

В. А. Шахбазян

Об улучшении теории возмущений в квантовой электродинамике частиц со спином нуль

1. Введение

Взаимодействие частиц с нулевым спином с электромагнитным полем рассматривалось в ряде работ [1]—[8]. Большая часть их [1]—[7] посвящена теории возмущений. При этом применялась как скалярная формулировка Клейна-Гордона [6], так и пятирядное представление общего формализма Дэффина-Кеммера [7]. Было установлено, что скалярная электродинамика перенормируема и число типов расходящихся диаграмм равно пяти [6], [7]. Это—части собственной энергии скалярного мезона и фотона, вершинная и комптоновская части, часть меллеровского взаимодействия. Были установлены два тождества Уорда [6], [7], связывающие собственно-энергетическую часть с вершинной и вершинную часть—с комптоновской [6], [7]. Это позволило полностью устранить расходимости скалярной квантовой электродинамики посредством перенормировки массы и заряда и введения дополнительного контрчлена, описывающего нелинейное взаимодействие скалярного поля с самим собой.

Большой интерес представляют попытки улучшения обычной теории возмущений. В работе [8] найдено, так называемое, „нулевое приближение“ для функций Грина мезона и фотона и вершинной части методом, развитым в [9].

В настоящей работе излагается применение метода ренормализационной группы к случаю скалярной электродинамики. Рассмотрение проводится в формализме Дэффина-Кеммера.

2. Построение ренормализационной группы в скалярной квантовой электродинамике

После устранения расходимостей скалярной электродинамики, эффективный лагранжиан взаимодействия [10] следует выбрать в виде:

$$L_{\text{эфф.}}(p) = ez_1: \bar{\psi} \hat{A} \psi : + (z_2 - 1): \bar{\psi}(p) (\hat{p} - m) \psi(-p) : - \\ - z_4: \bar{\psi}(p) \frac{p^2 - m^2}{m} X \psi(-p) : - ez_5: \bar{\psi}[(p + p')A] \frac{1}{m} X \psi: -$$

$$-e^2 z_6 : \bar{\psi} \frac{1}{m} A^2 X \psi : - \frac{z_3 - 1}{2} \sum_{n, m} g^{nn} g^{mm} : A_n(p) (p^n p^m - g^{nm} p^2) A_m(-p) : + \\ + z_7 : (\bar{\psi} X \psi)^2 + \delta m_1 : \bar{\psi}(p) \psi(-p) : + \delta m_2 : \bar{\psi}(p) X \psi(-p) : \quad (1)$$

Здесь ψ — оператор скалярного поля, удовлетворяющий уравнению Кеммера

$$(\hat{p} - m) \psi = 0,$$

$\bar{\psi}$ — функция, „кеммеровски“ сопряженная функции ψ ,

$$\hat{p} = \sum_k g^{kk} \Gamma^k p^k, \quad \hat{A} = \sum_k \Gamma^k A_k,$$

Γ^k — пятирядные матрицы Кеммера ($k = 0, 1, 2, 3$),

$z_1, \dots, z_7, \delta m_1, \delta m_2$ — конечные произвольные константы,

X — пятирядная матрица, удовлетворяющая равенству

$$\bar{\psi} X \psi = \bar{\psi}^* \psi^*,$$

где $\psi^*, \bar{\psi}^*$ — обычные операторы скалярного поля, удовлетворяющие уравнению Клейна-Гордона. Во всех контрчленах, в которых аргументы операторов полей явно не выписаны, подразумевается интегрирование по импульсным аргументам от произведения операторов и δ — функции суммарного импульса.

В силу градиентной инвариантности имеют место следующие тождества Уорда:

$$z_1 = z_2, \quad z_4 = z_5 = z_6. \quad (2)$$

Пользуясь свойствами пятирядного представления матриц Кеммера можно показать, что в (1) можно произвести следующую замену:

$$-z_1 : \bar{\psi}(p) \frac{X}{m} (p^2 - m^2) \psi(-p) : - e z_5 : \bar{\psi} [(p + p') A] \frac{1}{m} X \psi : - \\ - e^2 z_6 : \bar{\psi} \frac{1}{m} A^2 X \psi : \rightarrow -z_4 : \bar{\psi}(p) (\hat{p} - m) \psi(-p) : - \\ - e z_5 : \bar{\psi} \hat{A} \psi : + e^2 (2z_5 - z_4 - z_6) : \bar{\psi} \frac{1}{m} A^2 X \psi : \quad (3)$$

(см. Приложение).

