ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XII, № 6, 1959 Физико-математические науки

К. С. Чобанян, П. О. Галфаян

Кручение полого прямоугольного стержня с тонким усиливающим покрытием

В статье рассматривается задача о кручении призматического стержня прямоугольного поперечного сечения с прямоугольным симметричным вырезом. Боковая и внутренняя поверхности стержня предполагаются покрытыми усиливающим слоем постоянной толщины.

На основании малости толщины покрытия по сравнению с поперечными размерами стержня, в постановке рассматриваемой задачи влияние усиливающего покрытия с определенным приближением выражено контурным условием задачи определения функции напряжений при кручении [1]. Для определения функции напряжений использована ортонормированная система функций, исследованная в работе [2].

Рассматриваемая задача сведена к решению совокупности двух вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений. При двух отношениях размеров квадратного сечения с оценкой погрешности приближения решена совокупность бесконечных систем. Определены напряжения в характерных точках сечения и жесткость на кручение стержня.

1. Координатная система и размеры поперечного сечения скручиваемого стержня показаны на фиг. 1. Области соответствующие усиливающему покрытию, заштрихованы.

Функция напряжений при кручении $F(x, y)$ в области поперечного сечения, соответствующей основному материалу стержня, удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2G \tag{1.1}$$

и приближенному [2] контурному условию

$$F + \mu \frac{\partial F}{\partial n} = c. \tag{1.2}$$

Здесь $\mu = \delta \frac{G_1}{G}$, где δ — толщина покрытия, G и G_1 — модули сдвига основного материала и материала покрытия стержня, n — направление внешней нормали к контуру L, c — постоянная величина, значение которой на внешнем контуре можно приравнять нулю [2].

Жесткость стержня на кручение определяется формулой

$$C = 2\iint\limits_{D_0} F(x, y)\,dxdy + 2c_0\Omega_0, \tag{1.3}$$

где c_0 — значение c на внутреннем контуре, а Ω_0 — площадь, ограниченная контуром c_0.

Касательные напряжения в области D_0 определяются обычными формулами

$$\tau_{xz} = \vartheta\frac{\partial F}{\partial y}, \qquad \tau_{yz} = -\vartheta\frac{\partial F}{\partial x}. \tag{1.4}$$

В области D_1, соответствующей покрытию, касательное напряжение направлено по касательной L_1 и определяется формулой

$$\tau_{sz} = \vartheta\frac{F_0 - C_0}{\delta}, \tag{1.5}$$

где ϑ — степень кручения, а F_0 — значение функции F на L_1.

По соображениям симметрии достаточно определить функцию $F(x, y)$ только в областях I, II и III.

Функцию F будем искать в виде:

$$F(x, y) = \begin{cases} F_1(x, y) + S(x) & \text{в области I,} \\ F_2(x, y) & \text{в области II,} \\ F_3(x, y) + S(y) & \text{в области III,} \end{cases} \tag{1.6}$$

где

$$S(x) = \frac{c_0}{2\mu + a}(x + \mu), \qquad S(y) = \frac{c_0}{2\mu + d}(y + \mu). \tag{1.7}$$

На основании (1.1), (1.2) и (1.6) для определения F_1, F_2 и F_3 получаем следующие условия:

$$\Delta F_i = -2G, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1.8}$$

$$F_1(0, y) - \mu\frac{\partial F_1}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad F_1(a, y) + \mu\frac{\partial F_1}{\partial x}\Big|_{x=a} = 0, \tag{1.9}$$

$$F_2(0, y) - \mu\frac{\partial F_2}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad F_2(x, 0) - \mu\frac{\partial F_2}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0, \tag{1.10}$$

$$F_3(x, 0) - \mu\frac{\partial F_3}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0, \quad F_3(x, d) + \mu\frac{\partial F_3}{\partial y}\Big|_{y=d} = 0, \tag{1.11}$$

$$F_2(x, d) = F_1(x, d) + S(x), \quad \frac{\partial F_2}{\partial y}\Big|_{y=d} = \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big|_{y=d}, \tag{1.12}$$

$$F_2(a, y) = F_3(a, y) + S(y), \quad \frac{\partial F_2}{\partial x}\Big|_{x=a} = \frac{\partial F_3}{\partial x}\Big|_{x=a}, \tag{1.13}$$

$$F_2(x,\ d) = F_1(x,\ d+c) + S(x), \quad \left.\frac{\partial F_2}{\partial y}\right|_{y=d} = -\left.\frac{\partial F_1}{\partial y}\right|_{y=d+c}, \tag{1.14}$$

$$F_2(a,\ y) = F_3(a+b,\ y) + S(y), \quad \left.\frac{\partial F_2}{\partial x}\right|_{x=a} = -\left.\frac{\partial F_3}{\partial x}\right|_{x=a+b}. \tag{1.15}$$

Условия (1.14) и (1.15) выражают симметричность функции $F(x,\ y)$ относительно осей симметрии области прямоугольного сечения стержня.

