

С. М. Хзарджян

К теории нелинейных колебаний плазмы

В известных работах [1] последовательно развита теория колебаний плазмы в рамках линейного приближения. Без учета распределения скоростей в работах [2] рассматриваются некоторые результаты нелинейной теории. Эти работы не учитывают температурного разброса скоростей и поэтому не могут выявить температурное влияние как на линейные, так и нелинейные эффекты. К вопросам нелинейной теории плазмы нужно отнести перенос массы и заряда продольными (а так же поперечными) волнами, вопросы взаимодействия продольных волн друг с другом, поперечных волн друг с другом и продольных и поперечных—между собой. Является важным так же вопрос влияния магнитного поля на нелинейные колебания плазмы.

В настоящей работе мы ставим себе цель прежде всего разработать последовательный аппарат теории возмущений, на основании которого можно было бы выяснить все эффекты так называемой малой нелинейности. Этот аппарат соответствует разложению по малому параметру—отношению изменения плотности при наличии волн к среднему значению плотности.

В этой работе мы приводим этот аппарат только для случая продольных волн в плазме, оставляя распространение аппарата на поперечные волны для последующих работ. В качестве основного нелинейного эффекта рассматривается „акустический ветер“, выступающий как эффект второго приближения.

Явление „акустического ветра“ состоит в том, что при прохождении звуковой волны в жидкой или газообразной среде, в последней возникают стационарные потоки жидкости или газа. Первые теоретические исследования этого явления принадлежат Релею [3], позднее появилась серия работ [4], краткий анализ и критика которых даны в работе [5].

В работе [6] рассматриваются поверхностные волны, где впервые устанавливается непосредственная связь между волной и переносом вещества. Перенос вещества в этой теории является следствием учета конечности амплитуд поверхностных волн.

В работе [5], исходя из уравнения Хартри, исследуется перенос вещества волнами в системе частиц с произвольным взаимодействием. Вычислена плотность тока переносимого волнами, и выявлена её зависимость от амплитуды колебаний. Недостатком этого решения является то, что не выявлена зависимость плотности тока от температуры. Преимущество нашего подхода заключается в применении уравнения Власова А. А. [1], позволяющего учесть температуру и особо характерные „дальние“ взаимодействия в плазме.

Как известно, при решении уравнения Власова А. А. методом стационарных волн возникает известная трудность, связанная с появлением сингулярных интегралов. С этой трудностью впервые столкнулся Власов А. А. [1]. Власов А. А. считал, что сингулярные интегралы, понимаемые в смысле главного значения, соответствуют стационарным, незатухающим волнам, в которых начальный момент времени никак не выделен.

Л. Д. Ландау [7], считая неправильным метод стационарных волн и применяя к уравнению Власова А. А. преобразование Лапласа, избавился от этих сингулярных интегралов, в результате пришел к выводу, что в плазме возможны лишь нестационарные затухающие волны.

Van Kampen [1] решая уравнение Власова А. А., как и Власов А. А., методом стационарных волн, получил общее решение и показал, что если понимать получающиеся сингулярные интегралы в смысле главного значения, то тем самым отбрасываются нестационарные процессы и приходим к истолкованию Власова А. А. Случай же Ландау Л. Д. получается из общего решения введением начальных условий. В данной статье рассматривается перенос вещества стационарными волнами.

§ 1. Основное уравнение

Исходным уравнением является уравнение Власова А. А. [9]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{v} \bar{\nabla} f - \frac{1}{m} \bar{\nabla} F \bar{\nabla} \int \Phi(|\bar{r} - \bar{r}'|) d\bar{r}' \int f(\bar{r}', \bar{v}', t) d\bar{v}' = 0, \quad (1)$$

где $F = f_0 + f$ — функция распределения частиц,

f_0 — функция распределения частиц равновесного состояния,

$\Phi(|\bar{r} - \bar{r}'|)$ — потенциальная энергия взаимодействия частиц,

m — масса частиц.

$$f = \sum_{c=1}^{\infty} \lambda^c \varphi_c, \quad (2)$$

где λ — малый параметр, причем $\lambda^e = \left(\frac{\partial \rho}{\rho}\right)^e \cdot a$

$$\varphi_c = \sum_{l=-c}^c A_{c,l}(\bar{v}) e^{-il(\omega t - k\bar{r})}, \quad (3)$$

Условие действительности φ есть $A_{c,l}^*(\bar{v}) = A_{c,-l}(\bar{v})$.