В силу (2) последнее слагаемое равно нулю, и мы получаем вместо (1)

$$L_{\text{эфф.}}(p) = e(z_1 - z_3) : \bar{\psi} \hat{A} \psi : + (z_2 - z_4 - 1) : \bar{\psi}(p) (\hat{p} - m) \psi(-p) : - \\ - \frac{z_3 - 1}{2} \sum_{n, m} : A_n(p) (p^n p^m - g^{nm} p^2) A_m(-p) : + z_7 : (\bar{\psi} X \psi)^2 : + \\ + \delta m_1 : \bar{\psi}(p) \psi(-p) : + \delta m_2 : \bar{\psi}(p) X \psi(-p). \quad (4)$$

Вводя новые обозначения $z_1 - z_3 = z_2 - z_4 = z$, $z_7 \rightarrow z_4 h$, окончательно имеем

$$\begin{aligned}
L_{\text{эфф.}}(p) = & ez: \bar{\psi} \hat{A} \psi: + (z-1): \bar{\psi}(p) (\hat{p} - m) \psi(-p): - \\
& - \frac{z_3 - 1}{2} \sum_{a, m} A_n(p) (p^a p^m - g^{nm} p^2) A_m(-p): + \\
& + \delta m_1: \bar{\psi}(p) \psi(-p): + \delta m_2: \bar{\psi}(p) X \psi(-p): + z_4 h: (\bar{\psi} X \psi)^2: \quad (5)
\end{aligned}$$

Здесь h — второй заряд.

Применяя метод рассмотрения, развитый в [10], произвол, содержащийся в S -матрице, можно свести к мультипликативному произволу в одночастичных функциях Грина, вершинной части и части меллеровского взаимодействия. Это, в свою очередь, эквивалентно некоторой конечной перенормировке зарядов. Можно поэтому определить группу преобразований, оставляющих инвариантными константы взаимодействия. Если считать калибровку фотонной функции Грина произвольной [11], то уравнения указанных преобразований примут вид:

$$\begin{aligned}
G_2 &= z G_1, \quad D_2 = z_3 D_1, \quad \Gamma_2 = z^{-1} \Gamma_1, \\
\Box_2 &= z_4^{-1} \Box_1, \quad (6)
\end{aligned}$$

$$e_2 = z_3^{-1/2} e_1, \quad h_2 = z_4 z^{-2} h_1, \quad d_i^{(2)} = z_3^{-1} d_i^{(1)}.$$

Здесь

G — функция Грина мезона,

D — функция Грина фотона,

Γ — вершинная часть,

$\Box$ — часть меллеровского взаимодействия,

d_i^0 — коэффициент при продольной части функции Грина фотона.

3. Матричная структура симметричных асимптотик функций $G, \Gamma, \Box$

Для получения симметричных асимптотик функций, фигурирующих в (6), рассмотрим их матричную структуру. Нас интересуют те члены в $G, \Gamma, \Box$, в которых степени квадратов константы взаимодействия совпадают со степенями больших логарифмов. В области больших импульсов сумма ряда таких членов представляет собой, как известно [9], [10], нулевой член разложения точной функции в ряд по степеням константы взаимодействия. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением матричных структур симметричных асимптотик нулевого приближения функций $G, \Gamma, \Box$.

Рассмотрим сперва симметричные асимптотики G, Γ^n и K^{nm} , где K^{nm} — комптоновская часть. В нужном нам приближении, руководствуясь вычислениями по теории возмущений и соображениями релятивистской инвариантности, их матричные структуры можно задать в виде

$$G(p) = \frac{1}{m} \frac{m^2 a(p) + (\hat{p}^2 - p^2) b(p) + m \hat{p} d_m(p)}{m^2 - p^2} - \frac{1}{m} Y[f(p) - 1], \quad (7)$$

$$\Gamma^n(p, p, p) = \Gamma^n \cdot \Gamma(p) - \frac{2p^n}{m} X[f(p) - 1], \quad (8)$$

$$K^{nm}(p, \dots, p) = -\frac{g^{nm}}{m} X[f(p) - 1], \quad Y = 1 - X. \quad (9)$$

Здесь везде $[f(p) - 1]$ одна и та же функция в силу тождеств Уорда. Отметим, что матричная структура в (7), (8), (9) согласуется с выбором ее, сделанным в работе [8]. Следует иметь в виду, что в ультрафиолетовой области значения $a(p)$ можно изменять, оставляя неизменными все остальные функции. В самом деле, если к $a(p)$ добавить $a(p)$, имеющее логарифмическую асимптотику, то это не приведет к изменению в $b(p)$, так как соответствующая добавка $\frac{m^2}{p^2} a(p)$ пренебрежимо мала.

Перейдем к симметричной асимптотике части меллеровского взаимодействия. Поскольку нас интересует только вклад во второй заряд, мы можем ограничиться теми членами, матричная структура которых совпадает со структурой члена второго взаимодействия в лагранжиане, т. е. дается выражением $X_{\alpha\beta} X_{\gamma\delta}$. Скалярную функцию, являющуюся множителем при указанной структуре, обозначим через $\square_1$.

