

С. А. Акопян

Интегральные преобразования, связанные с дифференциальными операторами бесконечного порядка

Как хорошо известно [1], [2], если функции $K(s)$ и $H(s)$ определены лишь на линии $s = \frac{1}{2} + it$ ($-\infty < t < +\infty$), обе ограничены и удовлетворяют функциональному уравнению

$$K(s)H(1-s) = 1, \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}, \quad (1)$$

то они порождают определенные интегральные преобразования в классе $L_2(0, +\infty)$.

Именно, если $\frac{k_1(x)}{x}$ и $\frac{h_1(x)}{x}$ суть соответственно трансформации Меллина функций $\frac{K(s)}{1-s}$ и $\frac{H(s)}{1-s}$, то каждая функция $f(x)$ из класса $L_2(0, +\infty)$ имеет две трансформации, определяемые почти всюду на $(0, +\infty)$ формулами

$$g_k(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{k_1(xy)}{y} f(y) dy,$$

$$g_h(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{h_1(xy)}{y} f(y) dy.$$

При этом функции $g_k(x)$ и $g_h(x)$ из класса $L_2(0, +\infty)$, и почти всюду на $(0, +\infty)$ справедливы формулы обращения

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{h_1(xy)}{y} g_k(y) dy,$$

$$x \in (0, +\infty)$$

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{k_1(xy)}{y} g_h(y) dy.$$

В § 1 настоящей статьи строятся прямые и обратные интегральные преобразования для случая, когда функция $K(s)$ и $H(s)$ вместо (1) удовлетворяют функциональному уравнению вида

$$K(s)H(1-s)\Phi_1(1-s)\Phi_2(s)=1, \operatorname{Res}=\frac{1}{2}$$

при определенных ограничениях, накладываемых на функции $\Phi_1(s)$ и $\Phi_2(s)$.

Определяя смысл операторов $\Phi_1\left(-x\frac{d}{dx}\right)f(x)$ и $\Phi_2\left(-x\frac{d}{dx}\right)g(x)$, мы устанавливаем, что для любой функции $f(x)$ из класса

$$\Phi_1\left(-x\frac{d}{dx}\right)f(x) \in L_2(0, +\infty) \text{ формула}$$

$$g(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{k_1(xy)}{y} \Phi_1\left(-y\frac{d}{dy}\right)f(y) dy$$

почти всюду на $(0, +\infty)$ определяет функцию $g(x)$ из класса

$$\Phi_2\left(-x\frac{d}{dx}\right)g(x) \in L_2(0, +\infty).$$

Вместе с этим имеет место формула обращения

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{h_1(xy)}{y} \Phi_2\left(-y\frac{d}{dy}\right)g(y) dy,$$

почти всюду на $(0, +\infty)$.

Установленные здесь результаты представляют собой дальнейшее развитие теории интегральных преобразований Ватсона-Планшереля.

В § 2 приводятся различные следствия из теорем, приведенных в § 1.

В частности, в случае, когда $\Phi_1(s) \equiv 1$, приводятся формулы обращения для некоторых известных интегральных преобразований (Лапласа, Стильтьеса и др.) в классе $L_2(0, +\infty)$, которые ранее были получены Винером и Палеем [3], Поллардом [4] другим путем.

Но кроме того, на основании результатов § 1 даются обращения некоторых новых специальных классов интегральных преобразований.

Автор считает своим приятным долгом выразить признательность своему учителю проф. М. М. Джрбашяну за ценные советы и руководство при выполнении данной работы.

§ 1. Обобщение теорем Ватсона-Планшереля

1°. Приведем сначала формулировки некоторых известных результатов из теории преобразований Меллина, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

Две функции $f(x)$ и $F(s)$ являются преобразованиями Меллина одна относительно другой, если они связаны двойственными соотношениями вида

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx, \quad (1.1)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) x^{-s} ds, \quad (c > 0). \quad (1.2)$$

Пары преобразований Меллина будем обозначать соответственно через $f(x)$, $F(s)$; $g(x)$, $G(s)$; $k(x)$, $K(s)$; $h(x)$, $H(s)$ и т. д.

Имеют место следующие теоремы [1; § 3, 17].

Теорема А. Если $f(x) \in L_2(0, +\infty)$, тогда функции

$$F(s, a) = \int_{\frac{1}{a}}^a f(x) x^{s-1} dx; \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2} \quad (1.3)$$

при $a \rightarrow +\infty$ сходятся в среднем квадратичном на прямой $\left(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty\right)$ к некоторой функции $F(s)$. Функции

$$f(x, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - ia}^{\frac{1}{2} + ia} F(s) x^{-s} ds, \quad x > 0 \quad (1.4)$$

при $a \rightarrow +\infty$ на полуоси $(0, +\infty)$ сходятся в среднем квадратичном к $f(x)$.

Обратно, если $F(s) \in L_2\left(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty\right)$, то интегралы (1.4) при $a \rightarrow +\infty$ сходятся в среднем квадратичном на $(0, +\infty)$ к некоторой функции $f(x) \in L_2(0, +\infty)$. Тогда интегралы (1.3) сходятся в среднем квадратичном на прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ к функции $F(s)$.

Теорема Б. Если $f(x) \in L_2(0, +\infty)$ и $g(x) \in L_2(0, +\infty)$, тогда имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^{\infty} f(x) g(x) dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - i\infty}^{\frac{1}{2} + i\infty} F(s) G(1-s) ds. \quad (1.5)$$

Заметим теперь, что если $f(x) \in L_2(0, \infty)$, то для любого $y > 0$ имеем также $f(xy) \in L_2(0, +\infty)$. Из (1.1) или (1.2) следует, что $F(s)y^{-s}$

есть преобразование Меллина функции $f(xy)$, поэтому формулу (1.5) можно написать также в виде

$$\int_0^{\infty} f(xy) g(x) dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} F(s) G(1-s) y^{-s} ds, \quad y > 0. \quad (1.6)$$

2° Определение 1. Относим к классам Φ_a и Φ_b все функции $\Phi(s)$, определенные на линии $\text{Re } s = \frac{1}{2}$ и удовлетворяющие соответственно одному из условий:

а) $\Phi(s)$ есть полином определенной степени $m \geq 0$, не имеющий нулей на линии $\text{Re } s = \frac{1}{2}$;

б) $\Phi(s) \neq 0$, $\text{Re } s = \frac{1}{2}$ и существует неубывающая на полуоси $[0, +\infty)$ функция $p(t)$, такая, что

$$tp'(t) \uparrow +\infty, \quad t \uparrow +\infty, \quad \int_0^{\infty} \frac{p(t)}{t^2} dt = +\infty, \quad (1.7)$$

$$\left| \Phi\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| \geq e^{p(t)}, \quad |t| \geq t_0 \geq 0.$$

Докажем две предварительные леммы.