Функции F_1, F_2 и F_3 представим в виде рядов:

$$F_1 = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(y)\,\frac{\sin\alpha_k x + \mu\alpha_k\cos\alpha_k x}{M_k}, \tag{1.16}$$

$$F_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(y)\,\frac{\sin\alpha_k x + \mu\alpha_k\cos\alpha_k x}{M_k}, \tag{1.17}$$

$$F_3 = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(x)\,\frac{\sin\beta_k y + \mu\beta_k\cos\beta_k y}{N_k}, \tag{1.18}$$

где

$$M_k = \sqrt{\mu + \frac{a}{2}(1+\mu^2\alpha_k^2)}, \qquad N_k = \sqrt{\mu + \frac{d}{2}(1+\mu^2\beta_k^2)}, \tag{1.19}$$

α_k и β_k $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ являются корнями трансцендентных уравнений

$$\begin{aligned} 1 - \mu^2\alpha_k^2 + 2\mu\alpha_k \operatorname{ctg} a\alpha_k = 0, \\ 1 - \mu^2\beta_k^2 + 2\mu\beta_k \operatorname{ctg} d\beta_k = 0. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Последовательности $[\alpha_k]$ и $[\beta_k]$, при k стремящемся к бесконечности, стремятся к последовательностям $\left[\frac{k\pi}{a}\right]$ и $\left[\frac{k\pi}{d}\right]$ [2].

Системы функций

$$\frac{\sin\alpha_k x + \mu\alpha_k\cos\alpha_k x}{M_k} \quad \text{и} \quad \frac{\sin\beta_k y + \mu\beta_k\cos\beta_k y}{N_k}, \tag{1.21}$$

в интервалах $0 < x < a$ и $0 < y < d$ являются ортонормированными.

Разложим функции $S(x)$ и $S(y)$ в ряды по функциям (1.21) в интервалах $0 < x < a$ и $0 < y < d$:

$$\begin{aligned} S(x) &= c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha_k}\cdot\frac{\sin\alpha_k x + \mu\alpha_k\cos\alpha_k x}{M_k^2}, \\ S(y) &= c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\beta_k}\cdot\frac{\sin\beta_k y + \mu\beta_k\cos\beta_k y}{N_k^2}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

2. Внося (1.16)—(1.18) в (1.8) и используя условия (1.10), (1.14), (1.15), находим

$$f_k(y) = B_k \frac{\operatorname{ch} \alpha_k \left[y - \left(d + \frac{c}{2} \right) \right]}{\operatorname{ch} \alpha_k \left(d + \frac{c}{2} \right)} + \frac{2G}{\alpha_k^3} \cdot \frac{1 + (-1)^k}{M_k}, \tag{2.1}$$

$$\psi_k(x) = D_k \frac{\operatorname{ch} \beta_k \left[x - \left(a + \frac{b}{2} \right) \right]}{\operatorname{ch} \beta_k \left(a + \frac{b}{2} \right)} + \frac{2G}{\beta_k^3} \cdot \frac{1 + (-1)^k}{N_k}, \tag{2.2}$$

$$\varphi_k(y) = E_k \left[\operatorname{sh} \alpha_k (y - d) + \frac{\operatorname{th} \alpha_k d + \mu \alpha_k}{1 + \mu \alpha_k \operatorname{th} \alpha_k d} \operatorname{ch} \alpha_k (y - d) \right] +$$

$$+ \frac{2G}{\alpha_k^3} \cdot \frac{1 + (-1)^k}{M_k} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \alpha_k (y - d)}{\operatorname{ch} \alpha_k d + \mu \alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k d} \right] +$$

$$+ \frac{\sin a\alpha_k + \mu \alpha_k \cos a\alpha_k}{\mu M_k} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_p^2 + \alpha_k^2} \left[D_p \frac{1 - \mu \beta_p \operatorname{th} \frac{b\beta_p}{2}}{\operatorname{ch} \beta_p \left(a + \frac{b}{2} \right)} \operatorname{ch} \frac{b\beta_p}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2G + (-1)^p (2G + c_0 \beta_p^2)}{\beta_p^3 N_p} \right] \frac{\sin \beta_p y + \mu \beta_p \cos \beta_p y}{N_p}. \tag{2.3}$$

Здесь B_k, D_k и E_k — постоянные интегрирования, которые должны быть определены из условий (1.12) и (1.13). Условия (1.9) и (1.11) удовлетворяются при помощи уравнений (1.20).

На основании (1.17) и (2.3) получаем

$$F_2(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ E_p \left[\operatorname{sh} \alpha_p (y - d) + \frac{\operatorname{th} \alpha_p d + \mu \alpha_p}{1 + \mu \alpha_p \operatorname{th} \alpha_p d} \operatorname{ch} \alpha_p (y - d) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2G}{\alpha_p^3} \cdot \frac{1 + (-1)^p}{M_p} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \alpha_p (y - d)}{\operatorname{ch} \alpha_p d + \mu \alpha_p \operatorname{sh} \alpha_p d} \right] \right\} \frac{\sin \alpha_p x + \mu \alpha_p \cos \alpha_p x}{M_p} +$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} \left[D_p \frac{1 - \mu \beta_p \operatorname{th} \frac{b\beta_p}{2}}{\operatorname{ch} \beta_p \left(a + \frac{b}{2} \right)} \operatorname{ch} \frac{b\beta_p}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2G + (-1)^p (2G + c_0 \beta_p^2)}{\beta_p^3 N_p} \right] \frac{\operatorname{sh} \beta_p x + \mu \beta_p \operatorname{ch} \beta_p x}{(1 + \mu^2 \beta_p^2) \operatorname{sh} a\beta_p + 2\mu \beta_p \operatorname{ch} a\beta_p} \times$$