4. Дифференциальные уравнения Ли ренормализационной группы

При выводе дифференциальных уравнений группы, функции Γ , $\square_1$ будут считаться зависящими от одного импульсного аргумента. Это соответствует их симметричной асимптотике в ультрафиолетовой области и частному выбору асимптотик в инфракрасной. Имея в виду это обстоятельство, можно написать функциональные уравнения ренормализационной группы. Аналогично тому, как это делается в [10], получаем

$$\begin{aligned} e^2 d(x, y, e^2, h) &= e^2 d(t, y, e^2, h) \times \\ &\times d\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, e^2 d(t, y, e^2, h), h\varphi(t, y, e^2, h)\right), \\ h\varphi(x, y, e^2, h) &= h\varphi(t, y, e^2, h) \times \\ &\times \varphi\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, e^2 d(t, y, e^2, h), h\varphi(t, y, e^2, h)\right), \\ s(x, y, e^2, e^2 d_i^0, h) &= s(t, y, e^2, e^2 d_i^0, h) \times \\ &\times s\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, e^2 d(t, y, e^2, h), e^2 d_i^0, h\varphi(t, y, e^2, h)\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $s(x, y, e^2, e^2 d_l^0, h)$ — совокупность функций $a, b, d_M, \Gamma, \square_1, f$; $h\varphi(x, y, e^2, h)$ — второй инвариантный заряд ренормализационной группы, который составлен следующим образом:

$$h\varphi(x, y, e^2, h) = h\square_1(x, y, e^2, e^2 d_l^0, h) d_M^2(x, y, e^2, e^2 d_l^0, h).$$

При получении последнего равенства предположено, что выражение второго инвариантного заряда не может зависеть от d_l^0 . В противном случае была бы нарушена градиентная инвариантность теории, так как $h\varphi$ входит явным образом в выражение поперечной функции Грина фотона. Вычисления в низшем порядке теории возмущений по e^2 и h подтверждают это предположение. Далее, из трех функций $a(x, y, e^2, e^2 d_l^0)$, $b(x, y, e^2, e^2 d_l^0)$ и $d_M(x, y, e^2, e^2 d_l^0)$, фигурирующих в функции распространения мезона, при составлении второго заряда использована последняя. Это опять-таки связано с их поведением в ультрафиолетовой и инфракрасной областях. В инфракрасной области все они равны друг другу, тогда как в ультрафиолетовой, пользуясь соображениями о неоднозначности функции $a(x, y, e^2, e^2 d_l^0)$, изложенными в предыдущем пункте, можно всегда выбрать $a = d_M$. Что же касается функций $b(x, y, e^2, e^2 d_l^0)$ и $f(x, y, e^2, e^2 d_l^0)$, то они не могут принимать участия в составлении второго заряда, так как умножаясь на $\hat{p}^2 - p^2$ и Y соответственно, во всех внутренних линиях, оканчивающихся в h — вершинах, выпадают в силу специфической матричной структуры последних. Это становится ясным, если воспользоваться свойствами

$$(p^2 - \hat{p}^2)X = 0, \\ XY = 0.$$

Отметим еще, что все функции нормированы на единицу

$$d(1, y, e^2, h) = \varphi(1, y, e^2, h) = s(1, y, e^2, e^2 d_l^0, h) = 1. \quad (14)$$

Дифференцируя теперь (14) по x и полагая $t = x$, получим следующие дифференциальные уравнения группы

$$\begin{aligned} \frac{\partial e^2 d(x, y, e^2, h)}{\partial x} &= \frac{e^2 d(x, y, e^2, h)}{x} \times \\ &\times D \left[\frac{y}{x}, e^2 d(x, y, e^2, h), h\varphi(x, y, e^2, h) \right], \\ \frac{\partial h\varphi(x, y, e^2, h)}{\partial x} &= \frac{h\varphi(x, y, e^2, h)}{x} \times \\ &\times \Phi \left[\frac{y}{x}, e^2 d(x, y, e^2, h), h\varphi(x, y, e^2, h) \right], \\ \frac{\partial s(x, y, e^2, e^2 d_l^0, h)}{\partial x} &= \frac{s(x, y, e^2, e^2 d_l^0, h)}{x} \times \end{aligned} \quad (15)$$

$$\times S \left[\frac{y}{x}, e^2 d(x, y, e^2, h), e^2 d_l^0, h\varphi(x, y, e^2, h) \right],$$

где

$$D \left(\frac{y}{x}, e^2 d, h\varphi \right) = \left[\frac{\partial}{\partial \xi} d \left(\xi, \frac{y}{x}, e^2 d, h\varphi \right) \right]_{\xi=1},$$

$$\Phi \left(\frac{y}{x}, e^2 d, h\varphi \right) = \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \varphi \left(\xi, \frac{y}{x}, e^2 d, h\varphi \right) \right]_{\xi=1},$$

$$S \left(\frac{y}{x}, e^2 d, h\varphi, e^2 d_l^0 \right) = \left[\frac{\partial}{\partial \xi} s \left(\xi, \frac{y}{x}, e^2 d, h\varphi, e^2 d_l^0 \right) \right]_{\xi=1}.$$