Лемма 1. Если $\Phi(s) \in \Phi_b$, то существует последовательность полиномов $\{P_n(s)\}$ ($n = 0, 1, \dots$), для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(s) = \Phi(s), \quad \text{Re } s = \frac{1}{2},$$

$$|P_n(s)| \leq M |\Phi(s)|, \quad (n = 0, 1, \dots), \quad \text{Re } s = \frac{1}{2},$$

где M — постоянная, не зависящая от n .

Доказательство. Построим непрерывную функцию $f_n(t)$ так, чтобы отношение

$$\frac{f_n(t)}{\Phi\left(\frac{1}{2} + it\right)}$$

равнялось нулю вне интервала $(-n-1, n+1)$, единице в интервале $[-n, n]$ и было линейной функцией в интервалах $[-n-1, -n]$, $[n, n+1]$. Но, как следует из теоремы М. М. Джрбашяна ([5], стр. 371), система полиномов полна при приближении с весом $\left| \Phi\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^{-1}$. Поэтому при любом натуральном n найдется полином $Q_n(t)$, для которого

$$\frac{|f_n(t) - Q_n(t)|}{\left|\Phi\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|} \leq \frac{1}{n+1},$$

откуда

$$\frac{|Q_n(t)|}{\left|\Phi\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|} \leq 1 + \frac{1}{n+1}, \quad (-\infty < t < +\infty).$$

Следовательно, при $-\infty < t < +\infty$

$$|Q_n(t)| \leq 2 \left|\Phi\left(\frac{1}{2} + it\right)\right| \quad (n = 0, 1, \dots)$$

кроме того

$$\left|1 - \frac{Q_n(t)}{\Phi\left(\frac{1}{2} + it\right)}\right| \leq \frac{1}{n+1} \quad (-n \leq t \leq n).$$

Иначе говоря,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(t) = \Phi\left(\frac{1}{2} + it\right), \quad (-\infty < t < +\infty)^*.$$

Теперь остается представить полиномы $Q_n(t)$ в виде $P_n\left(\frac{1}{2} + it\right)$,

чем и завершается доказательство.

Пусть $\Phi(s) \in \Phi_b$, тогда, по лемме 1, существует последовательность полиномов $\{P_n(s)\}$, $s = \frac{1}{2} + it$ ($n = 0, 1, \dots$) таких, что при

$$\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$$

$$|P_n(s)| \leq M |\Phi(s)|, \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (1.8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(s) = \Phi(s).$$

Определение 2. Пусть $\Phi(s) \in \Phi_b$. Обозначим через $\Phi\left(-x \frac{d}{dx}\right)f(x)$ предел в среднем

$$\text{l. i. m.}_{n \rightarrow \infty} P_n\left(-x \frac{d}{dx}\right)f(x)$$

для любой последовательности полиномов $\{P_n(s)\}$ ($n = 0, 1, \dots$), удовлетворяющих условиям (1.8) если он существует.

Лемма 2. Пусть функция $F(s)$ такова, что $\Phi(s)F(s) \in L_2\left(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty\right)$, где $\Phi(s) \in \Phi_a$ или Φ_b . Тогда будем иметь:

* Что из полноты следует существование полиномов $Q_n(t)$ с указанными свойствами, было отмечено Поллардом [6].

$$а) \quad s^k F(s) \in L_2\left(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty\right) \quad (k=0, 1, \dots, m),$$

если

$\Phi(s)$ есть полином степени m и $s^k F(s) \in L_2\left(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty\right)$,
 $(k=0, 1, \dots)$ — в противном случае

б) существует $\Phi\left(-x \frac{d}{dx}\right) f(x)$ и является преобразованием Меллина от функции $F(s)$ $\Phi(s)$.

Доказательство. Положим сначала, что $\Phi(s) \in \Phi_b$ не сводится к полиному. Пусть

$$c_k = \sup_{\text{Re } s = 1/2} \left| \frac{s^k}{\Phi(s)} \right|^2,$$

тогда

$$\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} |s^k F(s)|^2 ds \leq c_k \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} |\Phi(s) F(s)|^2 ds < +\infty, \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Так как $s^k F(s) \in L_2\left(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty\right)$, $(k=0, 1, \dots)$, то интегралы

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} F(s) s^k x^{-s} ds, \quad x > 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

абсолютно сходятся.

Последовательно применяя операцию $-x \frac{d}{dx}$ к обеим частям формулы

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} F(s) x^{-s} ds$$

получим

$$\left(-x \frac{d}{dx}\right)^k f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} F(s) s^k x^{-s} ds, \quad (k=0, 1, \dots). \quad (1.9)$$

Если $\{P_n(s)\}$ ($n=0, 1, \dots$) произвольная последовательность полиномов, удовлетворяющих условию (1.8), то из (1.9) получим формулы

$$P_n\left(-x \frac{d}{dx}\right) f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} F(s) P_n(s) x^{-s} ds, \quad (n=0, 1, \dots). \quad (1.10)$$

Пусть

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} F(s) \Phi(s) x^{-s} ds, \quad (1.11)$$

тогда из (1.10) и (1.11) получим:

$$\varphi(x) - P_n \left(-x \frac{d}{dx} \right) f(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} F(s) [\Phi(s) - P_n(s)] x^{-s} ds.$$

Отсюда, из равенства Парсеваля для преобразований Меллина, имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left| \varphi(x) - P_n \left(-x \frac{d}{dx} \right) f(x) \right|^2 dx &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} |F(s)|^2 |\Phi(s) - P_n(s)|^2 ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} |F(s) \Phi(s)|^2 \left| 1 - \frac{P_n(s)}{\Phi(s)} \right|^2 ds. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Так как $F(s) \Phi(s) \in L_2 \left(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty \right)$, то для данного $\varepsilon > 0$ число $R = R(\varepsilon)$ можно выбрать таким образом, чтобы

$$\int_{|s-\frac{1}{2}|>R} |F(s) \Phi(s)|^2 ds < \varepsilon, \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}. \quad (1.13)$$

Правую часть (1.12) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} |F(s) \Phi(s)|^2 \left| 1 - \frac{P_n(s)}{\Phi(s)} \right|^2 ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-iR}^{\frac{1}{2}+iR} |F(s) \Phi(s)|^2 \left| 1 - \frac{P_n(s)}{\Phi(s)} \right|^2 ds + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-\frac{1}{2}|>R} |F(s) \Phi(s)|^2 \left| 1 - \frac{P_n(s)}{\Phi(s)} \right|^2 ds = \\ &= I_1^{(n)}(R) + I_2^{(n)}(R). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Но полиномы $P_n(s)$ таковы, что

$$\sup_{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}} \left| 1 - \frac{P_n(s)}{\Phi(s)} \right| = M < +\infty, \quad (n = 0, 1, \dots),$$

где M не зависит от n .