$$\times \frac{\sin \beta_p y + \mu\beta_p \cos \beta_p y}{N_p}. \tag{2.4}$$

Здесь использована сумма ряда [7]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sin \alpha_k a + \mu\alpha_k \cos \alpha_k a)(\sin \alpha_k x + \mu\alpha_k \cos \alpha_k x)}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2) M_k^2} =$$

$$= \mu \frac{\operatorname{sh} \beta_p x + \mu \beta_p \operatorname{ch} \beta_p x}{(1 + \mu^2\beta_p^2) \operatorname{sh} \beta_p a + 2\mu\beta_p \operatorname{ch} \beta_p a}. \tag{2.5}$$

Справедливость (2.5) проверяется разложением правой части в ряд по функциям (1.21).

Используя условия (1.12) и (1.13) и принимая во внимание (2.1), (2.3) и (2.4), получаем совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений:

$$X_k = \sum_{p=0}^{\infty} a_{kp} Y_p + a_k, \qquad Y_k = \sum_{p=0}^{\infty} b_{kp} X_p + b_k, \tag{2.6}$$

где

$$a_{kp} = \frac{1}{\alpha_k} \cdot \frac{\left(1 - \mu \alpha_k \operatorname{th} \frac{c\alpha_k}{2}\right)\left[(1 + \mu^2\alpha_k^2) \operatorname{th} \alpha_k d + 2\mu \alpha_k\right]}{1 + \operatorname{th} \alpha_k d \operatorname{th} \frac{c\alpha_k}{2} + \mu\alpha_k\left(\operatorname{th} \alpha_k d + \operatorname{th} \frac{c\alpha_k}{2}\right)} \cdot \frac{\beta_p^2}{(\beta_p^2 + \alpha_k^2) N_p^2}, \tag{2.7}$$

$$b_{kp} = \frac{1}{\beta_k} \cdot \frac{\left(1 - \mu \beta_k \operatorname{th} \frac{b\beta_k}{2}\right)\left[(1 + \mu^2\beta_k^2) \operatorname{th} a\beta_k + 2\mu \beta_k\right]}{1 + \operatorname{th} a \beta_k \operatorname{th} \frac{b\beta_k}{2} + \mu\beta_k\left(\operatorname{th} a\beta_k + \operatorname{th} \frac{b\beta_k}{2}\right)} \cdot \frac{\alpha_p^2}{(\alpha_p^2 + \beta_k^2) M_p^2}, \tag{2.8}$$

$$a_k = \frac{1}{\alpha_k} \cdot \frac{\left(1 - \mu\alpha_k \operatorname{th} \frac{c\alpha_k}{2}\right)\left[(1 + \mu^2\alpha_k^2) \operatorname{th} \alpha_k d + 2\mu\alpha_k\right]}{1 + \operatorname{th} \alpha_k d \operatorname{th} \frac{c\alpha_k}{2} + \mu\alpha_k\left(\operatorname{th} \alpha_k d + \operatorname{th} \frac{c\alpha_k}{2}\right)} \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\beta_p^2 (\beta_p^2 + \alpha_k^2)} \cdot \frac{2G + (-1)^p (2G + c_0\beta_p^2)}{N_p^2} +$$

$$+ \frac{1}{\alpha_k^2} \cdot \frac{\left[(1 + \mu^2\alpha_k^2) \operatorname{th} \alpha_k d + 2\mu\alpha_k\right] \cdot \operatorname{th} \frac{c\alpha_k}{2}}{1 + \operatorname{th} \alpha_k d \operatorname{th} \frac{c\alpha_k}{2} + \mu\alpha_k\left(\operatorname{th} \alpha_k d + \operatorname{th} \frac{c\alpha_k}{2}\right)} \left[c_0 + \frac{2G}{\alpha_k^2} \times\right.$$

$$\left.\times \frac{1 + (-1)^k}{\operatorname{ch} \alpha_k d + \mu\alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k d}\right], \tag{2.9}$$

$$b_k = \frac{2G}{\beta_k} \frac{\left(1 - \mu\beta_k \operatorname{th} \frac{b\beta_k}{2}\right)\left[(1 + \mu^2\beta_k^2) \operatorname{th} a\beta_k + 2\mu\beta_k\right]}{1 + \operatorname{th} a\beta_k \operatorname{th} \frac{b\beta_k}{2} + \mu\beta_k\left(\operatorname{th} a\beta_k + \operatorname{th} \frac{b\beta_k}{2}\right)} \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^p}{\alpha_p^2 (\alpha_p^2 + \beta_k^2) M_p^2} \left[1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_p d + \mu\alpha_p \operatorname{sh} \alpha_p d}\right] -$$