5. Импульсные асимптотики функций

$G, D^{nm}, \Gamma, f, \square_1$ при $|p^2| \gg m^2$

Ультрафиолетовая асимптотика. При нахождении ультрафиолетовой асимптотики, для функций D, Φ, S будем пользоваться низшими приближениями по e^2 и h . Соответствующие выражения из теории возмущений имеют вид:

$$\begin{aligned} d_{(2)}(p) &= 1 + \frac{e^2}{4\pi^2} \ln \left| \frac{p^2}{m^2} \right|, \\ a_{(2)}(p) &= 1 + \frac{e^2}{16\pi^2} (d_l^0 - 3) \ln \left| \frac{p^2}{m^2} \right|, \\ b_{(2)}(p) &= 1 + \frac{e^2 d_l^0}{16\pi^2} \ln \left| \frac{p^2}{m^2} \right|, \\ d_{M(2)}(p) &= 1 + \frac{e^2}{32\pi^2} (2d_l^0 - 3) \ln \left| \frac{p^2}{m^2} \right|, \\ f_{(2)}(p) &= 1 + \frac{3e^2}{64\pi^2} (d_l^0 - 1) \ln \left| \frac{p^2}{m^2} \right|, \\ \Gamma_{(2)}(p) &= 1 + \frac{e^2}{64\pi^2} (3 - d_l^0) \ln \left| \frac{p^2}{m^2} \right|, \\ \square_1(p) &= 1 - \left(\frac{e^2 d_l^0}{8\pi^2} + \frac{5h}{32\pi^2} + \frac{3}{4\pi^2} \frac{e^4}{h} \right) \ln \left| \frac{p^2}{m^2} \right|. \end{aligned} \quad (16)$$

Первые два уравнения в (15) для инвариантных зарядов переписываются в виде

$$\frac{dz_1}{dz} = z_1 D(z_1, \rho), \quad (17a)$$

$$\frac{d\rho}{dz} = \rho \Phi(z_1, \rho), \quad (17b)$$

где $z_1 = e^2 d(z, e^2, h)$, $\rho = h\varphi(z, e^2, h)$, $z = \ln x$.

Пользуясь для D и Φ (16), получаем

$$\sigma_1 D(\sigma_1, \rho) = d_1 \sigma_1^2,$$

$$\rho \Phi(\sigma_1, \rho) = -\varphi_1 \sigma_1^2 - \varphi_2 \sigma_1 \rho - \varphi_3 \rho^2, \quad (18)$$

где

$$d_1 = \frac{1}{48\pi^2}, \quad \varphi_1 = \frac{3}{4\pi^2}, \quad \varphi_2 = \frac{3}{16\pi^2}, \quad \varphi_3 = \frac{5}{32\pi^2}.$$

Для σ_1 сразу получаем из (17а) и первого уравнения в (16)

$$\sigma_1 = \frac{e^2}{1 - \frac{e^2}{48\pi^2} \ln x}. \quad (19)$$

Исключая из (17) z и используя (18), получаем уравнение

$$\frac{d\rho}{d\sigma_1} = -\frac{\varphi_1}{d_1} - \frac{\varphi_2}{d_1} \frac{\rho}{\sigma_1} - \frac{\varphi_3}{d_1} \frac{\rho^2}{\sigma_1^2}, \quad (20)$$

решение которого имеет вид

$$\rho = \left[\frac{h}{e^2} - a - b \operatorname{tg}(\varphi - \alpha) \right] e^2 \exp(c\varphi). \quad (21)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{c} \ln \frac{\sigma_1}{e^2}, \\ \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{\frac{h}{e^2} + \frac{d_1 + \varphi_2}{2\varphi_3}}{\sqrt{\frac{\varphi_1}{\varphi_3} - \frac{(d_1 + \varphi_2)^2}{4\varphi_3^2}}} = -\frac{a}{b}, \\ c &= \frac{d_1}{\varphi_3 \sqrt{\frac{\varphi_1}{\varphi_3} - \frac{1}{4} \frac{(d_1 + \varphi_2)^2}{\varphi_3^2}}} = \frac{d_1}{\varphi_3 b}. \end{aligned}$$