Поэтому в силу (1.13)

$$|I_2^{(n)}(R)| \leq M\varepsilon, \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (1.15)$$

Далее, в силу второго из свойств (1.8) полиномов $P_n(s)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1^{(n)}(R) = 0. \quad (1.15')$$

Из (1.15) и (1.15') следует, что

$$\text{l. i. m.}_{n \rightarrow \infty} P_n \left(-x \frac{d}{dx} \right) f(x) = \varphi(x).$$

Заметим теперь, что если $Q_n(t) = P_n \left(\frac{1}{2} + it \right)$ ($-\infty < t < +\infty$), то из существования

$$\text{l. i. m.}_{n \rightarrow \infty} P_n \left(-x \frac{d}{dx} \right) f(x) = \varphi(x)$$

следует также, что

$$\frac{1}{Vx} \text{l. i. m.}_{n \rightarrow \infty} Q_n \left(ix \frac{d}{dx} \right) V\bar{x} f(x) = \varphi(x).$$

Действительно, легко проверить, что

$$\frac{1}{Vx} Q_n \left(ix \frac{d}{dx} \right) V\bar{x} f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} P_n(s) F(s) x^{-s} ds \quad (n=0, 1, \dots),$$

$$\text{т. е. } \frac{1}{Vx} Q_n \left(ix \frac{d}{dx} \right) V\bar{x} f(x) = P_n \left(-x \frac{d}{dx} \right) f(x) \quad (n=0, 1, \dots),$$

откуда следует наше утверждение.

Если же функция $\Phi(s)$ есть некоторый полином степени $m \geq 0$, то обозначая

$$c_{m,k} = \sup_{\text{Re } s = \frac{1}{2}} \left| \frac{s^k}{\Phi(s)} \right|^2, \quad (k=0, 1, \dots, m)$$

имеем

$$\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} |s^k F(s)|^2 ds \leq c_{m,k} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} |\Phi(s) F(s)|^2 ds < +\infty \quad (k=0, 1, \dots, m)$$

и из (1.9) при $k=0, 1, \dots, m$ легко следует формула

$$\Phi \left(-x \frac{d}{dx} \right) f(x) = \varphi(x)$$

т. е. справедливость леммы.

3°. Перейдем теперь к доказательству некоторых теорем, являющихся естественными обобщениями теоремы Ватсона-Планшереля [1].

Теорема 1. Пусть на линии $s = \frac{1}{2} + it$ ($-\infty < t < +\infty$) функции $K(s)$, $H(s)$, $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$ связаны соотношением

$$K(s)H(1-s)\Phi_1(1-s)\Phi_2(s) = 1, \quad (1.16)$$

где $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s) \in \Phi_a$ или Φ_b и

$$\sup_{\text{Res} = \frac{1}{2}} |K(s)\Phi_2(s)| < +\infty, \quad (1.17)$$

$$\sup_{\text{Res} = \frac{1}{2}} |H(s)| < +\infty. \quad (1.18)$$

Тогда для любой функции $f(x)$ из класса $\Phi_1\left(-x\frac{d}{dx}\right)f(x) \in L_2(0, +\infty)$, формула

$$g(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{k_1(xy)}{y} \Phi_1\left(-y\frac{d}{dy}\right) f(y) dy \quad (1.19)$$

определяет почти всюду на $(0, +\infty)$ функцию $g(x)$ из класса $\Phi_2\left(-x\frac{d}{dx}\right)g(x) \in L_2(0, +\infty)$. Почти всюду на $(0, +\infty)$ имеет место двойственная формула

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{h_1(xy)}{y} \Phi_2\left(-y\frac{d}{dy}\right) g(y) dy. \quad (1.20)$$

Доказательство. По теореме А существует предел в среднем на линии $\text{Res} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{1/a}^a \Phi_1\left(-x\frac{d}{dx}\right) f(x) \cdot x^{s-1} dx,$$

и по лемме 2 этот предел равен $\Phi_1(s)F(s)$. Из (1.17) следует, что

$$K(s)\Phi_1(1-s)F(1-s) \in L_2\left(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty\right).$$

Если обозначим

$$g(x, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} K(s)\Phi_1(1-s)F(1-s)x^{-s} ds, \quad (1.21)$$

то по теореме А существует предел в среднем

$$g(x) = \text{l.i.m.}_{a \rightarrow +\infty} g(x, a), \quad (1.21')$$

причем $g(x) \in L_2(0, +\infty)$.

Пусть

$$G(s) = \text{l.i.m.}_{a \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{a}}^a g(x) x^{s-1} dx, \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}, \quad (1.22)$$

тогда из (1.21) и (1.22) следует, что

$$G(s) = K(s) \Phi_1(1-s) F(1-s), \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}. \quad (1.23)$$

Далее, из (1.23) и (1.17) заключаем, что

$$\Phi_2(s) G(s) \in L_2\left(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty\right),$$

и в силу леммы 2

$$\Phi_2\left(-x \frac{d}{dx}\right) g(x) \in L_2(0, +\infty).$$

Из (1.21) имеем:

$$\int_0^x g(u, a) du = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} \frac{K(s)}{1-s} \Phi_1(1-s) F(1-s) x^{1-s} ds$$

откуда, имея в виду (1.21') и переходя к пределу при $a \rightarrow +\infty$, получим формулу

$$\int_0^x g(u) du = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{K(s)}{1-s} \Phi_1(1-s) F(1-s) x^{1-s} ds, \quad (1.24)$$

причем интеграл справа сходится в обычном смысле.

По теореме Б формулу (1.24) можно записать в виде:

$$\int_0^x g(u) du = \int_0^x \frac{k_1(xy)}{y} \Phi_1\left(-y \frac{d}{dy}\right) f(y) dy,$$

т. е. утверждение (1.19) установлено.

Из (1.23) и (1.16) получим

$$F(s) = H(s) \Phi_2(1-s) G(1-s), \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}. \quad (1.25)$$

Так как $\Phi_2(1-s) G(1-s) \in L_2\left(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty\right)$, то в силу (1.18)

$$H(s) \Phi_2(1-s) G(1-s) \in L_2\left(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty\right).$$

Обозначим

$$f(x, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - ia}^{\frac{1}{2} + ia} H(s) \Phi_2(1-s) G(1-s) x^{-s} ds,$$

тогда

$$\int_0^x f(u, a) du = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - ia}^{\frac{1}{2} + ia} \frac{H(s)}{1-s} \Phi_2(1-s) G(1-s) x^{1-s} ds \quad (1.26)$$

и так как по теореме А l.i.m. $f(u, a) = f(u)$, то из (1.26) следует

$$\int_0^x f(u) du = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - i\infty}^{\frac{1}{2} + i\infty} \frac{H(s)}{1-s} \Phi_2(1-s) G(1-s) x^{1-s} ds. \quad (1.27)$$

По теореме Б формулу (1.27) можно записать в виде

$$\int_0^x f(u) du = \int_0^\infty \frac{h_1(xy)}{y} \Phi_2\left(-y \frac{d}{dy}\right) g(y) dy,$$

т. е. утверждение (1.20) также установлено.

Очевидно, что при $\Phi_1(s) \equiv \Phi_2(s) \equiv 1$ из доказанной теоремы следует теорема Ватсона [1 теорема 129].