$$- \frac{1}{\beta_k^2} \frac{\left(1 - \mu\beta_k \operatorname{th} \frac{b\beta_k}{2}\right)(1 + \mu\beta_k \operatorname{th} a\beta_k)}{1 + \operatorname{th} a\beta_k \operatorname{th} \frac{b\beta_k}{2} + \mu\beta_k\left(\operatorname{th} a\beta_k + \operatorname{th} \frac{b\beta_k}{2}\right)} \left[c_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{2G}{\beta_k^2} \frac{1 + (-1)^k}{\operatorname{ch} a\beta_k + \mu\beta_k \operatorname{sh} a\beta_k}\right], \tag{2.10}$$

$$D_k = \frac{(-1)^k \alpha_k}{M_k} \frac{\operatorname{ch} \alpha_k\left(a + \frac{b}{2}\right)}{\left(1 - a\alpha_k \operatorname{th} \frac{b\alpha_k}{2}\right) \operatorname{ch} \frac{b\alpha_k}{2}} Y_k,$$

$$E_k = \frac{(-1)^k \alpha_k}{M_k} \frac{1 + a\alpha_k \operatorname{th} a\alpha_k}{(1 + a^2\alpha_k^2) \operatorname{th} a\alpha_k + 2a\alpha_k} X_k. \tag{2.11}$$

Коэффициент B_k через E_k и D_k определяется соотношением

$$B_k = \frac{\operatorname{ch} \alpha_k\left(d + \frac{c}{2}\right)}{\operatorname{sh} \frac{c\alpha_k}{2}} \left[- E_k + \frac{(-1)^k}{M_k} \sum_{p=0}^{\infty} D_p \frac{(-1)^p \beta_p}{\beta_p^2 + \alpha_k^2} \frac{1 - \mu\beta_p \operatorname{th} \frac{b\beta_p}{2}}{N_p} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\operatorname{ch} \frac{b\beta_p}{2}}{\operatorname{ch} \beta_p\left(a + \frac{b}{2}\right)} + \frac{(-1)^k}{M_k} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\beta_p^2(\beta_p^2 + \alpha_k^2)} \frac{2G + (-1)^p (2G + c_0\beta_p^2)}{N_p^2}\right]. \tag{2.12}$$

Для определения c_0 пользуемся теоремой о циркуляции касательного напряжения при кручении [6]

$$\oint_{L_0} \frac{\partial F}{\partial n} ds = -2G\,\Omega_0, \tag{2.13}$$

где L_0 — внутренний контур сечения, а Ω_0 — площадь, ограниченная этим контуром.

Подставив в (2.13) значение

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dy}{ds} \tag{2.14}$$

и произведя некоторые преобразования, соотношение (2.13) приведем к виду

$$\int_a^{a+b}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}\right)_{y=d} dx+\int_d^{d+c}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_{x=a} dy=Gbc. \tag{2.15}$$

Используя условия (1.6), (1.7), (1.16), (1.18), (2.1), (2.2) и (2.15) получим выражение, определяющее значение c_0 через искомые коэффициенты:

$$c_0=\frac{2\mu+d}{b+c}\left\{Gbc+2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left\{[1+(-1)^k]\left[\frac{b}{\beta_k^2N_k^2}+\frac{c}{\alpha_k^2M_k^2}\right]G+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{D_k}{N_k}\frac{\operatorname{sh}\frac{b\beta^k}{2}}{\operatorname{ch}\beta_k\left(a+\frac{b}{2}\right)}+\frac{B_k}{M_k}\frac{\operatorname{sh}\frac{c\alpha_k}{2}}{\operatorname{ch}\alpha_k\left(d+\frac{c}{2}\right)}\right\}\right\}. \tag{2.16}$$

Докажем, что совокупность бесконечных систем (2.6) вполне регулярна. Действительно, используя сумму

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\beta_p^2}{(\beta_p^2+\alpha_k^2)N_p^2}=\frac{1}{\mu}\frac{\operatorname{th}\alpha_k d+\mu\alpha_k}{(1+\mu^2\alpha_k^2)\operatorname{th}\alpha_k d+2\mu\alpha_k},$$

получаемую из (2.5), находим

$$\sum_{p=0}^{\infty}|a_{kp}|=\frac{1}{\mu\alpha_k}\frac{\left|1-\mu\alpha_k\operatorname{th}\frac{c\alpha_k}{2}\right|(\operatorname{th}d\alpha_k+\mu\alpha_k)}{1+\operatorname{th}d\alpha_k\operatorname{th}\frac{c\alpha_k}{2}+\mu\alpha_k\left(\operatorname{th}d\alpha_k+\operatorname{th}\frac{c\alpha_k}{2}\right)}<$$

$$<\frac{\operatorname{th}\frac{c\alpha_k}{2}}{1+\operatorname{th}\frac{c\alpha_k}{2}}=1-\theta,\qquad \theta=\frac{1}{1+\operatorname{th}\frac{c\alpha_k}{2}}>0. \tag{2.17}$$

Здесь использованы неравенства

$$\left|1-\mu\alpha_k\operatorname{th}\frac{c\alpha_k}{2}\right|<\mu\alpha_k\operatorname{th}\frac{c\alpha_k}{2}, \tag{2.18}$$

$$1+\mu\alpha_k\operatorname{th}d\alpha_k<\mu\alpha_k+\operatorname{th}d\alpha_k. \tag{2.19}$$

Неравенство (2.19) доказывается при помощи неравенства $\mu\alpha_k>1$, которое следует из уравнений (1.20) при условии $\frac{\mu}{2}>\frac{2}{\pi}$.