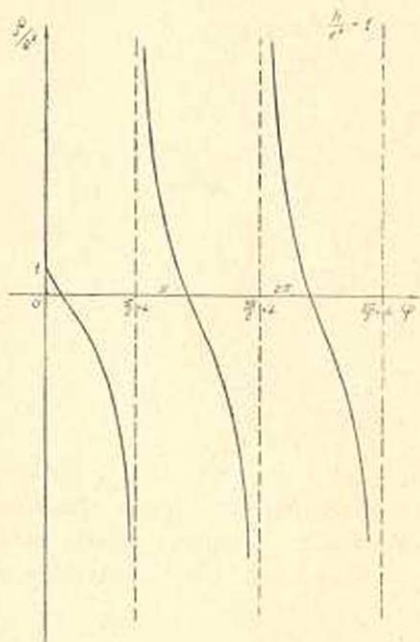
Нас интересуют значения $\sigma_1^2 \geq e^2$. В этой области φ может принимать только неотрицательные значения. Считая h и e^2 конечными и отличными от нуля, получаем следующие неравенства, определяющие область изменения α

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

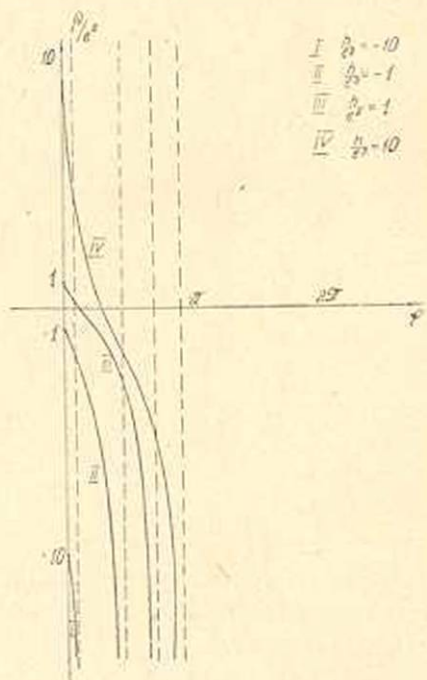
Исследуем формулу (21). При $\varphi = 0$, т. е. при $\sigma_1 = e^2$, $\rho = h$. Функция $\rho(\varphi)$ имеет бесконечное число точек разрыва, в которых обращается в $\pm \infty$. Учитывая положительность φ и область задания α , получаем, что ρ обращается в бесконечность в точках

$$\varphi = \alpha + \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

Так как α зависит от отношения $\frac{h}{e^2}$, то каждая кривая семейства $\rho(\varphi, \alpha)$ будет иметь свою совокупность точек разрыва и асимптот. Поэтому графическое изображение семейства кривых $\rho(\varphi, \alpha)$ на всей фазовой плоскости представляется затруднительным. На фиг. 1 приведен график одной кривой семейства, для которой $h = e^2$. Кривая, соответствующая экспериментальным значениям e^2 и h , будет определяться их отношением. Заметим, что уже при φ , достаточно близком к значению $\frac{\pi}{2} + \alpha$, происходит выход из области слабой связи по ρ . Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением участка фазовой плоскости, соответствующего области изменения φ в интервале $\left[0, \frac{\pi}{2} + \alpha\right]$. На фиг. 2 приведены графики четырех кривых, соответствующих значениям $\frac{h}{e^2}$ равным соответственно $\pm 1, \pm 10$.



Фиг. 1



Фиг. 2.

Представляет интерес выяснить, в какой области значений безразмерного импульса x происходит выход из области слабой связи по ρ . Отметим, что выход из области слабой связи по σ_1 происходит, как это видно из (19), при значениях $\ln x$, достаточно близких к

$$\ln x_{\sigma_1 \rightarrow \infty} = \frac{48\pi^2}{e^2}. \quad (22)$$

Значение α_1 , при котором $\rho \rightarrow \infty$, дается равенством

$$\alpha_{1\rho \rightarrow \infty} = e^2 \exp \left[c \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \right]. \quad (23)$$

Используя (19), можно получить зависимость между значением безразмерного импульса x , при котором $\rho \rightarrow \infty$, и e и $\hbar$:

$$\ln x_{\rho \rightarrow \infty} = \frac{48 \pi^2}{e^2} \left[1 - \frac{e^2}{\alpha_{1\rho \rightarrow \infty}} \right]. \quad (24)$$

Из (23) следует, что отношение $\frac{e^2}{\alpha_{1\rho \rightarrow \infty}}$ не может принимать отрицательных значений. Далее, отсюда же видно, что так как $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$, то область изменения $\frac{e^2}{\alpha_{1\rho \rightarrow \infty}}$ задается неравенствами

$$e^{-c\pi} < \frac{e^2}{\alpha_{1\rho \rightarrow \infty}} < 1,$$

поэтому всегда $\ln x_{\rho \rightarrow \infty} < \ln x_{\alpha_1 \rightarrow \infty}$. Таким образом, следует ожидать, что выход из области слабой связи по ρ произойдет раньше, чем по α_1 . В самом деле, семейство асимптот (23) ограничено справа значением $e^2 \exp(c\pi) = 1,22 e^2$. Так как $e^2 \ll 1$, то самая крайняя асимптота находится в области значений $\alpha_{1\rho \rightarrow \infty} \ll 1$. Поэтому для всех кривых семейства $\rho(\alpha, \alpha)$ выход из области слабой связи по ρ будет происходить раньше, чем по α_1 . Например, при $\frac{\hbar}{e^2} = 1$ второй инвариантный заряд ρ стремится к единице при $\alpha_1 \rightarrow 1,15e^2$. Отношение логарифмов безразмерных импульсов, при которых $\rho \sim 1$ и $\alpha_1 \sim 1$, равно