Легко видеть, что если взамен (1.17), (1.18) выполняются условия

$$\sup_{\text{Res} = \frac{1}{2}} |H(s) \Phi_1(s)| < +\infty, \quad \sup_{\text{Res} = \frac{1}{2}} |K(s)| < +\infty,$$

то в теореме 1 утверждения (1.19) и (1.20) меняются местами.

Теорема 2. Пусть на линии $s = \frac{1}{2} + it$ ($-\infty < t < +\infty$) функции $K(s)$, $H(s)$, $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$ связаны соотношением

$$K(s) H(1-s) \Phi_1(1-s) \Phi_2(s) = 1, \quad (1.28)$$

где $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s) \in \Phi_a$ или Φ_b и

$$\sup_{\text{Res} = \frac{1}{2}} |K(s) \Phi_2(s)| < +\infty, \quad (1.29)$$

$$\sup_{\text{Res} = \frac{1}{2}} |H(s) \Phi_1(s)| < +\infty. \quad (1.30)$$

Тогда для любой функции $f(x)$ из $L_2(0, +\infty)$ формула

$$g(x) = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \Phi_2 \left(-y \frac{d}{dy} \right) \frac{k_1(xy)}{y} \cdot f(y) dy \quad (1.31)$$

определяет почти всюду на $(0, +\infty)$ функцию $g(x)$, также принадлежащую к классу $L_2(0, +\infty)$. Почти всюду на $(0, +\infty)$ имеет место двойственная формула

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \Phi_1 \left(-y \frac{d}{dy} \right) \frac{h_1(xy)}{y} g(y) dy. \quad (1.32)$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ — произвольная функция из $L_2(0, +\infty)$, так что $F(s) \in L_2\left(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty\right)$. В силу (1.29)

$$K(s) \Phi_2(s) F(1-s) \in L_2\left(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty\right).$$

Пусть $g(x)$ — ее преобразование Меллина. Тогда

$$\int_0^x g(u) du = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{K(s) \Phi_2(s) F(1-s)}{1-s} x^{1-s} ds. \quad (1.33)$$

Но по лемме 2 $\frac{K(s) \Phi_2(s)}{1-s}$ преобразование Меллина для

$\Phi_2\left(-x \frac{d}{dx}\right) \frac{k_1(x)}{x}$. Поэтому, в силу формулы Парсеваля для преобразований Меллина, (1.33) эквивалентна равенству

$$\int_0^x g(u) du = \int_0^{\infty} \Phi_2 \left(-y \frac{d}{dy} \right) \frac{k_1(xy)}{y} \cdot f(y) dy,$$

откуда вытекает, что почти всюду имеет место равенство (1.31). Так как

$$G(s) = K(s) \Phi_2(s) F(1-s), \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2},$$

то в силу (1.28) следует, что

$$F(s) = H(s) \Phi_1(s) G(1-s), \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^x f(u) du = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{H(s) \Phi_1(s)}{1-s} G(1-s) x^{1-s} ds. \quad (1.34)$$

Наконец, так как $\frac{H(s)\Phi_1(s)}{1-s}$ преобразование Меллина для

$$\Phi_1\left(-x\frac{d}{dx}\right)\frac{h_1(x)}{x}, \text{ то}$$

$$\int_0^x f(u) du = \int_0^\infty \Phi_1\left(-y\frac{d}{dy}\right)\frac{h_1(xy)}{y} \cdot g(y) dy.$$

Справедливо также следующее обобщение теорем 1 и 2, доказательство которого мы опускаем ввиду того, что оно сходно с доказательствами теорем 1 и 2.

Теорема 3. Пусть на линии $s = \frac{1}{2} + it$ ($-\infty < t < +\infty$) функции $K(s)$, $H(s)$, $\Phi_1(s)$, $\Psi_1(s)$, $\Phi_2(s)$, $\Psi_2(s)$ связаны соотношением

$$K(s)H(1-s)\Phi_1(1-s)\Psi_1(1-s)\Phi_2(s)\Psi_2(s) = 1,$$

где $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$, $\Psi_1(s)$, $\Psi_2(s) \in \Phi_\alpha$ или Φ_β и

$$\sup_{\text{Res}=\frac{1}{2}} |K(s)\Phi_2(s)\Psi_2(s)| < +\infty,$$

$$\sup_{\text{Res}=\frac{1}{2}} |H(s)\Phi_1(s)| < +\infty.$$

Тогда, для любой функции $f(x)$ из класса $\Psi_1\left(-x\frac{d}{dx}\right)f(x) \in L_2(0, +\infty)$, формула

$$g(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \Phi_2\left(-y\frac{d}{dy}\right)\frac{k_1(xy)}{y} \Psi_1\left(-y\frac{d}{dy}\right)f(y) dy$$

определяет почти всюду на $(0, +\infty)$ функцию $g(x)$ принадлежащую к классу $\Psi_2\left(-x\frac{d}{dx}\right)g(x) \in L_2(0, +\infty)$. Двойственная формула

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \Phi_1\left(-y\frac{d}{dy}\right)\frac{h_1(xy)}{y} \Psi_2\left(-y\frac{d}{dy}\right)g(y) dy$$

также имеет место почти всюду на $(0, +\infty)$.

Теорема 4. (Аналог равенства Парсеваля). Пусть удовлетворены условия теоремы 1. Тогда для любых функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, для которых $\Phi_1\left(-x\frac{d}{dx}\right)f_1(x) \in L_2(0, +\infty)$, $\Phi_2\left(-x\frac{d}{dx}\right)f_2(x) \in L_2(0, +\infty)$ имеет место равенство

$$\int_0^{\infty} f_1(xy) f_2(y) dy = \int_0^{\infty} g_h(xy) g_k(y) dy, \quad x > 0, \quad (1.35)$$

где

$$g_k(x) = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{k_1(xy)}{y} \Phi_1\left(-y \frac{d}{dy}\right) f_1(y) dy, \quad (1.36)$$

$$g_h(x) = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{h_1(xy)}{y} \Phi_2\left(-y \frac{d}{dy}\right) f_2(y) dy. \quad (1.37)$$

При условиях (1.29) и (1.30) имеет место также равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \left\{ \Phi_1\left(-x \frac{d}{dx}\right) f_1(xy) \right\} \left\{ \Phi_2\left(-x \frac{d}{dx}\right) f_2(x) \right\} dx = \\ & = \int_0^{\infty} \left\{ \Phi_1\left(-x \frac{d}{dx}\right) g_h(xy) \right\} \left\{ \Phi_2\left(-x \frac{d}{dx}\right) g_k(x) \right\} dx. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Доказательство. Если $G_h(s)$ и $G_k(s)$ суть соответственно преобразования Меллина функций $g_h(x)$ и $g_k(x)$, то, как легко видеть, соотношения (1.36) и (1.37) в терминах преобразования Меллина соответственно эквивалентны формулам

$$G_k(s) = K(s) \Phi_1(1-s) F_1(1-s), \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}, \quad (1.39)$$

$$G_h(s) = H(s) \Phi_2(1-s) F_2(1-s), \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}. \quad (1.40)$$

Из (1.39), (1.40) и (1.16) следует равенство

$$F_1(s) F_2(1-s) = G_h(s) G_k(1-s), \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}. \quad (1.41)$$

Умножая (1.41) на x^{-s} ($x > 0$) и интегрируя результат по линии $s = \frac{1}{2} + it$ ($-\infty < t < +\infty$) по теореме Б получим формулу (1.35). Умножая обе части равенства (1.41) на $\Phi_1(s) \Phi_2(1-s)$ и используя тот факт, что при условиях (1.29) и (1.30) $\Phi_1(s) G_h(s) \in L_2\left(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty\right)$ и $\Phi_2(s) G_k(s) \in L_2\left(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty\right)$, по теореме Б получим равенство (1.38).

