством Буняковского, легко убедиться, что

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_E \frac{1}{V r_{MQ}} \left(\int_E |K(Q, P)| dP \right) dQ \right\}^2 < \\ & \leq \int_E e^{-i\varepsilon r_P} dP \cdot \int_E \frac{e^{-i\varepsilon r_Q}}{r_{MQ}} dQ \cdot \int_E \int_E e^{i\varepsilon r_{Q_1} P} e^{i\varepsilon r_{P_1} Q} |K(Q, P)|^2 dQ dP, \end{aligned}$$

и очевидно, что второй интеграл в правой части допускает оценку, не зависящую от выбора точки M .

Чтобы получить более точные сведения о предельных точках дискретного спектра оператора T , мы введем в рассмотрение, при определенных предположениях относительно $p(Q)$ и $K(Q, P)$, следующую функцию

$$\begin{aligned} K^*(Q, P; \sqrt{\lambda}) = & -\frac{i}{4} S_1(Q, P; \sqrt{\lambda}) - \frac{1}{16} S_2(Q, P; \sqrt{\lambda}) - \\ & - \frac{1}{16} S_3(Q, P; \sqrt{\lambda}), \end{aligned} \quad (20)$$

где положено

$$S_1(Q, P; \sqrt{\lambda}) = \int_E H_0(\sqrt{\lambda} r_{QQ_1}) K(Q_1, P) dQ_1, \quad (21)$$

$$S_2(Q, P; \sqrt{\lambda}) = p(P) \int_E H_0(\sqrt{\lambda} r_{QP_1}) H_0(\sqrt{\lambda} r_{P_1 P}) p(P_1) dP_1, \quad (22)$$

$$S_3(Q, P; \sqrt{\lambda}) = \int_E H_0(\sqrt{\lambda} r_{QP_1}) S_1(P_1, P; \sqrt{\lambda}) p(P_1) dP_1. \quad (23)$$

Нужное нам в дальнейшем свойство функции $K^*(Q, P; \sqrt{\lambda})$ устанавливается во второй из следующих двух лемм.

Лемма 1. Пусть $G_{\delta, R}$ — область в плоскости комплексной переменной λ , состоящая из тех λ , для которых $|\lambda| < R$, $\operatorname{Im} \lambda \geq -\delta$ и кроме того $|\lambda| \geq \delta$ при $\operatorname{Im} \lambda > 0$, а $|\operatorname{Re} \lambda| \geq \delta$ при $\operatorname{Im} \lambda < 0$. Тогда существует константа $\gamma(\delta, R)$, зависящая лишь от δ и R , такая, что неравенство

$$|\dot{H}_0(\lambda r)| \leq \gamma(\delta, R) \frac{e^{\delta r}}{\sqrt{r}} \quad (24)$$

выполняется при всех $\lambda \in G_{\delta, R}$ и всех положительных r .

Доказательство. Очевидно, что

$$\left| 1 + \frac{i\lambda}{2\lambda r} \right|^{-\frac{1}{2}} < \left| \frac{\lambda}{R e \lambda} \right|^{\frac{1}{2}}.$$

С другой стороны, при $\operatorname{Im} \lambda > 0$ левая часть этого неравенства не превосходит единицы. Поэтому в области $G_{\delta, R}$ имеем

$$\left| 1 + \frac{i\lambda}{2\lambda r} \right|^{-\frac{1}{2}} \leq \max \left\{ 1, \sqrt{\frac{R}{\delta}} \right\}.$$

Теперь уже требуемое неравенство непосредственно вытекает из (3).

Лемма 2. Пусть при некотором $\varepsilon_0 > 0$ выполняются неравенства

$$|p(Q) e^{\varepsilon_0 r_Q}| \leq a < \infty, \quad \int_E |p(Q) e^{\varepsilon_0 r_Q}| dQ < \infty, \quad (25)$$

$$\iint_{E \times E} e^{\varepsilon_0 r_Q} e^{\varepsilon_0 r_P} |K(Q, P)|^2 dQ dP < \infty, \quad (26)$$

где r_Q означает расстояние точки Q до начала координат.