$$\frac{\ln x_{\rho \sim 1}}{\ln x_{\alpha_1 \sim 1}} = 0,131 \left(\frac{\hbar}{e^2} = 1 \right).$$

Таким образом, из данного примера устанавливается, что выход из области слабой связи по ρ происходит раньше, чем по α_1 .

Приведем теперь выражения для симметричных асимптотик функций G , Γ , $\square_1$. Решая уравнения (15), получаем

$$b(x, e^2, e^2 d_1^0) = x^{\frac{e^2 d_1^0}{16\pi^2}}, \quad (25)$$

$$d_M(x, e^2, e^2 d_1^0) = x^{\frac{e^2 d_1^0}{16\pi^2}} [d(x, e^2)]^{-1/2}, \quad (26)$$

$$\Gamma(x, e^2, e^2 d_1^0) = x^{\frac{e^2 d_1^0}{64\pi^2}} [d(x, e^2)]^{-1/4}, \quad (27)$$

$$f(x, e^2, e^2 d_l^0) = x \frac{3e^2 d_l^0}{64\pi^2} [d(x, e^2)]^{-3/2}, \quad (28)$$

$$\square_1(x, e^2, e^2 d_l^0, h) = x \frac{e^2 d_l^0}{8\pi^2} [d(x, e^2)]^{5-\frac{A}{C}} \times \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} \frac{|\cos(\varphi + \beta)|^B}{\sin(\varphi + \alpha)}, \quad (29)$$

где

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2a + 3b^2}{3ab - 2b}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}, \quad A = -\frac{1}{9b^2 + 4}, \quad B = \frac{3b}{9b^2 + 4}.$$

(25) и (26) совпадают с выражениями функций $\lambda(\xi)$, G_{10} , полученными в [8]. Формула (29) получена впервые.

Автор пользуется случаем выразить свою глубокую благодарность доктору физико-математических наук Д. В. Ширкову, под руководством которого выполнена настоящая работа. Автор благодарен также И. Ф. Гинзбургу за полезное обсуждение.

Приложение

Докажем, что контрчлены вида $-\bar{\psi} \frac{z_4}{m} A^2 X \psi$ сокращаются с аналогичными контрчленами, появляющимися из $-z_4: \bar{\psi} \frac{p^2 - m^2}{m} X \psi$ и $-z_4: \bar{\psi} \frac{[(p+q)A]}{m} X \psi$, причем последние преобразуются к виду $-z_4: \bar{\psi} (\hat{p} - m) \psi$, $-z_4: \bar{\psi} \hat{A} \psi$ соответственно. При доказательстве производятся следующие преобразования:

$$\begin{aligned} & i \hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p) \left[-iz_4 \frac{p^2 - m^2}{m} X \right] \frac{1}{i} \Delta^c(p) i \hat{A} = \\ & = i \hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p) \left[-iz_4 (\hat{p} - m) \right] \frac{1}{i} \Delta^c(p) i \hat{A} - iz_4 \frac{A^2}{m} X; \\ & \frac{1}{i} \Delta^c(p) \left[-iz_4 \frac{(p+q)A}{m} X \right] \frac{1}{i} \Delta^c(q) = \frac{1}{i} \Delta^c(p) [-iz_4 \frac{\hat{p}}{m} \hat{A} X] \frac{1}{i} \Delta^c(q) + \\ & + \frac{1}{i} \Delta^c(p) [-iz_4 X \frac{\hat{A}}{m} \hat{q}] \frac{1}{i} \Delta^c(q) = \frac{1}{i} \Delta^c(p) \times \\ & \times \left[-iz_4 \frac{(\hat{p} - m) \hat{A} X}{m} \right] \frac{1}{i} \Delta^c(q) + \frac{1}{i} \Delta^c(p) \left[-iz_4 \frac{X \hat{A} (\hat{q} - m)}{m} \right] \frac{1}{i} \Delta^c(q) + \\ & + \frac{1}{i} \Delta^c(q) [-iz_4 \hat{A}] \frac{1}{i} \Delta^c(q). \end{aligned} \quad (\Pi 1)$$