Задача заключается в определении коэффициента $A_{c,l}(\bar{v})$.

§ 2. Рекуррентные формулы для коэффициентов разложения

Подставляя (2) в (1) и приравнявая члены с одинаковыми степенями малости имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_c}{\partial t} + \bar{v} \nabla_{\bar{r}} \varphi_c - \frac{1}{m} \bar{\nabla}_{\bar{v}} f_0 \nabla_{\bar{r}} \int \Phi(|\bar{r} - \bar{r}'|) \varphi_c d\bar{r}' d\bar{v} = \\ = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{c-1} \bar{\nabla}_{\bar{v}} \varphi_j \bar{\nabla}_{\bar{r}} \int \Phi(|\bar{r} - \bar{r}'|) \varphi_{c-j} d\bar{r}' d\bar{v}'. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя (3) в (4) и приравнявая члены с одинаковыми $\exp[-il(\omega t - k\bar{r})]$ получаем

$$\begin{aligned} [(k\bar{v} - \omega) A_{c,l}(\bar{v}) - \frac{\sigma_{lk}}{m} \bar{k} \bar{\nabla}_{\bar{v}} f_0 a_{c,l}] l = \\ = \frac{k}{m} \sum_{j=1}^{c-1} \sum_{m'} \bar{\nabla}_{\bar{v}} A_{j,m'}(\bar{v}) a_{c-j,l-m'} \sigma_{(l-m')k} (l - m'), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\sigma_{lk} = \int \Phi(|\bar{r} - \bar{r}'|) e^{il\bar{k} \cdot (\bar{r} - \bar{r}')} d\bar{r}'$,

$$a_{c,l} = \int A_{c,l}(u) du.$$

Обозначая

$$A_{c,l}(u) = A_{c,l}(\bar{v}_z) = \int \int A_{c,l}(\bar{v}) dv_x dv_y, \quad (5')$$

и умножая уравнение (5) на $\frac{1}{k\bar{v} - \omega}$, найдем

$$\begin{aligned} \left[A_{c,l}(\bar{v}) - \frac{\sigma_{lk}}{m} \frac{\bar{k} \bar{\nabla}_{\bar{v}} f_0}{k\bar{v} - \omega} a_{c,l} \right] l = \\ = \frac{k}{m} \sum_{j=1}^{c-1} \sum_{m'} \bar{\nabla}_{\bar{v}} A_{j,m'}(\bar{v}) \frac{1}{k\bar{v} - \omega} a_{c-j,l-m'} \sigma_{(l-m')k} (l - m'). \end{aligned} \quad (6)$$

Направляя $\bar{k}$ по оси z , можно без труда проинтегрировать уравнение (6) по v_x и v_y . Совершая эти квадратуры и употребляя обозначение (5'), получим,

$$\begin{aligned} & \left[A_{c,l}(u) - \frac{\sigma_{lk}}{m} k \frac{df_0(u)}{ku - \omega} a_{c,l} \right] l = \\ & = \frac{k}{m} \sum_{j=1}^{c-1} \sum_{m'} \frac{dA_{j,m'}(u)}{ku - \omega} a_{c-j, l-m'} \sigma_{(l-m')k} (l-m'). \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь можно произвести интегрирование по u (понимаем интеграл в смысле главного значения)

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{\sigma_{lk}}{m} k \int \frac{df_0(u)}{ku - \omega} du \right] a_{c,l} l = \\ & = \frac{k}{m} \sum_{j=1}^{c-1} \sum_{m'} \int \frac{dA_{j,m'}(u)}{ku - \omega} a_{c-j, l-m'} \sigma_{(l-m')k} (l-m'). \end{aligned} \quad (8)$$