Тогда функция $K^*(Q, P; \sqrt{\lambda})$, определяемая формулой (20) и рассматриваемая при значениях $\sqrt{\lambda}$, принадлежащих области $G_{\delta, R}$ при $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon_0}{8}$ (см. лемму 1), допускает оценку

$$\left| K^*(Q, P; \sqrt{\lambda}) e^{-\frac{\varepsilon_0}{8} r_Q} \right| \leq \Phi(P; \delta, R, \varepsilon_0) \quad (27)$$

независимо от выбора точки Q , причем

$$\int_E e^{\frac{\varepsilon_0}{8} r_P} \Phi(P; \delta, R, \varepsilon_0) dP < \infty. \quad (28)$$

Доказательство. Достаточно показать, что каждая из функций $S_i(Q, P; \sqrt{\lambda})$ допускает оценки, аналогичные (27) и (28). Начнем с $S_1(Q, P; \sqrt{\lambda})$. Поскольку $\delta \leq \frac{\varepsilon_0}{8}$, то, пользуясь неравенством (24), находим

$$\begin{aligned} \left| S_1(Q, P; \sqrt{\lambda}) e^{-\frac{\varepsilon_0}{8} r_Q} \right| &\leq \gamma(\delta, R) \int_E \frac{e^{-\frac{\varepsilon_0}{8} r_{Q_1}}}{V r_{QQ_1}} |K(Q_1, P)| dQ_1 = \\ &= \gamma(\delta, R) \int_E e^{-\frac{\varepsilon_0}{4} r_{Q_1}} |K(Q_1, P)| \frac{e^{-\frac{\varepsilon_0}{8} r_{Q_1}}}{V r_{QQ_1}} dQ_1 \leq \gamma(\delta, R) \times \\ &\quad \times \left(\int_E e^{-\frac{\varepsilon_0}{2} r_{Q_1}} |K(Q_1, P)|^2 dQ_1 \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \times \left(\int_E \frac{e^{-\frac{\varepsilon_0}{4} r_{Q_1}}}{r_{QQ_1}} dQ_1 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \gamma_1(\delta, R) \left(\int_E e^{-\frac{\varepsilon_0}{2} r_{Q_1}} |K(Q_1, P)|^2 dQ_1 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (29)$$

ибо интеграл

$$\int_E \frac{e^{-\frac{\varepsilon_0}{4} r_{Q_1}}}{r_{QQ_1}} dQ_1$$

допускает, очевидно, не зависящую от Q оценку. Положим поэтому

$$\Phi_1(P; \delta, R, \varepsilon_0) = \gamma_1(\delta, R) \left(\int_E e^{-\frac{\varepsilon_0}{2} r_{Q_1}} |K(Q_1, P)|^2 dQ_1 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (30)$$

Имеем в силу (26) и (30):

$$\begin{aligned} \int_E e^{-\frac{\varepsilon_0}{8} r_P} \Phi_1(P; \delta, R, \varepsilon_0) dP &= \int_E e^{-\frac{\varepsilon_0}{8} r_P} e^{\frac{\varepsilon_0}{4} r_P} \Phi_1(P; \delta, R, \varepsilon_0) dP \leq \\ &\leq \left(\int_E e^{-\frac{\varepsilon_0}{4} r_P} dP \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_E e^{\frac{\varepsilon_0}{2} r_P} \Phi_1^2(P; \delta, R, \varepsilon_0) dP \right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \end{aligned}$$

т. е. для функции $S_1(Q, P; \sqrt{\lambda})$ имеют место оценки, аналогичные (27) и (28), причем роль функции Φ играет $\Phi_1(P; \delta, R, \varepsilon_0)$, определяемая формулой (30). Переходя к рассмотрению функции $S_3(Q, P; \sqrt{\lambda})$,

произведем предварительно следующую оценку для $S_1(Q, P; \sqrt{\lambda})$, несколько отличную от вышеприведенной:

$$\begin{aligned} \left| S_1(Q, P; \sqrt{\lambda}) e^{-\frac{\varepsilon_0}{8} r_Q} \right| &\leq \gamma(\delta, R) \int_E e^{\frac{\varepsilon_0}{4} r_{Q_1}} |K(Q_1, P)| \frac{e^{-\frac{\varepsilon_0}{8} r_{Q_1}}}{\sqrt{r_{QQ_1}}} dQ_1 \leq \\ &\leq \gamma(\delta, R) \left(\int_E e^{\frac{\varepsilon_0}{2} r_{Q_1}} |K(Q_1, P)|^2 dQ_1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_E \frac{e^{-\frac{\varepsilon_0}{4} r_{Q_1}}}{r_{QQ_1}} dQ_1 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