В случае, когда

$$\left|1-\mu\alpha_k\operatorname{th}\frac{c\alpha_k}{2}\right|<1$$

имеем

$$\sum_{p=0}^{\infty}|a_{kp}|<\frac{1}{\mu\alpha_k\left(1+\operatorname{th}\frac{c\alpha_k}{2}\right)}=1-\theta_1,$$

$$
\theta_1 = \frac{\mu\alpha_k + \text{th}\,\frac{c\alpha_k}{2} - 1}{\mu\alpha_k\left(1 + \text{th}\,\frac{c\alpha_k}{2}\right)} < 1. \tag{2.20}
$$

Согласно (2.8) точно такие же оценки получим для суммы абсолютных значений коэффициентов второй системы (2.6). Таким образом, на основании (2.17) и (2.20), совокупность бесконечных систем (2.6) вполне регулярна [5]. Ограниченность свободных членов (2.9) и (2.10) вместе с вполне регулярностью бесконечных систем (2.6) позволяют определять искомые коэффициенты с любой степенью точности и дать оценку погрешности приближенного решения.

3. Рассмотрим случай квадратного сечения $d = a$, $c = b$. Коэффициенты и свободные члены совокупности систем уравнений (2.6) на основании (2.7) — (2.10) будут

$$
a_{kp} = b_{kp} = \frac{r_k \alpha_p^2}{(\alpha_p^2 + \alpha_k^2)\, M_p^2}, \tag{3.1}
$$

$$
a_k = r_k \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\alpha_p^2(\alpha_p^2 + \alpha_k^2)} \frac{2G + (-1)^p(2G + c_0\alpha_p^2)}{M_p^2} +
$$

$$
+ \frac{r_k}{\alpha_k} \frac{\text{th}\,\frac{b\alpha_k}{2}}{1 - a\alpha_k\,\text{th}\,\frac{b\alpha_k}{2}} \left[c_0 + \frac{2G}{\alpha_k^2} \frac{1 + (-1)^k}{\text{ch}\,a\alpha_k + a\alpha_k\,\text{sh}\,a\alpha_k} \right], \tag{3.2}
$$

$$
b_k = 2G\, r_k \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^p}{\alpha_p^2(\alpha_p^2 + \alpha_k^2)\, M_p^2} \left| 1 - \frac{1}{\text{ch}\,a\alpha_p + a\alpha_p\,\text{sh}\,a\alpha_p} \right| -
$$

$$
- \frac{r_k}{\alpha_k} \frac{1 + a\alpha_k\,\text{th}\,a\alpha_k}{(1 + a^2\alpha_k^2)\,\text{th}\,a\alpha_k + 2a\alpha_k} \left[c_0 + \frac{2G}{\alpha_k^2} \frac{1 + (-1)^k}{\text{ch}\,a\alpha_k + a\alpha_k\,\text{sh}\,a\alpha_k} \right], \tag{3.3}
$$

где

$$
r_k = \frac{1}{\alpha_k} \cdot \frac{\left(1 - a\alpha_k\,\text{th}\,\frac{b\alpha_k}{2}\right)\left[(1 + a^2\alpha_k^2)\,\text{th}\,a\alpha_k + 2a\alpha_k\right]}{1 + \text{th}\,a\alpha_k \cdot \text{th}\,\frac{b\alpha_k}{2} + a\alpha_k\left(\text{th}\,a\alpha_k + \text{th}\,\frac{b\alpha_k}{2}\right)}. \tag{3.4}
$$

Из симметричности задачи относительно диагонали квадратного сечения следует, что

$$
B_k = D_k. \tag{3.5}
$$

Для толщины усиливающего покрытия и механических характеристик материалов примем

$$
\delta = 0{,}1 \cdot a; \quad G = 8 \cdot 10^4 \ \textit{кг/см}^2; \quad G_1 = 8 \cdot 10^5 \ \textit{кг/см}^2.
$$

Тогда $\mu = a$.

Решая трансцендентное уравнение (1.20) методом касательных, для его корней с точностью до 10^{-3} будем иметь:

$$a\alpha_0 = 1{,}312; \quad a\alpha_1 = 3{,}670; \quad a\alpha_2 = 6{,}579; \quad a\alpha_3 = 9{,}627;$$

$$a\alpha_4 = 12{,}72; \quad a\alpha_k = k\pi; \quad (k = 5,\ 6,\ 7, \ldots).$$

Обозначим значения неизвестных X_k и Y_k с избытком через X_k^+, Y_k^+, а с недостатком через X_k^-, Y_k^-. Пользуясь теорией вполне регулярных систем [5], для X_k и Y_k получим следующие оценки:

при $\dfrac{b}{a} = 2$

$$\frac{X_0^-}{Ga^4} = 0{,}6047\,\frac{c_0^-}{Ga^2} + 0{,}3056 < \frac{X_0}{Ga^4} < 0{,}6055\,\frac{c_0^+}{Ga^2} + 0{,}3043 = \frac{X_0^+}{Ga^4},$$

$$\frac{X_1^-}{Ga^4} = 0{,}1076\,\frac{c_0^-}{Ga^2} - 0{,}09231 < \frac{X_1}{Ga^4} < 0{,}1110\,\frac{c_0^+}{Ga^2} - 0{,}09773 = \frac{X_1^+}{Ga^4},$$

$$\frac{X_2^-}{Ga^4} = 0{,}03838\,\frac{c_0^-}{Ga^2} - 0{,}05021 < \frac{X_2}{Ga^4} < 0{,}04469\,\frac{c_0^+}{Ga^2} - 0{,}06082 = \frac{X_2^+}{Ga^4},$$

$$\frac{X_3^-}{Ga^4} = 0{,}01826\,\frac{c_0^-}{Ga^2} - 0{,}02930 < \frac{X_3}{Ga^4} \leqslant 0{,}02704\,\frac{c_0^+}{Ga^2} - 0{,}04450 = \frac{X_3^+}{Ga^4},$$

$$\frac{Y_0^-}{Ga^4} = 0{,}02482\,\frac{c_0^-}{Ga^2} - 0{,}01193 \leqslant \frac{Y_0}{Ga^4} < 0{,}02559\,\frac{c_0^+}{Ga^2} - 0{,}01329 = \frac{Y_0^+}{Ga^4},$$

$$\frac{Y_1^-}{Ga^4} = 0{,}03429\,\frac{c_0^-}{Ga^2} - 0{,}09198 < \frac{Y_1}{Ga^4} < 0{,}03770\,\frac{c_0^+}{Ga^2} - 0{,}09741 = \frac{Y_1^+}{Ga^4},$$

$$\frac{Y_2^-}{Ga^4} = 0{,}01579\,\frac{c_0^-}{Ga^2} - 0{,}05017 < \frac{Y_2}{Ga^4} \leqslant 0{,}02209\,\frac{c_0^+}{Ga^2} - 0{,}06078 = \frac{Y_2^+}{Ga^4},$$

$$\frac{Y_3^-}{Ga^4} = 0{,}008041\,\frac{c_0^-}{Ga^2} - 0{,}02927 \leqslant \frac{Y_3}{Ga^4} \leqslant 0{,}01682\,\frac{c_0^+}{Ga^2} - 0{,}04448 = \frac{Y_3^+}{Ga^4},$$

при $\dfrac{b}{a} = 4$

$$\frac{X_0^-}{Ga^4} = 0{,}6281\,\frac{c_0^-}{Ga^2} + 0{,}2944 \leqslant \frac{X_0}{Ga^4} < 0{,}6286\,\frac{c_0^+}{Ga^2} + 0{,}2936 = \frac{X_0^+}{Ga^4},$$

$$\frac{X_1^-}{Ga^4} = 0{,}1060\,\frac{c_0^-}{Ga^2} - 0{,}09166 < \frac{X_1}{Ga^4} \leqslant 0{,}1096\,\frac{c_0^+}{Ga^2} - 0{,}09709 = \frac{X_1^+}{Ga^4},$$

$$\frac{X_2^-}{Ga^4} = 0{,}03753\,\frac{c_0^-}{Ga^2} - 0{,}04978 \leqslant \frac{X_2}{Ga^4} < 0{,}04367\,\frac{c_0^+}{Ga^2} - 0{,}06033 = \frac{X_2^+}{Ga^4},$$

$$\frac{X_3^-}{Ga^4}=0{,}01776\,\frac{c_0^-}{Ga^2}-0{,}02905\leqslant\frac{X_3}{Ga^4}\leqslant 0{,}02631\,\frac{c_0^+}{Ga^2}-0{,}04414=\frac{X_3^+}{Ga^4},$$

$$\frac{Y_0^-}{Ga^4}=0{,}04719\,\frac{c_0^-}{Ga^2}-0{,}02318\leqslant\frac{Y_0}{Ga^4}\leqslant 0{,}04770\,\frac{c_0^+}{Ga^2}-0{,}02393=\frac{Y_0^+}{Ga^4},$$

$$\frac{Y_1^-}{Ga^4}=0{,}03264\,\frac{c_0^-}{Ga^2}-0{,}09131\leqslant\frac{Y_1}{Ga^4}\leqslant 0{,}03624\,\frac{c_0^+}{Ga^2}-0{,}09673=\frac{Y_1^+}{Ga^4},$$

$$\frac{Y_2^-}{Ga^4}=0{,}01488\,\frac{c_0^-}{Ga^2}-0{,}04975\leqslant\frac{Y_2}{Ga^4}\leqslant 0{,}02103\,\frac{c_0^+}{Ga^2}-0{,}06029=\frac{Y_2^+}{Ga^4},$$

$$\frac{Y_3^-}{Ga^4}=0{,}007499\,\frac{c_0^-}{Ga^2}-0{,}02903\leqslant\frac{Y_3}{Ga^4}\leqslant 0{,}01604\,\frac{c_0^+}{Ga^2}-0{,}04412=\frac{Y_3^+}{Ga^4},$$

где c_0^+ — значение c_0 с избытком, а c_0^- — значение с недостатком.