Следствие. а) При условиях теоремы 1, если функции $\Phi_1\left(-x \frac{d}{dx}\right) f(x)$ и $\Phi_2\left(-x \frac{d}{dx}\right) f(x)$ из класса $L_2(0, +\infty)$, то

$$\int_0^{\infty} [f(x)]^2 dx = \int_0^{\infty} g_h(x) g_k(x) dx, \quad (1.42)$$

где

$$g_k(x) = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{k_1(xy)}{y} \Phi_1\left(-y \frac{d}{dy}\right) f(y) dy,$$

$$g_h(x) = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{h_1(xy)}{y} \Phi_2\left(-y \frac{d}{dy}\right) f(y) dy.$$

б) Если при условиях теоремы 1 дополнительно полагать, что

$$\overline{H(1-s) \Phi_2(s)} = K(s) \Phi_1(1-s), \quad \text{Res} = \frac{1}{2}, \quad (1.43)$$

то

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_0^{\infty} |g_k(x)|^2 dx = \int_0^{\infty} |g_h(x)|^2 dx, \quad (1.44)$$

где

$$g_k(x) = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{k_1(xy)}{y} \Phi_1\left(-y \frac{d}{dy}\right) f(y) dy,$$

$$g_h(x) = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{h_1(xy)}{y} \Phi_2\left(-y \frac{d}{dy}\right) \overline{f(y)} dy.$$

Действительно, (1.42) следует из (1.35), если полагать, что $\tilde{f}_2(y) = f_1(y) = f(y)$, $y \in (0, +\infty)$ и $x=1$. (1.44) следует из (1.35), если в последнем положить $f_1(y) = f(y)$, $f_2(y) = \overline{f(y)}$, $x=1$ и учесть, что в силу условия (1.43) $G_k(s) = \overline{G_h(1-s)}$, т. е. $g_k(x) = \overline{g_h(x)}$.

§ 2. Примеры и применения

Теорема 5. Пусть функции $k(x)$ и $h(x)$ таковы, что

$$\sup_{\text{Res}=\frac{1}{2}} |K(s) [\Gamma(s)]^{-1}| < +\infty, \quad (2.1)$$

$$\sup_{\text{Res}=\frac{1}{2}} |H(s)| < +\infty, \quad (2.2)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{k(x) h_1(ux)}{x} dx = \log(1+u), \quad (u > 0). \quad (2.3)$$

Тогда, для любой функции $f(x)$ из класса $\left[\Gamma\left(-x \frac{d}{dx}\right)\right]^{-1} f(x) \in$

$L_2(0, +\infty)$, формула

2 Известия АН, серия физ.-мат. наук, 1967



$$g(x) = \int_0^{\infty} k(xy) \left[\Gamma\left(-y \frac{d}{dy}\right) \right]^{-1} f(y) dy \quad (2.4)$$

определяет почти всюду на $(0, \infty)$ функцию $g(x)$ из класса $\left[\Gamma\left(-x \frac{d}{dx}\right) \right]^{-1} g(x) \in L_2(0, +\infty)$. Почти всюду на $(0, +\infty)$ имеет место двойственная формула

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{h_1(xy)}{y} \left[\Gamma\left(-y \frac{d}{dy}\right) \right]^{-1} g(y) dy. \quad (2.5)$$

Доказательство. По формуле Парсеваля для преобразований Меллина на (2.3) имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{H(s) K(1-s)}{1-s} u^{-s} ds = \frac{\log(1+u)}{u}, \quad (u > 0),$$

но

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{\Gamma(s) \Gamma(1-s)}{1-s} u^{-s} ds = \frac{\log(1+u)}{u}, \quad (u > 0),$$

поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \left\{ \frac{H(s) K(1-s)}{1-s} - \frac{\Gamma(s) \Gamma(1-s)}{1-s} \right\} u^{-s} ds = 0. \quad (2.6)$$

Так как $\frac{H(s) K(1-s)}{1-s} - \frac{\Gamma(s) \Gamma(1-s)}{1-s} \in L\left(\frac{1}{2}-i\infty, \frac{1}{2}+i\infty\right)$, то по известной теореме (см. [1], теорема 32) из (2.6) имеем

$$K(s) H(1-s) - \Gamma(s) \Gamma(1-s) = 0. \quad \text{Res} = \frac{1}{2}. \quad (2.7)$$

Далее заметим, что по формуле дополнения $\Gamma(s) \Gamma(1-s) = \pi [\sin \pi s]^{-1}$, поэтому

$$\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| = \sqrt{\frac{\pi}{\text{ch } \pi t}}.$$

Отсюда получим оценку

$$\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^{-1} \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\pi}{2}|t|},$$

т. е. $[\Gamma(s)]^{-1} \in \Phi_b$.

Положив в теореме 1 $\Phi_1(s) = \Phi_2(s) = [\Gamma(s)]^{-1}$, $\left(\text{Res} = \frac{1}{2}\right)$, из (2.7) получим

$$K(s)H(1-s)\Phi_1(1-s)\Phi_2(s) = 1, \text{Res} = \frac{1}{2}.$$

Иначе говоря, удовлетворено условие (1.16).

Из (2.1) и (2.2) следует, что выполняются и условия (1.17), (1.18) теоремы 1, из которой и следует наше утверждение.

Теорема 5'. Пусть удовлетворены условия (2.2) и (2.3) теоремы 5, а вместо (2.1) удовлетворяется условие:

$$\sup_{-\infty < t < +\infty} \left| K\left(\frac{1}{2} + it\right) e^{z|t|} \right| < +\infty. \quad (2.8)$$

Тогда, для любой функции $f(x)$ из класса $L_2(0, +\infty)$, формула

$$g(x) = \int_0^\infty k(xy) f(y) dy \quad (2.9)$$

определяет почти всюду на $(0, +\infty)$ функцию $g(x)$ из класса $\sin \pi \left(-x \frac{d}{dx}\right) g(x) \in L_2(0, +\infty)$. Почти всюду на $(0, +\infty)$ имеет место двойственная формула

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{h_1(xy)}{y} \sin \pi \left(-y \frac{d}{dy}\right) g(y) dy, \quad (2.10)$$

где

$$\sin \pi \left(-x \frac{d}{dx}\right) g(x) = \frac{1}{Vx} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \left(\pi x \frac{d}{dx}\right)^{2k}}{(2k)!} Vx f(x). \quad (2.11)$$

Доказательство. Так как

$$\left| \sin \pi \left(\frac{1}{2} + it\right) \right| = |\text{ch } \pi t| > \frac{1}{2} e^{z|t|},$$

то ясно, что $\sin \pi s \in \Phi_b$.