или, поскольку последний интеграл оценивается независимо от выбора точки Q ,

$$\left| S_1(Q, P; \sqrt{\lambda}) e^{-\frac{\varepsilon_0}{8} r_Q} \right|^2 \leq \Phi_2(P), \quad (31)$$

где положено

$$\Phi_2(P) = \gamma_2(\delta, R) \int_E e^{\frac{\varepsilon_0}{2} r_{Q_1}} |K(Q_1, P)|^2 dQ_1, \quad (32)$$

а $\gamma_2(\delta, R)$ — некоторая константа.

Теперь из (23) находим:

$$\begin{aligned} \left| S_2(Q, P; \sqrt{\lambda}) e^{-\frac{\varepsilon_0}{8} r_Q} \right| &\leq \gamma(\delta, R) \int_E \frac{e^{\frac{\varepsilon_0}{8} r_{P_1}} |p(P_1)|}{\sqrt{r_{QP_1}}} |S_1(P_1, P; \sqrt{\lambda})| dP_1 = \\ &= \gamma(\delta, R) \int_E \frac{e^{\frac{3\varepsilon_0}{8} r_{P_1}} \sqrt{|p(P_1)|}}{\sqrt{r_{QP_1}}} \sqrt{|p(P_1)|} |S_1(P_1, P; \sqrt{\lambda}) e^{-\frac{\varepsilon_0}{4} r_{P_1}}| dP_1 \leq \\ &\leq \gamma(\delta, R) \left(\int_E \frac{e^{\frac{\varepsilon_0}{4} r_{P_1}} |p(P_1)|}{r_{QP_1}} dP_1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_E |p(P_1)| \times \right. \\ &\quad \left. \times \left| S_1(P_1, P; \sqrt{\lambda}) e^{-\frac{\varepsilon_0}{4} r_{P_1}} \right|^2 dP_1 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

В силу ограниченности и суммируемости $e^{\frac{\varepsilon_0}{4} r_{P_1}} |p(P_1)|$, первый интеграл в правой части оценивается независимо от Q . Учитывая также ограниченность $p(P)$ и оценивая второй интеграл правой части на основании (31), находим

$$\left| S_3(Q, P; \sqrt{\lambda}) e^{-\frac{\varepsilon_0}{8} r_Q} \right| \leq \gamma_3(\delta, R) \left(\int_E e^{-\frac{\varepsilon_0}{4} r_{P_1}} \Phi_2(P) dP_1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

или

$$\left| S_3(Q, P; \sqrt{\lambda}) e^{-\frac{\varepsilon_0}{8} r_Q} \right| \leq \gamma_3(\delta, R) [\Phi_2(P)]^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, в силу (32)

$$\begin{aligned} \int_E e^{\frac{\varepsilon_0}{8} r_P} [\Phi_2(P)]^{\frac{1}{2}} dP &\leq \left(\int_E e^{-\frac{\varepsilon_0}{4} r_P} dP \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_E e^{\frac{\varepsilon_0}{2} r_P} \Phi_2(P) dP \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \gamma_2(\delta, R)^{\frac{1}{2}} \left(\int_E e^{-\frac{\varepsilon_0}{4} r_P} dP \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_E e^{\frac{\varepsilon_0}{2} r_{Q_1}} e^{\frac{\varepsilon_0}{2} r_P} |K(Q_1, P)|^2 dQ_1 dP \right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \end{aligned}$$

Рассмотрим, наконец, функцию $S_2(Q, P; \sqrt{\lambda})$. Из (22) следует

$$\begin{aligned} \left| S_2(Q, P; \sqrt{\lambda}) e^{-\frac{\varepsilon_0}{8} r_Q} \right| &\leq \gamma^2(\delta, R) |p(P)| \int_E \frac{e^{\frac{\varepsilon_0}{8} r_{P_1}} e^{\frac{\varepsilon_0}{8} r_{P_1 P}}}{V r_{QP_1} r_{P_1 P}} |p(P_1)| dP_1 \leq \\ &\leq \gamma^2(\delta, R) |p(P)| e^{\frac{\varepsilon_0}{8} r_P} \int_E \frac{e^{-\frac{\varepsilon_0}{4} r_{P_1}}}{V r_{QP_1} r_{P_1 P}} |p(P_1)| dP_1. \end{aligned}$$