4. Для квадратного сечения согласно (1.6), (1.7), (1.18), (2.2), (2.4) и (2.11) функция напряжений имеет вид:

$$F_2(x,\ y)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[(-1)^k\alpha_k Y_k+\frac{2G+(-1)^k(2G+c_0\alpha_k^2)}{\alpha_k^3}\right]\times$$

$$\times\frac{\operatorname{sh}\alpha_k x+a\alpha_k\operatorname{ch}\alpha_k x}{(1+a^2\alpha_k^2)\operatorname{sh}a\alpha_k+2a\alpha_k\operatorname{ch}a\alpha_k}\cdot\frac{\sin\alpha_k y+a\alpha_k\cos\alpha_k y}{M_k^2}+$$

$$+\sum_{p=0}^{\infty}\left[(-1)^p\alpha_p X_p+2G\frac{1+(-1)^p}{\alpha_p^3}\left(1-\frac{1}{\operatorname{ch}a\alpha_p+a\alpha_p\operatorname{sh}a\alpha_p}\right)\right]\times$$

$$\cdot\frac{\operatorname{sh}\alpha_p y+a\alpha_p\operatorname{ch}\alpha_p y}{(1+a^2\alpha_p^2)\operatorname{sh}a\alpha_p+2a\alpha_p\operatorname{ch}a\alpha_p}\cdot\frac{\sin\alpha_p x+a\alpha_p\cos\alpha_p x}{M_p^2}+$$

$$+2G\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^p}{\alpha_p}\cdot\frac{1+(-1)^k}{\alpha_k}\cdot\frac{\sin\alpha_k y+a\alpha_k\cos\alpha_k y}{(\alpha_k^2+\alpha_p^2)\,M_k^2}\times$$

$$\times\frac{\sin\alpha_p x+a\alpha_p\cos\alpha_p x}{M_p^2},\tag{4.1}$$

$$F_3(x,y)=\frac{c_0}{3a}(y+a)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{\alpha_k}{\operatorname{ch}\frac{b\alpha_k}{2}}\cdot\frac{\operatorname{ch}\alpha_k\left|x-\left(a+\frac{b}{2}\right)\right|}{1-a\alpha_k\operatorname{th}\frac{b\alpha_k}{2}}\cdot Y_k+\right.$$

$$\left.+2G\,\frac{1+(-1)^k}{\alpha_k^3}\right]\frac{\sin\alpha_k y+a\alpha_k\cos\alpha_k y}{M_k^2}.\tag{4.2}$$

Используя найденные значения функции напряжений $F(x, y)$ в формулах (1.3) — (1.5), найдем напряжения в двух характерных точках и жесткость при кручении

$$C = 2bc_0(2a + b) + 16 \sum_{k=0,2,4}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k^2 M_k^2} \left\{ 8GJ_k + \frac{4Gb}{\alpha_k^2} + \right.$$

$$+ \frac{2\alpha_k \operatorname{th} \frac{b\alpha_k}{2}}{1 - a\alpha_k \operatorname{th} \frac{b\alpha_k}{2}} \cdot Y_k + \frac{1 + a\alpha_k \operatorname{th} a\alpha_k - \operatorname{sch} a\alpha_k}{(1 + a^2\alpha_k^2) \operatorname{th} a\alpha_k + 2a\alpha_k} \cdot \left[\frac{c_0}{\alpha_k} + (X_k + Y_k)\alpha_k + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{8G}{\alpha_k^3}\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} a\alpha_k + a\alpha_k \operatorname{sh} a\alpha_k}\right)\right]\right\}, \tag{4.3}$$

$$\tau_{xz}\left(a + \frac{b}{2}, 0\right) = \vartheta \frac{c_0}{3a} + \vartheta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{M_k^2} \left[\frac{\alpha_k^2}{\operatorname{ch} \frac{b\alpha_k}{2}} \cdot \frac{Y_k}{1 - a\alpha_k \operatorname{th} \frac{b\alpha_k}{2}} + \right.$$

$$\left. + 2G \frac{1 + (-1)^k}{\alpha_k^2} \right], \tag{4.4}$$

$$\tau_{xz}\left(a + \frac{b}{2}, a\right) = \vartheta \frac{c_0}{3a} - \vartheta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{M_k^2} \left[\frac{\alpha_k^2}{\operatorname{ch} \frac{b\alpha_k}{2}} \cdot \frac{Y_k}{1 - a\alpha_k \operatorname{th} \frac{b\alpha_k}{2}} + \right.$$

$$\left. + 2G \frac{1 + (-1)^k}{\alpha_k^2} \right], \tag{4.5}$$

$$\tau_{yz}\left(a + \frac{b}{2}, 0\right) = \tau_{yz}\left(a + \frac{b}{2}, a\right) = 0, \tag{4.6}$$

$$\overset{*}{\tau}_{xz}\left(a + \frac{b}{2}, 0\right) = 10\,\tau_{xz}\left(a + \frac{b}{2}, 0\right); \quad \overset{*}{\tau}_{xz}\left(a + \frac{b}{2}, a\right) =$$

$$= 10\,\tau_{xz}\left(a + \frac{b}{2}, a\right), \tag{4.7}$$

где

$$J_k = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^p}{\alpha_p^2 (\alpha_p^2 + \alpha_k^2) M_p^2} = 2 \sum_{p=0,2,4}^{\infty} \frac{1}{\alpha_p^2 (\alpha_p^2 + \alpha_k^2) M_p^2},$$