Положив в теореме 1 $\Phi_1(s) = 1 \in \Phi_a$ и $\Phi_2(s) = \pi^{-1} \sin \pi s \in \Phi_b$, в силу (2.7) имеем:

$$K(s)H(1-s)\Phi_1(1-s)\Phi_2(s) = 1, \text{Res} = \frac{1}{2},$$

т. е. удовлетворяется условие (1.16). Из (2.2) и (2.8) следует, что выполняются также условия (1.17) и (1.18) теоремы 1, которая и устанавливает наше утверждение.

Так как

$$\sin \pi \left(\frac{1}{2} + it \right) = \operatorname{ch} \pi t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi^{2k}}{(2k)!} t^{2k},$$

то в качестве последовательностей полиномов $\left\{ P_n \left(\frac{1}{2} + it \right) \right\}$ ($n = 0, 1, \dots$) можно взять

$$P_n \left(\frac{1}{2} + it \right) = Q_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{\pi^{2k}}{(2k)!} t^{2k},$$

так как удовлетворяется условие (1.8). Тогда

$$\begin{aligned} \sin \pi \left(-x \frac{d}{dx} \right) g(x) &= \text{l. i. m.}_{n \rightarrow \infty} P_n \left(-x \frac{d}{dx} \right) g(x) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \text{l. i. m.}_{n \rightarrow \infty} Q_n \left(ix \frac{d}{dx} \right) \sqrt{x} f(x) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \text{l. i. m.}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \left(\pi x \frac{d}{dx} \right)^{2k}}{(2k)!} \sqrt{x} f(x), \end{aligned}$$

т. е. (2.11) доказано.

Следствие. Интегральное преобразование Стильтьеса

$$g(x) = \int_0^{\infty} \frac{f(y)}{x+y} dy, \quad f(y) \in L_2(0, +\infty) \quad (2.12)$$

обращается формулой

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sin \pi \left(-x \frac{d}{dx} \right) g(x). \quad (2.13)$$

Действительно, положив в теореме 5'

$$k(x) = \frac{1}{1+x}, \quad H(s) = 1,$$

убеждаемся, что все условия теоремы 5' выполняются, если $\Phi_1(s) \equiv 1$, $\Phi_2(s) = \pi^{-1} \sin \pi s$. Поэтому интегральное преобразование

$$g(x) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(y)}{1+xy} dy, \quad \varphi(y) \in L_2(0, +\infty) \quad (2.14)$$

обращается формулой

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{h_1(xy)}{y} \sin \pi \left(-y \frac{d}{dy} \right) g(y) dy, \quad (2.15)$$

где

$$h_1(x) = \begin{cases} 1, & x > 1, \\ 0, & 0 < x < 1. \end{cases} \quad (2.16)$$

Из (2.15) следует

$$\frac{1}{x} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\pi} \sin \pi \left(-x \frac{d}{dx}\right) g(x). \quad (2.17)$$

Обозначая $\frac{1}{x} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) \in L_2(0, +\infty)$, из (2.14) и (2.17) получаем (2.12) и (2.13).

Эта формула обращения преобразования Стильтьеса содержится в книге Винера-Палея [3].

Заметим, что в данном случае выполняется не только условие

$$\sup_{\text{Res} = \frac{1}{2}} |K(s) \Phi_2(s)| < +\infty,$$

но и условие

$$\sup_{\text{Res} = \frac{1}{2}} |H(s) \Phi_1(s)| < +\infty.$$

Поэтому верно и обратное утверждение, а именно, что решение уравнения

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sin \pi \left(-x \frac{d}{dx}\right) g(x),$$

где $f(x) \in L_2(0, +\infty)$, запишется в виде (2.12).

Последнее утверждение для функции $f(x)$ из класса $V\sqrt{x}f(x) \in C \cdot B(0, +\infty)$ (т. е. функция $V\sqrt{x}f(x)$ непрерывна и ограничена), при граничных условиях:

$$\begin{aligned} g(x) &= O(1), \quad x \rightarrow \infty, \\ xg(x) &= O(1), \quad x \rightarrow 0, \end{aligned}$$

следует из теоремы Хиршмана и Уидлера (см. [7], гл. III, теорема 8.3).

Получим формулу обращения для обобщенного преобразования Стильтьеса.

Теорема 6. Для любой функции $f(x) \in L_2(0, +\infty)$ формула

$$g(x) = \Gamma(1+\alpha) \int_0^\infty \frac{y^\alpha f(y)}{(x+y)^{1+\alpha}} dy, \quad (\text{Re } \alpha > 0) \quad (2.18)$$

определяет почти всюду на $(0, +\infty)$ функцию $g(x)$ из класса

$$\left[\Gamma\left(-x \frac{d}{dx}\right) \Gamma\left(1+\alpha+x \frac{d}{dx}\right) \right]^{-1} g(x) \in L_2(0, +\infty).$$

Почти всюду на $(0, +\infty)$ имеет место двойственная формула

$$f(x) = \left[\Gamma\left(-x \frac{d}{dx}\right) \Gamma\left(1+\alpha+x \frac{d}{dx}\right) \right]^{-1} g(x). \quad (2.19)$$

Доказательство. Из формулы Стирлинга можно легко получить, что функция $|\Gamma(s)\Gamma(1+\alpha-s)|^{-1}$ удовлетворяет неравенству

$$\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha - it\right) \right|^{-1} > ce^{z|t| - \alpha \log |t|}, \quad |t| \geq t_0$$

т. е. $|\Gamma(s)\Gamma(1+\alpha-s)|^{-1} \in \Phi_b$. Поэтому, полагая в теореме 1 $K(s) = \Gamma(s)\Gamma(1+\alpha-s)$, $H(s) \equiv 1$, $\Phi_1(s) \equiv 1$, $\Phi_2(s) = |\Gamma(s)\Gamma(1+\alpha-s)|^{-1} \in \Phi_b$, получаем, что все условия теоремы 1 удовлетворяются. Следовательно, преобразование

$$g(x) = \Gamma(1+\alpha) \int_0^\infty \frac{\varphi(y)}{(1+xy)^{1+\alpha}} dy, \quad \varphi(y) \in L_2(0, \infty), \quad (2.20)$$

обращается формулой

$$\varphi(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{h_1(xy)}{y} \left[\Gamma\left(-y \frac{d}{dy}\right) \Gamma\left(1+\alpha+y \frac{d}{dy}\right) \right]^{-1} g(y) dy, \quad (2.21)$$

где $h_1(x)$ определяется из (2.16).

Из (2.21) следует, что

$$\frac{1}{x} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \left[\Gamma\left(-x \frac{d}{dx}\right) \Gamma\left(1+\alpha+x \frac{d}{dx}\right) \right]^{-1} g(x). \quad (2.22)$$

Обозначая $\frac{1}{x} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) \in L_2(0, +\infty)$, по (2.20) и (2.21) убеж-

даемся в справедливости нашей теоремы.

