

Э. М. Нерсисян

Определение закона движения конуса в неоднородной жидкости*

Пусть узкий конус вертикально падает на свободную поверхность сжимаемой неоднородной жидкости, занимающей нижнее полупространство. Точку касания носика конуса со свободной поверхностью обозначим через O . Выберем ось Or по свободной поверхности, ось Oz направим вертикально вниз. Если предположить движение жидкости малым и изменение начальной плотности жидкости с глубиной экспоненциальным, т. е. $\rho(z) = \rho_0 e^{kz}$, то для давления возмущенного движения получим уравнение ([1] и [3])

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} - k \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где a — начальная скорость звука,

t — время с начала проникания.

Обозначим через $f(t)$ глубину проникания конуса в момент времени t . Тогда граничное условие на боковой поверхности конуса запишется с учетом уравнения движения:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho_0 \frac{d}{dt} [f'(t) \beta], \quad (2)$$

где 2β — угол раствора конуса.

На свободной поверхности жидкости давление равно атмосферному.

Решение уравнения (1) при заданных граничных условиях для более общего случая тела вращения получено А. Г. Багдоевым [3].

В случае проникания конуса в неоднородную несжимаемую жидкость ($a = \infty$) решение проводится методом источников и распределение давления по образующей конуса получается в виде

$$e^{-kz} p(r, z, t) = -\frac{\rho_0}{2} \beta^2 \int_0^z \frac{[e^{k(\zeta-z)} - 1] [f'^2 + f f'' (f - \zeta)]}{\zeta - z} d\zeta - \\ - \frac{\rho_0}{2} \beta^2 (e^{-kz} - 1) \int_0^{f(t)} \frac{f'^2 + f'' (f - \zeta)}{\zeta + z} d\zeta + p_{\text{оли}}. \quad (3)$$

Здесь $P_{\text{оли}}$ есть распределение давления для однородной жидкости [2].

* Задача поставлена А. Г. Багдоевым.

Разлагая в первом из интегралов подынтегральную функцию в ряд по степеням $(z-z)$ и вычисляя квадратуры, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{P(r, z, t)}{\frac{\rho_0}{2} \beta^2} = & [(f'^2 + f''f) - f''f\eta] e^{k_1 \eta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_1^n \eta^n (-1)^{n-1}}{n!n} - \\ & - f''f\eta e^{k_1 \eta} + (e^{k_1 \eta} - 1) \left\{ \frac{f''f(1-k_1)}{k_1} + 2(f'^2 + f''f) \ln \frac{\eta}{1-\eta} + \right. \\ & \left. + [f'^2 + f''f(1-\eta)] \ln \frac{4}{\beta^2} \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где обозначено

$$k_1 = kf, \quad \eta = \frac{z}{f}.$$

Сила, действующая со стороны жидкости на конус, найдется интегрированием (4) по поверхности конуса:

$$P = 2\pi \beta^2 f^2 \int_0^1 p(r, z, t) (1-\eta) d\eta. \quad (5)$$

Подставляя (4) в (5), разлагая экспоненциальные функции в ряд по степеням k_1 и пользуясь формулой

$$e^{k_1 \eta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_1^n \eta^n (-1)^{n-1}}{n!n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_1^n}{n!} [\psi(n+1) - \psi(1)] \eta^n,$$

после интегрирования в формуле (5) получаем представление силы P в виде ряда по степеням k_1 :

$$P = \pi \beta^4 f^2 \rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} k_1^n [A_1(n) f'^2 + A_2(n) f''f] + \alpha f^2 f'^2 + \lambda f^3 f'', \quad (6)$$

где $B(m, n)$ — бета-функция,

$$\psi(l) = \frac{d}{dl} \ln \Gamma(l),$$

$\Gamma(l)$ — гамма-функция,

$$\alpha = -\pi \beta^4 (\ln \beta + \ln 2) \rho_0,$$

$$\lambda = -\pi \beta^4 \left(\frac{2}{3} \ln 2\beta + \frac{7}{9} \right) \rho_0,$$

$$A_1(n) = 2C_1(n) + C_2(n),$$

$$A_2(n) = 2C_1(n) + C_3(n) + C_4(n),$$

$$C_1(n) = \frac{B(2, n+1)}{n!} [\psi(n+3) - \psi(2)] - \frac{2n+3}{(n+2)!(n+1)(n+2)},$$

$$C_2(n) = \frac{1}{(n+2)!} \left\{ \ln \frac{4}{\beta^2} + |\psi(n+1) - \psi(1)| \right\},$$

$$C_3(n) = \frac{2}{(n+3)!} \left\{ \ln \frac{4}{\beta^2} + |\psi(n+1) - \psi(1)| \right\},$$

$$C_4(n) = -\frac{2n+3}{(n+3)!}.$$

Уравнение движения конуса получим из закона Ньютона:

$$mf'' = -P, \quad (7)$$

где m — масса конуса.