Как видно из (П1), включение члена $-z_4 \frac{p^2 - m^2}{m} X$ в $\Delta^e(p)$ приводит к появлению комптоновской вершины, если мезонная линия начинается и кончается в обычных вершинах $\hat{A}$. Точно также, если обе стороны второго соотношения в (П1) умножить на $\hat{A}$, то первый и второй члены в правой части приводят к появлению комптоновских вершин. Используются также следующие равенства:

$$(\hat{p} - m) \psi(p) = 0, \quad \bar{\psi}(p) (\hat{p} - m) = 0, \quad (П2)$$

$$(\hat{p} - m) \Delta^e(p) = -1.$$

Важно отметить еще одно обстоятельство. Если хотя бы один конец мезонной линии заканчивается в вершинах $-z_4: \bar{\psi}[(p+q)A] \frac{1}{m} X \psi:$, $-z_4: \bar{\psi} \frac{1}{m} A^2 X \psi:$, то включение в нее членов $-i \frac{z_4}{m} (p^2 - m^2) X$ не приводит к появлению комптоновских вершин.

Точно так же, если в мезонную линию включена одна вершина $-z_4 \frac{p^2 - m^2}{m} X$, могущая привести к появлению комптоновской вершины, то включение дополнительно одной или большего числа таких же вершин в ту же линию приведет только к перенормировке мезонной линии и увеличению степени z_4 при комптоновской вершине.

Для доказательства рассмотрим незамкнутые мезонные циклы n -го порядка.

Возьмем справа такую их совокупность, в которую входят:

1) всевозможные циклы n -го порядка с одной вершиной

$$-z_4 \frac{[(p+p')A]}{m} X,$$

2) всевозможные циклы $(n-1)$ -го порядка с одной вершиной

$$-z_4 \frac{1}{m} A^2 X \text{ и}$$

3) все циклы n -го порядка с вершиной $-z_4 \frac{p^2 - m^2}{m} X$, включенной в один из отрезков цикла.

Тогда, беря сумму всех выражений, соответствующих указанной совокупности, получим, что все циклы с комптоновскими вершинами сокращаются при одновременном выполнении преобразования (3). В самом деле, используя формулы (П1) и (П2), из суммы циклов первой совокупности получаем:

$$\bar{\psi}(p) \left\{ \left(-iz_4 \frac{[(p+p_1)A]}{m} X \right) \frac{1}{i} \Delta^e(p_1) i \hat{A} \frac{1}{i} \Delta^e(p_2) \dots \frac{1}{i} \Delta^e(p_n) i \hat{A} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) \left[-iz_4 \frac{[(p_1 + p_2)A]}{m} X \right] \frac{1}{i} \Delta^c(p_2) \dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) i\hat{A} + \dots \\
& \dots + i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_2) \dots \left[-iz_4 \frac{[(p_n + q)A]}{m} X \right] \psi(q) = \\
& = \bar{\psi}(p) \left\{ (-iz_4 \hat{A}) \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_2) \dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) i\hat{A} + \right. \quad (\text{ПЗ}) \\
& + i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) (-iz_4 \hat{A}) \frac{1}{i} \Delta^c(p_2) \dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) i\hat{A} + \dots \\
& \dots + i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) \dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) (-iz_4 \hat{A}) \left. \right\} \psi(q) + \\
& + \bar{\psi}(p) \left\{ \left(2iz_4 \frac{A^2}{m} X \right) \frac{1}{i} \Delta^c(p_2) \dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) i\hat{A} + \dots \right. \\
& \dots + i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) \dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_{n-1}) \left(2iz_4 \frac{A^2}{m} X \right) \left. \right\} \psi(q).
\end{aligned}$$

Мы получили исходную совокупность циклов n -го порядка с вершинами $-iz_4 \hat{A}$, вместо $-iz_4 \frac{(p + p')A}{m} X$, и новую совокупность циклов $(n-1)$ -го порядка с комптоновскими вершинами $2iz_4 \frac{A^2}{m} X$. Из суммы циклов третьей совокупности получим

$$\begin{aligned}
& \bar{\psi}(p) \left\{ i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) \left[-iz_4 \frac{p_1^2 - m^2}{m} X \right] \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_2) \dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) i\hat{A} + \right. \\
& + i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_2) \left[-iz_4 \frac{p_2^2 - m^2}{m} X \right] \frac{1}{i} \Delta^c(p_2) i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_3) \dots \\
& \dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) i\hat{A} + \dots + i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) \dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_{n-1}) i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) \times \\
& \times \left[-iz_4 \frac{p_n^2 - m^2}{m} X \right] \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) i\hat{A} \left. \right\} \psi(q) = \\
& = \bar{\psi}(p) \left\{ \left(-iz_4 \frac{A^2}{m} X \right) \frac{1}{i} \Delta^c(p_2) \dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) i\hat{A} + \right. \quad (\text{П4}) \\
& + i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) \left(-iz_4 \frac{A^2}{m} X \right) \frac{1}{i} \Delta^c(p_3) \dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) i\hat{A} + \dots \\
& \dots + i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) \dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_{n-1}) \left(-iz_4 \frac{A^2}{m} X \right) \left. \right\} \psi(q) + \\
& + \bar{\psi}(p) \left\{ i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) [-iz_4(p_1 - m)] \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) i\hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_2) \dots \right.
\end{aligned}$$

$$\dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) i \hat{A} + \dots + i \hat{A} \frac{1}{i} \Delta^c(p_1) \dots \frac{1}{i} \Delta^c(p_{n-1}) i \hat{A} \times \\ \times \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) | -iz_4(\hat{p}_n - m) | \frac{1}{i} \Delta^c(p_n) \Big| \psi(q).$$