Легко видеть, что здесь также имеет место обратное утверждение, что решение уравнения (2.19), где $f(x) \in L_2(0, +\infty)$ задано, дается формулой (2.18).

Теорема 7. Для любой функции $f(x)$ из класса

$\sin \pi \left(-x \frac{d}{dx}\right) f(x) \in L_2(0, +\infty)$ формула

$$g(x) = \frac{1}{\pi \Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-y)^{\alpha-1} \sin \pi \left(-y \frac{d}{dy}\right) f(y) dy, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0 \quad (2.23)$$

определяет функцию $g(x)$ из класса $x^{-\alpha} g(x) \in L_2(0, +\infty)$. Почти всюду на $(0, +\infty)$ имеет место двойственная формула

$$f(x) = \Gamma(1+\alpha) \int_0^\infty \frac{g(y)}{(x+y)^{1+\alpha}} dy. \quad (2.24)$$

Доказательство. Положим $K(s) = \Gamma(s) [\Gamma(s+\alpha)]^{-1}$, $H(s) = \Gamma(s)\Gamma(1+\alpha-s)$, $\Phi_2(s) = 1$, $\Phi_1(s) = \pi^{-1} \sin \pi s$. Так как (см. [1], стр. 251)

$$k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (1-x)^{\alpha-1}, & 0 < x < 1, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

$$h(x) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(1+x)^{1+\alpha}},$$

то по теореме 1 интегральное преобразование

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi \Gamma(\alpha)} \int_0^{\frac{1}{x}} (1-xy)^{\alpha-1} \sin \pi \left(-y \frac{d}{dy} \right) f(y) dy, \quad (2.25)$$

где $\sin \pi \left(-x \frac{d}{dx} \right) f(x) \in L_2(0, +\infty)$, обращается формулой

$$f(x) = \Gamma(1+\alpha) \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\varphi(y)}{(1+xy)^{1+\alpha}} dy, \quad (2.26)$$

или, обозначая $x^{\alpha-1} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = g(x)$, приходим к утверждению теоремы.

Теорема 8. Пусть $\rho > \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2}$, тогда интегральное преобразование

$$g(x) = \frac{1}{\pi \rho} \int_0^{\frac{1}{x}} E_{\rho} \left(-x^{\frac{1}{\rho}} y^{\frac{1}{\rho}}; \mu \right) (xy)^{\mu-1} f(y) dy, \quad (2.27)$$

где $f(x) \in L_2(0, +\infty)$; $E_{\rho}(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\rho + \mu)}$ —

функция типа Миттаг-Леффлера, обращается формулой

$$f(x) = \left[\sin \pi \rho \left(\mu + x \frac{d}{dx} \right) \Gamma \left(-x \frac{d}{dx} \right) \right] \left\{ \frac{1}{x} g \left(\frac{1}{x} \right) \right\}. \quad (2.28)$$

Доказательство. Так как

$$\left| \sin \pi \rho \left(\mu - \frac{1}{2} + it \right) \Gamma \left(\frac{1}{2} - it \right) \right| > c e^{\pi \left(\rho - \frac{1}{2} \right) |t|}, \quad |t| > t_0,$$

где c — постоянная, не зависящая от t , то при $\rho > \frac{1}{2}$

$$\sin \pi \rho (s + \mu - 1) \times \Gamma(1-s) \in \Phi_b.$$

Положим в теореме 1 $K(s) = [\sin \pi \rho (s + \mu - 1) \Gamma(1-s)]^{-1}$, $H(s) = 1$, $\Phi_1(s) = 1$, $\Phi_2(s) = \sin \pi \rho (s + \mu - 1) \Gamma(1-s)$ и заметим, что ([8], стр. 151)

$$k(x) = \frac{1}{\pi \rho} E_{\rho} \left(-x^{\frac{1}{\rho}}; \mu \right) x^{\mu-1}$$

$$\text{и} \quad h_1(x) = \begin{cases} 1, & x > 1, \\ 0, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Тогда приходим к выводу, что преобразование

$$g(x) = \frac{1}{\pi \rho} \int_0^{\infty} E_{\rho} \left(-x^{\frac{1}{\rho}} y^{\frac{1}{\rho}}; \mu \right) (xy)^{\mu-1} f(y) dy, f(y) \in L_2(0, \infty)$$

обращается формулой

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{h_1(xy)}{y} \left[\sin \pi \rho \left(-y \frac{d}{dy} + \mu - 1 \right) \Gamma \left(1 + y \frac{d}{dy} \right) \right] g(y) dy, \quad (2.29)$$

эквивалентной формулам

$$\frac{1}{x} f \left(\frac{1}{x} \right) = \left[\sin \pi \rho \left(-x \frac{d}{dx} + \mu - 1 \right) \Gamma \left(1 + x \frac{d}{dx} \right) \right] g(x),$$

или

$$f(x) = \left[\sin \pi \rho \left(\mu + x \frac{d}{dx} \right) \Gamma \left(-x \frac{d}{dx} \right) \right] \left\{ \frac{1}{x} g \left(\frac{1}{x} \right) \right\}.$$

Следствие. Интегральное преобразование Лапласа

$$g(x) = \int_0^{\infty} e^{-xy} f(y) dy, f(y) \in L_2(0, \infty) \quad (2.30)$$

обращается формулой

$$f(x) = \left[\Gamma \left(1 + x \frac{d}{dx} \right) \right]^{-1} \left\{ \frac{1}{x} g \left(\frac{1}{x} \right) \right\}. \quad (2.31)$$

Действительно, полагая в (2.27) $\rho = \mu = 1$, приходим к нашему утверждению.

Формула обращения (2.31) была получена Поллардом [4] в несколько иной форме.

Получим теперь еще одну формулу обращения для преобразования Лапласа.

Теорема 9. Интегральное преобразование (2.30) обращается формулой:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos xy}{y} \sin \frac{\pi}{2} \left(-y \frac{d}{dy} \right) g(y) dy. \quad (2.32)$$

Доказательство. Так как

$$\left| \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \pi t}{2}} > \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}|t|},$$

то $\sin \frac{\pi}{2} s \in \Phi_b$.

Полагая в теореме 1, $K(s) = \Gamma(s)$, $H(s) = \frac{2}{\pi} \Gamma(s) \sin \frac{\pi}{2} s$, $\Phi_1(s) = 1$, $\Phi_2(s) = \sin \frac{\pi}{2} s$ и проверяя справедливость всех условий, приходим к нашему утверждению.