Если ввести обозначения

$$\alpha = \int \frac{df_0(u)}{ku - \omega} du, \quad \beta_{c,l} = \int \frac{dA_{c,l}(u)}{ku - \omega} du, \quad (9)$$

уравнение (8) примет вид

$$\left[1 - \frac{\sigma_{lk}}{m} k \alpha \right] a_{c,l} l = \frac{k}{m} \sum_{j=1}^{c-1} \sum_{m'} \beta_{j,m'} a_{c-j, l-m'} \sigma_{(l-m')k} (l-m'). \quad (10)$$

§ 3. Приближенное определение коэффициентов разложения

Решим уравнение (10) в различных приближениях.

1-ое приближение $c = l = 1$.

Тогда из (10) $\left[1 - \frac{\sigma_k}{m} k \alpha \right] a_{1,1} = 0$.

Предполагая $a_{1,1} \neq 0$, получим

$$\frac{\sigma_k}{m} k \alpha = 1. \quad (11)$$

Так как $\alpha = \int \frac{df_0(u)}{ku - \omega} du$

(значение $|a_{1,1}|$ должно определяться интенсивностью, звуком поля), то соотношение (11) переписывается следующим образом

$$\frac{\sigma_k}{m} k \int \frac{df_0(u)}{ku - \omega} du = 1. \quad (11')$$

Рассмотрим предельный случай длинных волн ($k \rightarrow 0$). Разложим подынтегральное выражение по степеням k .

$$\int \frac{df_0(u)}{du} \frac{1}{ku - \omega} du = -\frac{1}{\omega} \int \frac{df_0(u)}{du} \left[1 + \frac{ku}{\omega} + \left(\frac{ku}{\omega} \right)^2 + \dots \right] du. \quad (11'')$$

Легко видеть, что (11'') можно интегрировать вдоль действительной оси, как это делается в работе [1], и здесь получаются те же соотношения. Этот случай и будем исследовать.

2-ое приближение.

Случай 1. $c = 2$, $l = 1$.

$$\left[1 - \frac{\sigma_k}{m} k^2 \right] a_{2,1} = \frac{k}{m} [\beta_{1,0} a_{1,1} \tau_k]. \quad (12)$$

Из (11) получим

$$\frac{k}{m} \beta_{1,0} a_{1,1} \tau = 0, \text{ значит } \beta_{2,0} = 0, \text{ или, что то же самое,}$$

$$\int \frac{dA_{1,0}(u)}{du} \frac{1}{ku - \omega} du = 0. \quad (13)$$

Если $A_{1,0}$ отличается от 0, то значит существует акустический ветер, причем плотность тока

$$J_{2,0} = \int A_{1,0}(u) u du, \quad (14)$$

который будет выступать как эффект 1-го порядка.

При $k \rightarrow 0$, как уже было показано, можно интегрировать вдоль действительной оси. При этом нетрудно видеть, что

$$\frac{dA_{1,0}(u)}{du} = 0, \text{ значит } A_{1,0}(u) = C.$$

Чтобы формула (14) имела смысл, нужно брать $C = 0$, значит $A_{1,0} = 0$. Этот результат показывает, что в первом приближении "акустического ветра" нет.

2-ое приближение. Случай II. $c = l = 2$. Тогда из (10)

$$\left[1 - \frac{\sigma_k}{m} k^2 \right] 2a_{2,2} = \frac{k}{m} \beta_{1,1} a_{1,1} \tau_k. \quad (15)$$

Отсюда подставляя значения $\beta_{1,1}$ и $A_{1,1}$ из (9), (10)

$$a_{2,2} = \frac{k^2}{2m^2} a_{1,1}^2 \sigma_k^2 \frac{1}{1 - \frac{\sigma_k}{m} k^2} \int \frac{d}{du} \left(\frac{df_0}{du} \frac{1}{ku - \omega} \right) du.$$

Обозначая

$$I = \int \frac{d}{du} \left(\frac{df_0}{du} \frac{1}{ku - \omega} \right) \cdot du$$

получим

$$a_{2,0} = \frac{\sigma_k^2}{2m^2} k^2 a_{1,1}^2 \frac{1}{1 - \frac{\sigma_{2k}}{\sigma_k}} I. \quad (16)$$

Перейдем к следующему приближению.