В этом случае получается исходная совокупность циклов n -го порядка с вершинами $-iz_4(\hat{p} - m)$ вместо $-iz_4 \frac{p^2 - m^2}{m} X$, и новая совокупность циклов $(n-1)$ -го порядка с комптоновскими вершинами $-iz_4 \frac{A^2}{m} X$.

Мы видим, что циклы $(n-1)$ -го порядка, образовавшиеся из первой и третьей совокупностей, в сумме с циклами из второй совокупности дают нуль. Таким образом, преобразование (3) можно считать доказанным для рассмотренного частного случая.

Общий случай, когда в линии и узлы циклов n -го и $(n-1)$ -го порядков включается произвольное число вершин, пропорциональных z_4 , доказывается методом индукции. Для замкнутых петель доказательство аналогично.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
АН СССР

Поступила 25 VI 1959

Վ. Ա. Շահբազյան

ԶԵՐՈ ՍՄԻՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ՄԱՍՆԻԿՆԵՐԻ ԿՎԱՆՏԱՅԻՆ ԷԼԵԿՏՐՈՂԻՆԱՄԻԿԱՅՈՒՄ ԳՐԳՈՒՄՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԲԱՐԵԼԱՎՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Կատարված է երկրիցք անտրամալիզացիոն խումբ սկալյար (պսևդոսկալյար) մասնիկների և էլեկտրամագնիսական դաշտի փոխազդման տեսության մեջ: Լինգ ամրն Գրինի ֆոտոնային ֆունկցիայի արամաշարիակումը ևնթադրվել է կամալական: Հետազոտված է ինվարիանտային լիցքերի վարքը ֆազային չարթաթյուն վրա: Պարզվում է, որ թույլ կապի ախրուլթից ևլքը մեղոնային դաշտի ոչ դծային փոխազդում տվող լիցքով ավելի շուտ է տեղի ունենում, քան էլեկտրականով: Աւարամանուշակադուլն տիրուլթում ռղերուլի մոտավորությամբ [9] դոնված են մեղոնի և ֆոտոնի Գրինի ֆունկցիայի համար իմպուլսային տախմոտոտիկներ: Գոնված են նաև սխմարիկ տախմոտոտիկներ դադաթային մասի և քառադադաթ դիադրամի համար:

ЛИТЕРАТУРА

1. Neuman M. and Furry W. H. On the interactions of Mesons with the Electromagnetic field, Phys. Rev., 76, 1677, 1949.
2. Kinoshita T. On the interaction of mesons with the electromagnetic field I, Progr. Theor. Phys., 5, 473, 1950.
3. Kinoshita T. and Nambu J. On the interaction of mesons with the electromagnetic field II, Progr. Theor. Phys., 5, 749, 1950.
4. Matthews P. T. Spinless mesons in the Electromagnetic field, Phys. Rev., 80, 292, 1950.
5. Peaslee D. C. Boson Current Corrections to second Order, Phys. Rev., 81, 94, 1951.
6. Salam A. Renormalised S-matrix for scalar electrodynamics, Phys. Rev., 86, 731, 1952.
7. Salam A. Renormalisation of scalar electrodynamics using β -formalism, PROC. ROY. Soc., A211, 276, 1952.
8. Горьков Л. П. и Халатников И. М. Электродинамика заряженных скалярных частиц, ЖЭТФ, 31, 1062, 1956.
9. Ландау Л. Д., Абрикосов А. А. и Халатников И. М. Асимптотическое выражение для гриновской функции электрона в квантовой электродинамике, ДАН СССР, 95, 773, 1954.
Ландау Л. Д., Абрикосов А. А. и Халатников И. М. Асимптотическое выражение для гриновской функции фотона в квантовой электродинамике, ДАН СССР, 95, 1177, 1954.
Ландау Л. Д., Абрикосов А. А. и Халатников И. М. Масса электрона в квантовой электродинамике, ДАН СССР, 96, 261, 1954.
10. Боголюбов Н. Н. и Ширков Д. В. Введение в теорию квантовых полей, ГИИТТ, 1957.
11. Лозунов А. А. Об одном обобщении ренормализационной группы, ЖЭТФ, 30, 793, 1956.