Но последний интеграл оценивается независимо от выбора точек Q и P . Это следует из ограниченности и суммируемости функции $e^{\frac{\varepsilon_0}{4} r_{P_1}} |p(P_1)|$ и, очевидного неравенства

$$\frac{1}{V r_{QP_1} r_{P_1 P}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_{QP_1}} + \frac{1}{r_{P_1 P}} \right).$$

Таким образом, окончательно

$$\left| S_2(Q, P; \sqrt{\lambda}) e^{-\frac{\varepsilon_0}{8} r_Q} \right| \leq \Phi_3(P),$$

где

$$\Phi_3(P) = \gamma_5(\delta, R) |p(P)| e^{\frac{\varepsilon_0}{8} r_P}.$$

Отсюда в силу (25)

$$\int_E e^{\frac{\varepsilon_0}{8} r_P} \Phi_3(P) dP < \infty.$$

Таким образом, оценки, аналогичные (27) и (28), установлены нами для каждой из функций $S_i(Q, P; \sqrt{\lambda})$, а это и доказывает лемму.

Переходя к следующей теореме, предположим, что L — единичный оператор. Таким образом Tu имеет вид

$$Tu = -\Delta u + p(Q)u + \int_E K(Q, P)u(P) dP. \quad (33)$$

Теорема 4. Пусть при некотором $\varepsilon_0 > 0$ функция $p(Q)e^{\varepsilon_0 r_Q}$ ограничена и суммируема. Пусть, кроме того,

$$\iint_E e^{\varepsilon_0 r_Q} e^{\varepsilon_0 r_P} |K(Q, P)|^2 dQ dP < \infty.$$

Тогда дискретный спектр оператора T , определенного формулой (33), ограничен и единственной предельной точкой собственных значений этого оператора может быть лишь точка 0.

Доказательство. Ограниченность дискретного спектра следует из замечания к теореме 3. Далее, как нам уже известно, собственные функции рассматриваемого оператора должны удовлетворять уравнению

$$u(Q) = -\frac{i}{4} \int_E H_0(\sqrt{\lambda} r_{QQ_1}) \left\{ p(Q_1)u(Q_1) + \int_E K(Q_1, Q_2)u(Q_2) dQ_2 \right\} dQ_1. \quad (34)$$

Подставляя в интеграл

$$-\frac{i}{4} \int_E H_0(\sqrt{\lambda} r_{QQ_1}) p(Q_1)u(Q_1) dQ_1$$

вместо $u(Q)$ выражение, стоящее в правой части (34), после простых преобразований убедимся, что $u(Q)$ должно удовлетворять уравнению

$$u(Q) = \int_E K^*(Q, P; \sqrt{\lambda}) u(P) dP, \quad (35)$$

где $K^*(Q, P; \sqrt{\lambda})$ определена формулой (20). Вводя параметр μ и рассматривая вспомогательное уравнение

$$u(Q) = \mu \int_E K^*(Q, P; \sqrt{\lambda}) u(P) dP, \quad (36)$$

замечаем, что при каждом фиксированном значении $\sqrt{\lambda}$ из верхней полуплоскости это есть однородное интегральное уравнение типа Фредгольма, обращающееся при $\mu = 1$ в исходное уравнение (35). Таким образом, при фиксированном значении $\sqrt{\lambda}$ ($\text{Im} \sqrt{\lambda} > 0$) уравне-

ние (36) имеет нетривиальные решения лишь в том случае, когда выполняется условие

$$D(\sqrt{\lambda}; \mu) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\mu^n}{n!} d_n(\sqrt{\lambda}) = 0, \quad (37)$$

где положено

$$d_n(\sqrt{\lambda}) = \underbrace{\int_E \dots \int_E}_{n \text{ раз}} \det \|K^*(Q_i, Q_k; \sqrt{\lambda})\| dQ_1 \dots dQ_n. \quad (38)$$