3-ее приближение $s=3$, $l=1$. Из (10) получим

$$\left[1 - \frac{\sigma_k}{m} k\alpha \right] a_{3,1} = \frac{k}{m} [\beta_{2,0} a_{1,1} \sigma_k + \beta_{2,2} a_{1,-1} \sigma_{-k} (-1) + \beta_{1,-1} a_{2,2} \sigma_{2k}]. \quad (17)$$

Принимая во внимание (11) получим

$$\beta_{2,0} = \frac{\beta_{2,2} a_{1,-1} \sigma_{-k} - 2\beta_{1,-1} a_{2,2} \sigma_{2k}}{a_{1,1} \sigma_k}. \quad (18)$$

Именно этим членом $\beta_{2,0}$ мы и будем заниматься для расчета исследуемого эффекта.

§ 4. Вычисление „акустического ветра“

Из (9) и (18) имеем

$$\begin{aligned} & \int \frac{dA_{2,0}}{du} \frac{1}{ku - \omega} du = \\ & = \frac{1}{a_{1,1} \sigma_k} \int \left[a_{1,-1} \sigma_{-k} \frac{dA_{2,2}(u)}{du} \frac{1}{ku - \omega} - 2a_{2,2} \sigma_{2k} \frac{dA_{1,-1}(u)}{du} \frac{1}{ku - \omega} \right] du. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (19) легко заключить, что при $k \rightarrow 0$

$$\frac{dA_{2,0}(u)}{du} = \frac{1}{a_{1,1} \sigma_k} \left[a_{1,-1} \sigma_{-k} \frac{dA_{2,2}(u)}{du} - 2a_{2,2} \sigma_{2k} \frac{dA_{1,-1}(u)}{du} \right]. \quad (20)$$

Откуда

$$A_{2,0}(u) = \frac{1}{a_{1,1} \sigma_k} [a_{1,-1} \sigma_{-k} A_{2,2}(u) - 2a_{2,2} \sigma_{2k} A_{1,-1}(u)] + C. \quad (21)$$

Для того, чтобы формула $I_{2,0} = \int A_{2,0}(u) u du$ имела смысл C должно равняться нулю.

Из (7) имеем

$$A_{1,1}(u) = \frac{\sigma_k}{m} k \frac{df_0(u)}{du} a_{1,1}, \quad A_{1,-1}(u) = \frac{\sigma_{-k}}{m} k \frac{df_0(u)}{du} a_{1,-1},$$

$$A_{2,2}(u) = \frac{\sigma_{2k}}{2m^3} k^3 \frac{df_0(u)}{ku - \omega} \frac{\sigma_k^2 a_{1,1}^2}{1 - \frac{\sigma_{2k}}{\sigma_k}} I + \frac{k^2}{2m^2} \sigma_k^2 a_{1,1}^2 \frac{d}{du} \left[\frac{df_0(u)}{ku - \omega} \right]. \quad (22)$$

После подстановки (22) в (21) получим

$$A_{2,0}(u) = \left[\frac{k^2}{2m^2} \sigma_k \sigma_{-k} \frac{d}{du} \left(\frac{df_0(u)}{du} \frac{1}{ku - \omega} \right) - \frac{\sigma_{2k} \sigma_k \sigma_{-k}}{2m^3} \times \right. \\ \left. \times \frac{k^3}{1 - \frac{\sigma_{2k}}{\sigma_k}} I \frac{df_0(u)}{ku - \omega} \right] |a_{1,1}|^2. \quad (23)$$

Откуда

$$a_{2,0} = \int A_{2,0}(u) du, \quad I_{2,0} = \int A_{2,0}(u) u du, \quad (24)$$

где $a_{2,0}$ — уплотнение, вызываемое волнами,

$I_{2,0}$ — плотность потока.