а $\overset{*}{\tau}_{xz}$ обозначает напряжение в усиливающем покрытии. c_0 для квадратного сечения принимает следующий вид:

$$c_0 = 1{,}5\,Gab + 2{,}966\,Ga^2 + \frac{6a}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{M_k^2} \cdot \frac{\operatorname{th} \frac{b\alpha_k}{2}}{1 - a\alpha_k \operatorname{th} \frac{b\alpha_k}{2}} \cdot Y_k. \tag{4.8}$$

Подставляя в (4.8) значения Y_k с избытком и с недостатком и разрешая это уравнение относительно c_0, получим

$$c_0^- = 4{,}747\, Ga^2 \leqslant c_0 \leqslant 4{,}774\, Ga^2 = c_0^+ \quad \text{при } \frac{b}{a} = 2,$$

$$c_0^- = 7{,}918\, Ga^2 \leqslant c_0 \leqslant 7{,}936\, Ga^2 = c_0^+ \quad \text{при } \frac{b}{a} = 4.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов X_k^+, Y_k^+, c_0^+ и X_k^-, Y_k^-, c_0^- в (4.3), получим верхнюю и нижнюю границы жесткости.

Таблица 1

$\frac{b}{a}$	2	4
C_0^+	106.303	431.273
C_0^-	106.005	430.540
h	0.0028	0.0017

В таблице 1 приведены по формуле (4.3) значения величин

$$C_0^+ = C^+/Ga^4, \quad C_0^- = C^-/Ga^4$$

и максимальной относительной погрешности

$$h = (C^+ - C^-)/C^-$$

в процентах для двух отношений b/a.

Сопоставляя полученные результаты с известными [3], замечаем, что благодаря усиливающему покрытию жесткость квадратного стержня увеличивается более, чем в три раза.

Используя в (4.4), (4.5) значения коэффициентов c_0^+, Y_k^+ и c_0^-, Y_k^-, определяем с избытком и недостатком значения напряжения τ_{xz} в двух характерных точках при двух отношениях размеров поперечного сечения, которые приведены в таблице 2 с указанием относительной погрешности.

Таблица 2

$\frac{a}{b}$	2	4
$\dfrac{\tau_{xz}\left(a+\frac{b}{2}, 0\right)}{G\theta a}$	2.294 2.277	3.511 3.503
$\dfrac{\tau_{xz}\left(a+\frac{b}{2}, a\right)}{G\theta a}$	0.8929 0.8924	1.780 1.776

Согласно (4.7), напряжения в усиливающем покрытии будут в 10 раз больше, чем напряжения в соответствующих точках контакта основного материала.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 14 V 1959

Կ. Ս. Չոբանյան, Պ. Հ. Գալֆայան

ՈՒԺԵՂԱՑՆՈՂ ԲԱՐԱԿ ԾԱԾԿՈՒՅԹՈՎ ՍՆԱՄԵՋ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՁՈՂԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ԽՆԴԻՐԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հոդվածում դիտարկվում է սիմետրիկ ուղղանկյուն անցքով ուղղանկյուն լայնական հատվածք ունեցող պրիզմայաձև ձողի ոլորման խնդիրը: Ձողի արտաքին և ներքին մակերևույթները ծածկված են ուժեղացնող բարակ շերտով:

Ելնելով ձողի հատվածքի չափումների նկատմամբ ուժեղացնող շերտի հաստության փոքրությունից, դիտարկվող խնդրում ծածկույթի առկայությունը որոշակի մոտավորությամբ արտահայտվում է լարումների ֆունկցիայի (1.2) եզրային պայմանով:

Լարումների ֆունկցիան ներկայացված է [2] աշխատության մեջ ուսումնասիրված օրթոգոնալ ֆունկցիաների սիստեմով: Խնդրի լուծումը բերվում է գծային հավասարումների երկու անվերջ սիստեմների լրիվ ռեգուլյար համախմբի լուծմանը:

Ձողի ոլորման կոշտության և լարումների վերջնական հաշվումը կատարված է քառակուսի կտրվածքի համար:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галфаян П. О., Чобанян К. С.* Приближенное решение некоторых задач о кручении стержней с тонким усиливающим покрытием. Изв. АН СССР, № 3, 1959.
2. *Чобанян К. С., Галфаян П. О.* Задача о кручении прямоугольного стержня с тонким усиливающим покрытием. (Находится в печати).
3. *Абрамян Б. Л.* Кручение и изгиб призматических стержней с полым прямоугольным сечением. ПММ, 1950, т. XIУ, вып. 3.
4. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. 1948.
5. *Конторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. ОНТИ, М., 1941.
6. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. 1947.
7. *Левитан Б. М.* Разложение по собственным функциям. Гостехиздат, М.—Л., 1950.