Подставляя (6) в (7) и введя подстановку

$$f'^2 = u(f); \quad \frac{du}{df} = -2f'',$$

получим уравнение первого порядка для функции $u(f)$

$$\frac{du}{df} = uM(f), \quad (8)$$

где

$$M(f) = \frac{2 \left[\alpha f^2 + f^2 \pi \beta^3 \rho_a \sum_{n=1}^{\infty} k_1^n A_1(n) \right]}{-m - \lambda f^3 - \pi f^2 \beta^4 \rho_a \sum_{n=1}^{\infty} k_1^n A_2(n)}.$$

Интегрируя уравнение (8) при начальном условии $f(0) = v_0$, получим

$$\frac{u}{v_0^2} = e^{\int_0^f M(f) df}, \quad f'' = -\frac{1}{2} u \frac{d}{df} M(f). \quad (9)$$

Если ограничиться величинами порядка $O(\beta^4 \ln \beta)$, выражение (9) переписывается:

$$f'' = -v_0^2 \frac{f^2}{m} \left[\alpha - \pi \beta^4 \rho_a \sum_{n=1}^{\infty} k_1^n A_1(n) \right]. \quad (10)$$

Из выражений (9) и (10) для ускорения проникания конуса следует, что увеличивающаяся с глубиной неоднородность жидкости увеличивает ускорение и соответственно уменьшает скорость дви-

жения конуса. Если ограничиться величинами порядка $O(\beta^3 \ln \beta)$, из (9) получим

$$f'' = v_0 \frac{1}{2} \left\{ -\frac{2\alpha}{m} f^2 \left(1 + \frac{\lambda f^3}{m} \right)^{-\frac{2\alpha}{3\lambda} - 1} + \right. \\ \left. + k_1 \left[\left(1 + \frac{\lambda f^3}{m} \right)^{-\frac{2\alpha}{3\lambda} - 1} f^3 N_1 - \left(1 + \frac{\lambda f^3}{m} \right)^{-\frac{2\alpha}{3\lambda}} (f^2 N_2 + f^5 N_3) \right] \right\}, \quad (11)$$

где обозначено

$$N_1 = \frac{\alpha \pi \beta^4 \rho_a \left(3 \ln \frac{4}{\beta^2} - 7 \right)}{18 m^2},$$

$$N_2 = \frac{\pi \beta^4 \rho_a \left(3 \ln \frac{4}{\beta^2} - 7 \right)}{12 m},$$

$$N_3 = -\pi \beta^4 \rho_a \left[\frac{4\lambda \left(3 \ln \frac{4}{\beta^2} - 7 \right) - 18 \left(\lambda \frac{3 \ln \frac{4}{\beta^2} - 7}{9} - \alpha \frac{6 \ln \frac{4}{\beta^2} - 49}{36} \right)}{21 m^2} \right].$$

По формуле (11) сделаны расчеты, учитывающие в первом приближении влияние неоднородности на ускорение конуса для значений параметров:

$$m = 1 \frac{\text{кг/сек}^2}{\text{м}}, \quad \rho_a = 100 \frac{\text{кг/сек}^2}{\text{м}^3}, \quad \beta = \frac{1}{8}, \quad k = 1.$$

Результаты расчетов приведены в следующей таблице

	$f=0,2$	$f=0,4$	$f=0,6$	$f=0,8$	$f=1$
$\frac{f''}{v_0}$ одн.	$-0,42626 \cdot 10^{-2}$	$-0,16971 \cdot 10^{-1}$	$-0,37416 \cdot 10^{-1}$	$-0,65440 \cdot 10^{-1}$	$-0,98244 \cdot 10^{-1}$
$\frac{f''}{v_0}$ неодн.	$-0,42874 \cdot 10^{-2}$	$-0,17163 \cdot 10^{-1}$	$-0,38105 \cdot 10^{-1}$	$-0,67240 \cdot 10^{-1}$	$-0,101969$

Вычисления для произвольного k получаются из данной таблицы с помощью элементарных пересчетов. Полученные результаты показывают, что первое приближение является достаточно точным для $k < 1$.

Приближенная формула (10) также дает хорошие результаты.

Последующие члены разложения (9) и (10) можно вычислить столь же просто.

Для конуса конечного раствора, проникающего в несжимаемую жидкость, решение уравнения (1) может быть найдено с помощью потенциалов простого слоя, как и в случае однородной жидкости [2].

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 16 VI 1959

Է. Մ. Ներդրում

ԱՆՀԱՄԱՍԵՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ԿՈՆՈՒ ՇԱՐԺՄԱՆ ՕՐԵՆՔԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկվում է կոնոի թափանցումը ներքին կիսա-տարածությունը զրավող անհամասեռ հեղուկի մեջ:

Ըստ խորություն խտության էքսպոնենցիալ փոփոխության դեպքում [3] աշխատության արդյունքի հիման վրա որոշվում է ճնշման բաշխումը կոնոի ծնիչով և հեղուկի դիմադրության ուժը:

Կոնոի շարժման օրենքի համար ստացվում է սովորական դիֆերենցիալ հավասարում, որի լուծումը արտահայտվում է ըստ միջավայրի անհամասեռության ցուցչի առանձանների շարքի տեսքով:

Ստացված են պարզ մոտավոր բանաձևեր, ըստ որոնց արված են հաշ-վումներ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. А. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1953.
2. Сагомонян А. Я., Багдоев А. Г. Проникание конуса в жидкость со свободной поверхностью. Вестник МГУ, № 8, сер. мат., мех., астроном., физ., хим., 1955.
3. Багдоев А. Г. Проникание тонкого заостренного тела вращения в неоднородную и слоистую жидкость. Вестник МГУ, № 4, 1957.