Таким образом, вычисление $a_{2,0}$ и $I_{2,0}$ сводится к вычислению интегралов

$$I = \int \frac{1}{ku - \omega} \frac{d}{du} \left(\frac{df_0(u)}{du} \frac{1}{ku - \omega} \right) du, \\ I_1 = \int \frac{u}{ku - \omega} \frac{d}{du} \left(\frac{df_0(u)}{du} \frac{1}{ku - \omega} \right) du, \\ I_2 = \int \frac{df_0(u)}{du} \frac{1}{ku - \omega} du, \quad I_3 = \int \frac{u}{ku - \omega} \frac{df_0(u)}{du} du.$$

Предполагая $f_0(u)$ и $f_0'(u)$ равными нулю при $u = \pm \infty$, получим

$$I = 3k^2 \int \frac{f_0(u)}{(ku - \omega)^4} du, \quad I_1 = \frac{\omega}{k} I, \quad I_2 = \int \frac{k f_0(u)}{(ku - \omega)^2} du, \quad I_3 = \frac{\omega}{k} I_2,$$

причем, когда

а) $f_0(u) = n \delta(u)$, где n — средняя плотность частиц,

$$I = \frac{3k^2}{\omega^4}, \quad I_1 = \frac{\omega}{k} \frac{3k^2}{\omega^4} n, \quad I_2 = \frac{k}{\omega^2} n, \quad I_3 = \frac{k}{\omega^2} n \frac{\omega}{k},$$

$$б) f_0(u) = n \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} e^{-\frac{mu^2}{2kT}}$$

с точностью до второго приближения включительно получим

$$I = n \frac{3k^2}{\omega^4} \left[1 + 10 \frac{2\pi T}{m} \left(\frac{k}{\omega} \right)^2 \right], \quad I_1 = \frac{\omega}{k} I, \\ I_2 = \frac{k}{\omega^2} n \left[1 + 3 \frac{2\pi T}{m} \left(\frac{k}{\omega} \right)^2 \right], \quad I_3 = \frac{\omega}{k} I_2. \quad (25)$$

Подставляя (23) в (24) получим

$$I_{2,0} = \frac{k^2}{2m^2} \sigma_k \sigma_{-k} \left\{ 1 - \frac{\sigma_{2k}}{m\omega^2} \frac{k^2 n}{1 - \frac{\sigma_{2k}}{\sigma_k}} \left[1 + 3 \frac{2\pi T}{m} \left(\frac{k}{\omega} \right)^2 \right] \times \right. \\ \left. \times \left[1 + 10 \frac{2\pi T}{m} \left(\frac{k}{\omega} \right)^2 \right] n \frac{3k^2}{\omega^4} |a_{1,1}|^2 \frac{\omega}{k} \right\}. \quad (26)$$

Выражение (26) определяет зависимость плотности тока от температуры. Из (26) легко видеть, что когда $\sigma_k < 0$ плотность тока увеличивается с температурой, а в случае $\sigma_k > 0$ $I_{2,0}$ уменьшается с увеличением температуры.

При

$$1 - \frac{n}{1 - \frac{\sigma_{2k}}{\sigma_k}} \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\sigma_{2k}}{m} \\ T = \frac{\sigma_{2k}}{m} \frac{1}{1 - \frac{\sigma_{2k}}{\sigma_k}} \frac{k^2}{\omega^2} \frac{n}{m} \frac{6\pi k^2}{\omega^2}$$

плотность тока обращается в нуль.

В заключение выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю проф. Власову А. А. за предложенную тему и за ценные советы при выполнении работы.