Теорема 10. Для любой функции $f(x)$ из класса

$$\left[\Gamma \left(1 + x \frac{d}{dx} \right) \right]^{-1} f(x) \in L_2(0, +\infty) \text{ формула}$$

$$g(x) = [\Gamma(n+1)]^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+xy)^{n+1}} P_n \left(\frac{1-xy}{1+xy} \right) \left[\Gamma \left(1 + y \frac{d}{dy} \right) \right]^{-1} f(y) dy, \quad (2.33)$$

где $P_n(x)$ — полином Лежандра n -го порядка, определяет почти всюду на $(0, +\infty)$ функцию $g(x)$ из класса $\left[\Gamma \left(n+1 + x \frac{d}{dx} \right) \right]^{-1} g(x) \in L_2(0, +\infty)$. Почти всюду на $(0, +\infty)$ имеет место двойственная формула

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\frac{1}{x}} (1-xy)^{n-1} \left[\Gamma \left(n+1 + y \frac{d}{dy} \right) \right]^{-1} g(y) dy. \quad (2.34)$$

Доказательство. Положим $K(s) = \Gamma(s) [\Gamma(n+1-s)]^2 [\Gamma(1-s)]^{-1}$, $H(s) = \Gamma(s) [\Gamma(n+s)]^{-1}$, $\Phi_1(s) = [\Gamma(1-s)]^{-1}$; $\Phi_2(s) = [\Gamma(n+1-s)]^{-1}$.

В силу оценки

$$\left| \Gamma \left(n + \frac{1}{2} - it \right) \right|^{-1} > c e^{\frac{\pi}{2} |t| - n \log |t|}$$

имеем $\Phi_1(s), \Phi_2(s) \in \Phi_b$. Так как (см. [1], стр. 251)

$$k(x) = [\Gamma(n+1)]^2 \frac{1}{(1+x)^{n+1}} P_n \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$$

и

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n)} (1-x)^{n-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

то утверждение теоремы следует из теоремы 1.

Можно привести многочисленные примеры применения других теорем § 1, но в данной статье мы на этом останавливаться не будем.

Ս. Ս. Հակոբյան

ԻՆՏԵԳՐԱԼ ԶԵԿԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ, ԿԱՊԼԱՍ ԱՆՎԵՐՋ ԿԱՐԳԻ
ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ՀԵՏ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ինչպես հայտնի է [1], [2], եթե $K(s)$ և $H(s)$ ֆունկցիաները սահմանված են միայն $s = \frac{1}{2} + it$ ($-\infty < t < +\infty$) դժի վրա, երկուսն էլ սահմանափակ են և բավարարում են

$$K(s)H(1-s) = 1, \quad \text{Res} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

ֆունկցիոնալ հավասարմանը, ապա նրանք ծնում են որոշակի ինտեգրալ ձևավորություններ $L_2(0, +\infty)$ դասում. այն է՝ եթե $\frac{k_1(x)}{x}$ և $\frac{h_1(x)}{x}$ համապատասխանաբար $\frac{K(s)}{1-s}$ և $\frac{H(s)}{1-s}$ ֆունկցիաների Մելլինի ձևափոխություններն են, ապա $L_2(0, +\infty)$ դասի յուրաքանչյուր $f(x)$ ֆունկցիա ունի երկու ձևափոխություններ, որոնք $(0, +\infty)$ -ի վրա համարյա ամենուրեք որոշվում են

$$g_k(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{k_1(xy)}{y} f(y) dy,$$

$$g_h(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{h_1(xy)}{y} f(y) dy$$

բանաձևերով: Ընդ որում, $g_k(x)$ և $g_h(x)$ ֆունկցիաները $L_2(0, +\infty)$ դասից են, և համարյա ամենուրեք $(0, +\infty)$ -ի վրա իրավացի են

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{h_1(xy)}{y} g_k(y) dy,$$

$$x \in (0, +\infty)$$

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{k_1(xy)}{y} g_h(y) dy$$

չբաժան բանաձևերը:

Ներկա հոդվածի § 1-ում կառուցվում են ողիղ և հակադարձ ինտեգրալ ձևափոխություններ այն դեպքում, երբ $K(s)$ և $H(s)$ ֆունկցիաները (1)-ի փոխարեն բավարարում են

$$K(s)H(1-s)\Phi_1(1-s)\Phi_2(s)=1, \quad \text{Res}=\frac{1}{2}$$

տեսքի ֆունկցիոնալ հավասարմանը $\Phi_1(s)$ և $\Phi_2(s)$ ֆունկցիաների վրա դրված որոշակի սահմանափակումների դեպքում:

Սահմանելով $\Phi_1\left(-x\frac{d}{dx}\right)f(x)$ և $\Phi_2\left(-x\frac{d}{dx}\right)g(x)$ օպերատորների իմաստը, ցույց է տրվում, որ $\Phi_1\left(-x\frac{d}{dx}\right)f(x) \in L_2(0, +\infty)$ դասի ցանկացած ֆունկցիալի համար

$$g(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{k_1(xy)}{y} \Phi_1\left(-y\frac{d}{dy}\right)f(y) dy$$

բանաձևը համարյա ամենուրեք $(0, +\infty)$ -ի վրա որոշում է $\bar{g}(x)$ ֆունկցիա $\Phi_2\left(-x\frac{d}{dx}\right)\bar{g}(x) \in L_2(0, +\infty)$ դասից: Դրա հետ մեկտեղ համարյա ամենուրեք $(0, +\infty)$ միջակայքում տեղի ունի շրջման բանաձևը՝

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{h_1(xy)}{y} \Phi_2\left(-y\frac{d}{dy}\right)g(y) dy:$$

Այստեղ ստացված արդյունքներն իրենցից ներկայացնում են Պլանշե-րել-Վատսոնի ինտեգրալ ձևափոխությունների տեսության հետագա զարգացումը: § 2-ում բերվում են § 1-ում ապացուցված թեորեմների տարրեր հետևանքներ:

Մասնավորապես, $\Phi_1(s) \equiv 1$ դեպքում բերվում են շրջման բանաձևեր մի քանի հարյուր ինտեգրալ ձևափոխությունների (Ստիլտիեսի, Լապլասի և այլն) համար $L_2(0, +\infty)$ դասում, որոնք Պալե-Լիեների [3] և Պոլլարդի [4] կողմից ստացված էին այլ ճանապարհով:

Բացի դրանից, § 1-ի արդյունքների հիման վրա բերվում են, ինտեգրալ ձևափոխությունների մի քանի նոր հատուկ դասերի համար, շրջման բանաձևեր:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
2. Kober H. Eine Verallgemeinerung der Transformationen vom Fourier-Typ. The Quart. Journ. of Math., 8, № 31, 1937, 172-185.
3. Paley and Wiener N. Fourier Transforms in the complex domain. New York, 1934.
4. Pollard H. Integral Transforms, Duke Math. Journ., Vol. 13, 1946, 307-330.
5. Дзербашян М. М. Некоторые вопросы теории взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области. Мат. сб., т. 36 (78), № 3, 1955.
6. Pollard H. Solution of Bernstein's approximation problem. Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 4, 1953, 869-875.
7. Хришман И. И. и Уиддер Д. В. Преобразования типа свертки, ИЛ, М., 1958.
8. Дзербашян М. М. Об одном новом интегральном преобразовании и его применение в теории целых функций. Известия АН СССР, сер. матем., 19, 1955.