Теперь ясно, что задача о собственных значениях оператора T сводится к задаче о нулях функции $D(\sqrt{\lambda}; 1)$, лежащих в верхней полуплоскости. Очевидно, теорема будет доказана, если мы покажем, что $D(\sqrt{\lambda}; 1)$, рассматриваемая как функция переменной $\sqrt{\lambda}$, аналитична в любой области $G_{\delta, R}$ (см. лемму 1). Для доказательства этого заметим, что каждая из функций $d_k(\sqrt{\lambda})$ аналитична по переменной $\sqrt{\lambda}$ в указанной области, как это следует, например, из известной теоремы Морера. Поэтому достаточно лишь обнаружить равномерную сходимость в $G_{\delta, R}$ ряда (37) при $\mu = 1$. Для этого определители, входящие в формулу (38), запишем в виде

$$\begin{aligned} \det \|K^*(Q_i, Q_k; \sqrt{\lambda})\| &= e^{\frac{\varepsilon_0}{8} r_{Q_1}} \dots e^{\frac{\varepsilon_0}{8} r_{Q_n}} \times \\ &\times \det \|K^*(Q_i, Q_k; \sqrt{\lambda}) e^{-\frac{\varepsilon_0}{8} r_{Q_i}}\|. \end{aligned} \quad (39)$$

Далее, на основании (27)

$$\left(\sum_{i=1}^n \left| K^*(Q_i, Q_k; \sqrt{\lambda}) e^{-\frac{\varepsilon_0}{8} r_{Q_i}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq n^{\frac{1}{2}} \Phi(Q_k; \delta, R, \varepsilon_0).$$

Поэтому в силу неравенства Адамара

$$\left| \det \|K^*(Q_i, Q_k; \sqrt{\lambda}) e^{-\frac{\varepsilon_0}{8} r_{Q_i}}\| \right| \leq n^{\frac{n}{2}} \Phi(Q_1; \delta, R, \varepsilon_0) \dots \Phi(Q_n; \delta, R, \varepsilon_0)$$

Пользуясь (39), находим окончательно

$$\begin{aligned} \left| \det \|K^*(Q_i, Q_k; \sqrt{\lambda})\| \right| &\leq n^{\frac{n}{2}} \cdot e^{\frac{\varepsilon_0}{8} r_{Q_1}} \Phi(Q_1; \delta, R, \varepsilon_0) \dots \\ &\dots e^{\frac{\varepsilon_0}{8} r_{Q_n}} \Phi(Q_n; \delta, R, \varepsilon_0). \end{aligned}$$

Заметив теперь, что согласно (28)

$$\int_E e^{\frac{\varepsilon_0}{8} r_P} \Phi(P; \delta, R, \varepsilon_0) dP = M < \infty,$$

получим из (38)

$$|d_n(\sqrt{\lambda})| \leq n^{\frac{n}{2}} M^n.$$

Таким образом, при $\mu = 1$ ряд (37) мажорируется сходящимся рядом

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{n}{2}} M^n}{n!},$$

а это и доказывает теорему.

Институт математики и механики

АН Армянской ССР.

Ереванский Государственный университет

Поступила 11 V 1959

2. Մ. Փարսիսյան

ՀԱՐՔՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ ԴԻՏԱՐԿՎՈՂ $-\Delta u + pLu + \int K(Q, P)u(P)dP$ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ՍՊԵԿՏՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիցուք $L_2(E)$ -ն ամբողջ E էվկլիդեսյան հարթության վրա որոշված և բառակառուցված ինտեգրելի ֆունկցիաների հիլբերտյան տարածությունն է: Նշանակենք $\mathcal{Q}$ -ով $L_2(E)$ տարածության մեջ դիտվող $-\Delta u$ հսկերամաքսիմալ օպերատորի որոշման տիրույթը: Ինչպես հարանի է, այդ օպերատորն ստացվում է բոլոր ֆինիտ ֆունկցիաների վրա դիտվող $-\Delta u$ օպերատորի փակումից $L_2(E)$ -ում:

Համարելով $p(Q)$ և $K(Q, P)$ ֆունկցիաները աջնայիններ, որ նրանց համար

$$\int_E |p(Q)|^2 dQ < \infty, \quad \iint_E |K(Q, P)|^2 dQ dP < \infty,$$

ընդ որում $p(Q)$ -ն սահմանափակ է, և նշանակելով $L_2(E)$ -ում կամայական գծային, սահմանափակ (ուչ ինքնահամալուծ) օպերատորը L -ով, դիտարկենք հետևյալ օպերատորը՝

$$Tu = -\Delta u + pLu + \int_E K(Q, P)u(P)dP \quad (u \in \mathcal{Q}):$$

Ներկա աշխատության մեջ պարզվում է այս օպերատորի սպեկտրի կառուցման հարցը, ընդ որում ստացված ամենաընդհանուր արդյունքը կապմում է հետևյալ երկու թեորեմների բովանդակությամբ:

Թեորեմ 1. *T* օպերատորի անընդհատ սպեկտրը համընկնում է դրական կիսաառանցքի հետ, իսկ կոմպլեքս հարթության մնացած մասում ընկած սպեկտրի կետերը կարող են լինել միայն զրական կիսաառանցքից դուրս կուտակման կետ չունեցող սեփական արժեքներ:

$$\text{Թեորեմ 2. Նշանակենք } \|K\|^2 = \iint_{E \times E} |K(Q, P)|^2 dQ dP \text{ և ենթադրենք,}$$

որ $|p(Q)| < M$: Այդ դեպքում *T* օպերատորի ամբողջ սպեկտրն ընկած է $\gamma^2 = 4\alpha(\alpha + \xi)$ պարաբոլի ներսում, որտեղ

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \sqrt{M^2 \|L\|^2 + \|K\|^2}, \quad \xi = Re\lambda, \quad \eta = Im\lambda:$$

Նախքան հետևյալ թեորեմի ձևակերպումը, պայմանավորվենք ասել, որ *L* օպերատորը $L_2(E)$ -ում սահմանափակ ֆունկցիաների բազմաձևության վրա սահմանափակ է, եթե գոյություն ունի այնպիսի հաստատուն, որը մենք կնշանակենք $\|L\|$, որ $L_2(E)$ -ին պատկանող բոլոր $u(Q)$ -երի համար տեղի ունի

$$|Lu(Q)| \leq \|L\| \sup |u(Q)|$$

անհավասարությունը:

Թեորեմ 3. *Դիցուք L* օպերատորը սահմանափակ է $L_2(E)$ -ի սահմանափակ ֆունկցիաների բազմաձևության վրա, իսկ $p(Q)$ -ն և

$$\int_E |K(Q, P)| dP$$

ինտեգրալը *Q* կետի սահմանափակ և հանրագումարելի ֆունկցիաներ են: Այդ դեպքում *T* օպերատորի զիսկրետ սպեկտրը սահմանափակ է:

Դիտարկենք սահմանափակ կետերի մասին այլևի ճշգրիտ տեղեկություններ է տալիս հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 4. *Դիցուք ինչ-որ $\varepsilon_0 > 0$ -ի համար $p(Q) e^{\varepsilon_0 r_Q}$ ֆունկցիան սահմանափակ և հանրագումարելի է: Դիցուք, բացի այդ,*

$$\iint_{E \times E} e^{\varepsilon_0 r_Q} e^{\varepsilon_0 r_P} |K(Q, P)|^2 dQ dP < \infty,$$

և *L*-ն բերվում է միավոր օպերատորի: Այդ դեպքում *T* օպերատորի զիսկրետ սպեկտրը սահմանափակ է և այդ օպերատորի սեփական արժեքների միակ սահմանափակ կետը կարող է լինել 0 կետը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Наймарк М. А. О спектре сингулярных несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка. ДАН СССР, новая серия, 85, 1, 1952.
2. Гельфанд И. М. О спектре несамосопряженных дифференциальных операторов. Успехи матем. наук, VII, № 6, 1952.
3. Наймарк М. А. Спектральный анализ несамосопряженных операторов. Успехи матем. наук, XI, 6, 1956.
4. Нерсисян А. Б. Разложение по собственным функциям краевой задачи для одного интегро-дифференциального уравнения. Известия АН АрмССР (серия физ.-мат. наук), т. XII, № 3, 1959.
5. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. I, 1949.
6. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений. ДАН СССР, новая серия, 77, 1, 1951.