Московский Государственный Университет
им. Ломоносова

Поступила 2 III 1959

Ս. Մ. ԽՀԱՐԺՅԱՆ

ՊԼԱԶՄԱՅԻ ՈՋ-ԳԾԱՅԻՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՇՈՒՐՁԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Պլազմայի զծային տատանումների տեսությունը սխառմամբ կարար զարգացել է [1] աշխատություններում: [2] աշխատություններում, առանց հաշվի առնելու արագությունների բաշխումը, ստացվել էին ոչ-զծային տեսությունների բանի արդյունքներ:

Այդ աշխատությունները չեն կարող արտացոլել ջերմաստիճանի ազդեցությունը պլազմայում ոչ-զծային էֆեկտների վրա: Ոչ-զծային տեսությունը

պետք է վերադրել մասնադի և լիցքի փոխանցումը ինչպես երկայնական, աչնպես էլ լայնական աղիքներով, երկայնական աղիքների փոխազդեցությունը միմյանց հետ, լայնական աղիքների փոխազդեցությունը միմյանց հետ: Կարևոր է նաև մագնիսական դաշտի ազդեցությունը ոչ-զմային էֆեկտների վրա:

Ներկա հոդվածում մենք նպատակ ենք դնում՝ նախ և առաջ պարզացնել սիտանմատիկ զրգոումների տեսությունը, որի միջոցով հնարավոր լինի պարզել բոլոր էֆեկտները, այսպես կոչված, փոքր ոչ-զմայնություն, որը համապատասխանում է վերլուծությանը ըստ փոքր պարամետրի՝ խտության փոխազդեցության հարաբերությունը աղիքների առկայության զեպքում, խտության միջին արժեքին:

Ներկա հոդվածում վերոհիշյալ ապարատը կիրառվում է պլազմայի միաչն երկայնական աղիքների դեպքի համար: Որպես ոչ-զմային հիմնական էֆեկտ գիտարկվում է «ձայնային քամին», որը հանդես է գալիս որպես երկրորդ մոտավորության էֆեկտ: Այս մոտեցման առավելությունները [4] և [5] աշխատությունների նկատմամբ հիմնված է Ս. Ս. Վլասովի համապարման վրա, որը հանդիսանում է պլազմայում ջերմաստիճանի և հատուկ բնորոշ «հոսավոր» փոխազդեցության միաժամանակյա հաշվումը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Власов А. А. Теория многих частиц. М.—Л., 1950. Van Kampen N. C. The dispersion for plasma Waves, Pisica, № 7, 1957, p. 641—650. Van Kampen N. C. On the theory of stationary Waves in plasmas, Pisica, № 12, 1955, p. 949—963. Trilochan Pradhan, Plasma oscillations in a steady Magnetic Field: Circularly polarised Electromagnetic Mods. Phys. Rev., vol. 107, № 5, 1957, p. 1222—1227.
2. Ахиезер А. И. и Любарский Г. Я. К нелинейной теории колебаний электронной плазмы. ДАН СССР, т. 80, 1951, 193. Ахиезер А. И. и Половин Р. В. К теории волновых движений электронной плазмы. ЖЭТФ, т. 30, вып. 5, 1956, ст. 915. Гинзбург В. Л. О нелинейном взаимодействии радиоволн, распространяющихся в плазме. ЖЭТФ, т. 35, вып. 6, 1958, ст. 1573.
3. Lord Rayleigh. Scientific papers (Cambridge) university press., Teddington, England. 108, p. 239, Phil. Trans. 175. Rayleigh, Theory of Sound (macmillan company), Ltd., London, 1896, vol. III.
4. Eckart C. Vortices and Streams Couased by Sound waves, Phys. Rev., vol. 73, 1948, p. 68. A discussion on the first and second viscosities of fluids, Proc. Roy. Soc. A—226, 1—69, 21, 1954.
5. Андреев А. И. Диссертация, Москва, 1955.
6. Власов А. А. О переносе массы и заряда псевдизосными волнами. ЖЭТФ, том 27, вып. 2, 1954, ст. 224.
7. Ландау Л. Д. О колебаниях электронной плазмы. ЖЭТФ, вып. 7, т. 16, 1946.