

С. А. Хейфец

Нелинейная поправка к частоте фазовых колебаний

Уравнение фазовых колебаний с нелинейностями, но без затухания и возмущений, имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \Omega^2 \varphi = \Omega^2 \left(-\frac{1}{2} \varphi^2 \operatorname{ctg} \Phi_s + \frac{1}{6} \varphi^3 \right). \quad (1)$$

Слагаемые в правой части (1) дают поправки к частоте Ω в разных приближениях теории возмущений. Член, пропорциональный φ^3 , дает поправку в первом же приближении, равную

$$(\Delta\Omega/\Omega)_{\text{куб}} = -A^2/16,$$

где A — амплитуда фазовых колебаний.

Квадратичный член в первом приближении не дает поправки к частоте, но во втором приближении дает поправку того же порядка (по A^2), как и кубический член. Это обстоятельство дает возможность рассматривать их независимо.

Будем решать уравнение (1) методом вариации постоянных

$$\varphi = \frac{1}{2} \left(a e^{i\int \Omega dt} + a^* e^{-i\int \Omega dt} \right). \quad (2)$$

Для функции $a(t)$ (модуль которой имеет смысл амплитуды колебаний) получаем следующее уравнение первого порядка

$$\dot{a} = -\frac{\Omega}{8i \operatorname{tg} \Phi_s} \left(a e^{i\int \Omega dt} + a^* e^{-i\int \Omega dt} \right)^2. \quad (3)$$

Чтобы найти поправку к частоте применим методику нелинейных подстановок [1].

Введем вместо a и a^* новые переменные s и s^*

$$\begin{aligned} a &= s + f_1 s^2 + 2f_2 s s^* + f_3 s^{*2}, \\ a^* &= s^* + f_1^* s^{*2} + 2f_2^* s s + f_3^* s^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Функции f_1 , f_2 и f_3 подберем таким образом, чтобы уравнение для s не содержало квадратичных по s и s^* членов. Из этого условия имеем:

$$\begin{aligned} f_1 &= e^{i\int \Omega dt} / 8 \operatorname{tg} \Phi_s, \\ f_2 &= -e^{-i\int \Omega dt} / 8 \operatorname{tg} \Phi_s, \\ f_3 &= -e^{-3i\int \Omega dt} / 24 \operatorname{tg} \Phi_s. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя теперь (4) и (5) в (3) и отбрасывая члены, содержащие s в степени выше третьей, получаем

$$\dot{s} = -\frac{20 i \Omega}{192 \operatorname{tg}^2 \Phi_s} |s|^2 s + \text{осциллирующие члены.}$$

Отсюда нетрудно получить поправку от квадратичного члена к частоте фазовых колебаний

$$\Delta \Omega / \Omega_{\text{кв}} = -\frac{5}{48 \operatorname{tg}^2 \Phi_s} A^2, \quad (6)$$

Таким образом, частота фазовых колебаний с нелинейными поправками равна

$$\Omega = \Omega_0 \left(1 - \frac{5 \operatorname{ctg}^2 \Phi_s + 3}{48} A^2 \right). \quad (7)$$

Как видно из полученного результата, квадратичная нелинейность играет большую роль, чем кубическая (например, в работе [2] квадратичная нелинейность вообще не рассматривалась).

Приношу свою благодарность Ю. Ф. Орлову за помощь в работе.

Физический институт
АН Армянской ССР

Поступила 17 III 1959

Ս. Ա. ԽԵՒԲԵՑ

ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ՈՒՂՂՈՒՄ ՖԱԶԱՅԻՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՃԱԽԱՎԱՆՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Մ.

Գտնված է ուղղում ֆազային տատանումների հաճախականության համար, որը տալիս է քառակուսային ոչ-գծային թվերը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Орлов Ю. Ф. Нелинейная теория бетатронных колебаний в ускорителях. Диссертация, 1955.
2. Кошкарёв Д. Г., Орлов Ю. Ф. Параметрические резонансы фазовых колебаний в синхротроне, ПТЭ, № 6, 19, 1958.